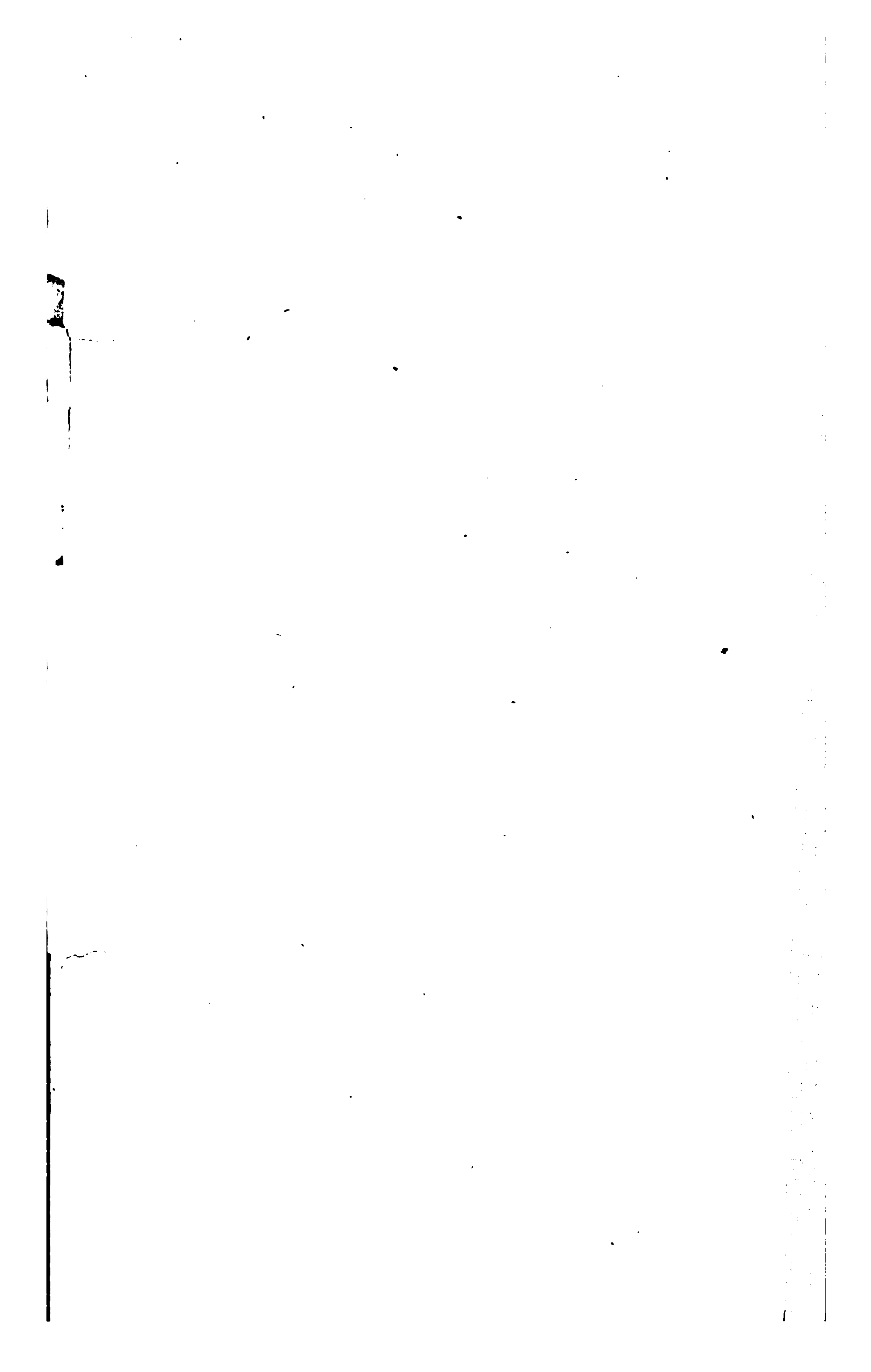
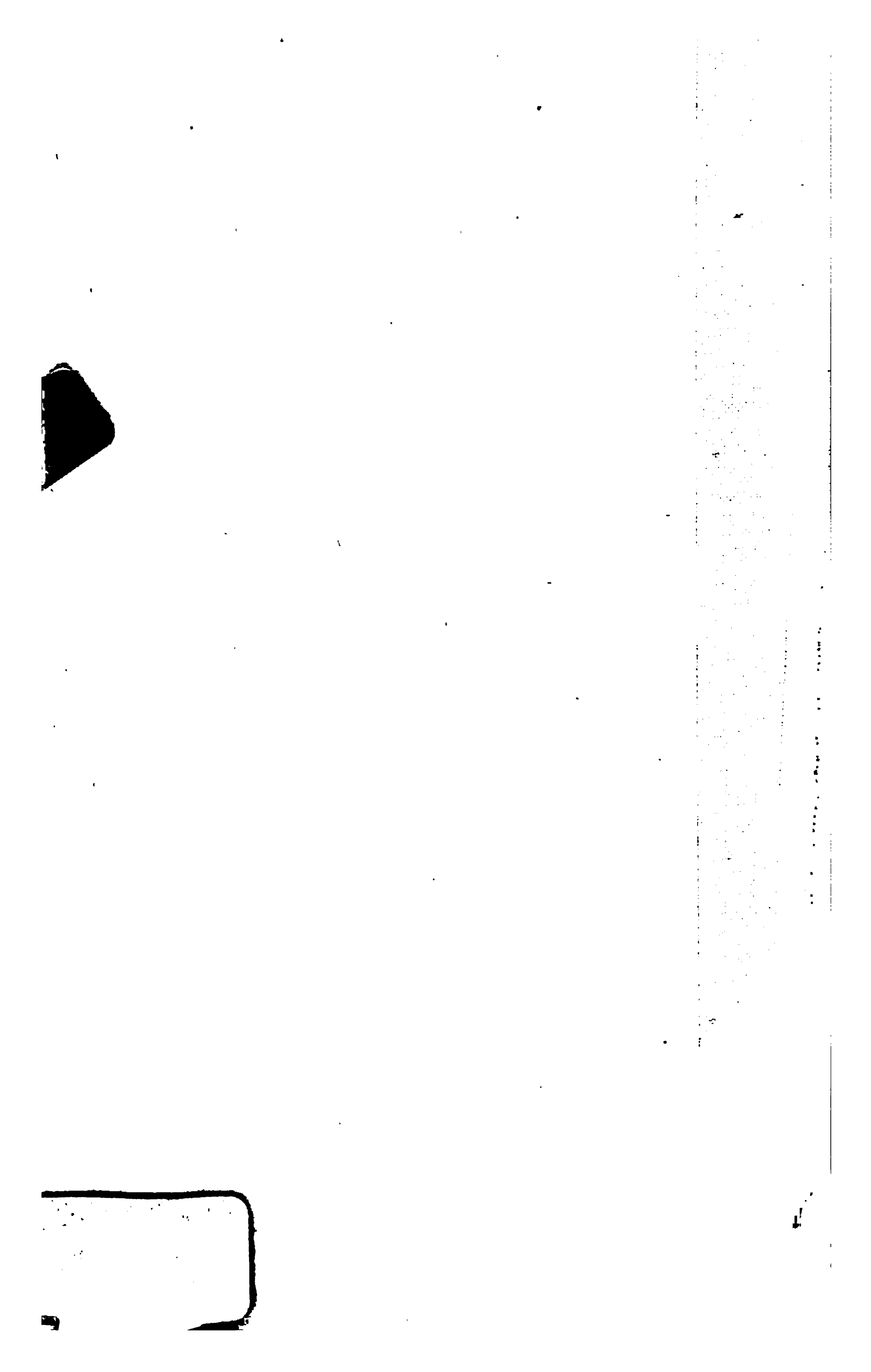
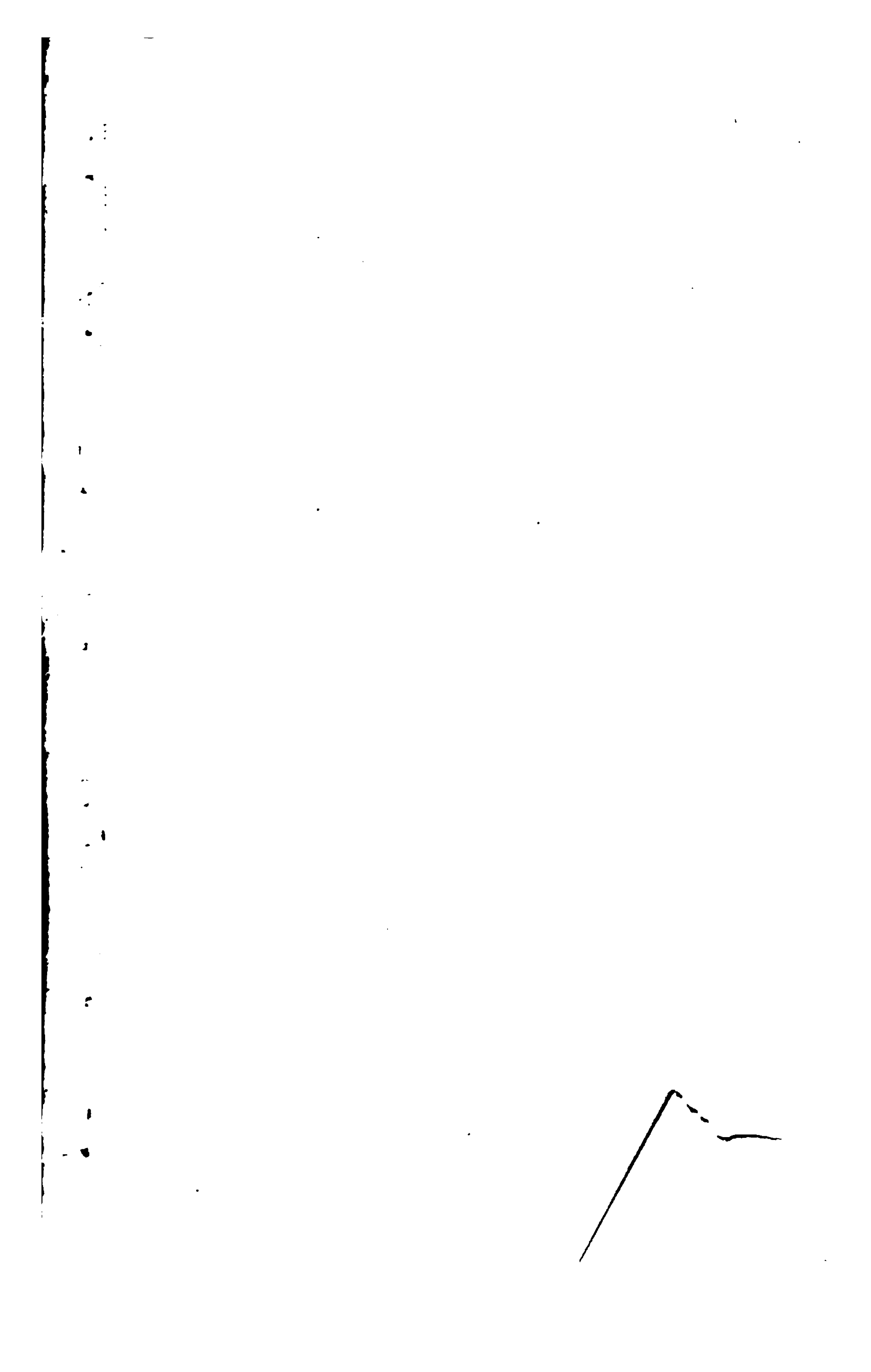










Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

begründet

von

Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern

und unter besonderer Mitwirkung der Herren

Felix Müller und **Albert Wangerin**

herausgegeben

von

Emil Lampe.

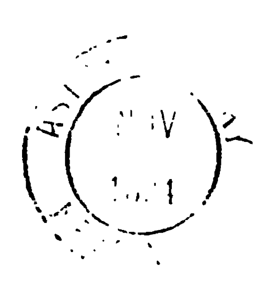
Band XXIII.

Jahrgang 1891.

Berlin.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1894.



Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu welcher der Band gehört. Einige periodische Schriften, in denen nur zuweilen eine vereinzelte mathematische Arbeit erschienen ist, sind in dieses Verzeichnis nicht aufgenommen worden; das bezügliche Citat im Texte ist dann in hinreichender Ausführlichkeit gegeben.

Acta Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. 4°. XIV, XV.

Acta Soc. Fennicae: Acta societatis scientiarum Fennicae. Helsingfors 4°. XVII, XVIII.

Almeida J.: Journal de physique théorique et appliquée. Fondé par J. Ch. d'Almeida et publié par MM. E. Bouty, A. Cornu, E. Mascart, A. Potier. Paris. Au Bureau du Journal de Physique. 8°. (2) X.

American J.: American Journal of Mathematics. Editor S. Newcomb, Associate Editor Th. Craig. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. 4°. XIII, XIV.

Amst. Versl. en Meded.: Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Academie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam. (3) VIII.

Annali di Mat.: Annali di matematica pura ed applicata diretti dal prof. Francesco Brioschi colla cooperazione dei professori: L. Cremona, E. Beltrami, E. Betti, F. Casorati. Milano. 4°. (2) XIX.

Annals of Math.: Annals of Mathematics. Ormond Stone, editor. William M. Thornton, associate editor. Office of publication: University of Virginia. B. Westermann and Co. New York. 4°. V, VI.

Ann. de Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Berthelot, Pasteur etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°.

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées etc. par un comité de rédaction composé de MM. les maîtres de conférences de l'École. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 4°. (3) VIII.

Arch. f. Art.: Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Officiere des Deutschen Reichsheeres. Redaction: Schröder, Meinardus. Berlin. Mittler u. Sohn. 8°. XCVIII.

Arch. Néerl: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem et rédigées par J. Bosscha etc. Harlem. 8°. XXIV, XXV.

Assoc. Franç.: Association Française pour l'avancement des sciences. Compt rendu de la 20me session (Congrès de Marseille). Paris au secrétariat d l'association et chez G. Masson. 8°.

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher Unter Mitwirkung des Vorstandes der Astronomischen Gesellschaf herausg. von A. Krüger. Kiel. 4°. CXXVI-CXXVIII.

Atti dell' Acc. Pont.: Atti dell' Accademia Pontaniana. Roma. XXI.

Batt. G.: Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8°. XXIX.

Belg. Bull.: Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°. (3) XXI, XXII.

Belg. Mém. C.: Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in 8°. Bruxelles. F. Hayez. XLIV, XLV.

Belg. Mém. S. É.: Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez. 4°.

Berl. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1891.

Berl. Phys. Ges. Verh.: Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin. G. Reimer. 8°. X.

Besso Per. mat.: Siehe Periodico di Mat.

Bibl. Math.: Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der Mathematik, herausgegeben von Gustaf Eneström. Stockholm. 8°. (2) V.

Böklen Mitt.: Mitteilungen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg, herausgegeben von Dr. O. Böklen. Stuttgart. J. B. Metzler. 8°. IV.

Bologna Mem.: Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°. (5) I.

Bologna Rend.: Rendiconto delle sessioni dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 8°. 1890-91.

Bordeaux Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°. (4) II.

Brit. Ass. Rep.: Report of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°. 1891.

Brux. S. sc.: Annales de la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B.) XV.

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. VII.

Cambr. Trans.: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge. XV.

Časop.: Časopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch.) XIX, XX.

Centralbl. der Bauverw.: Centralblatt der Bauverwaltung. Herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin und O. Hossfeld. Berlin. Ernst u. Sohn. 4°. XI.

Charkow Ges.: Sammlung der Mitteilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. (Russisch.) (2) II, III.

Cimento: Siehe Nuovo Cimento.

Civiling.: Der Civilingenieur. Organ des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Unter Mitwirkung etc. herausgegeben von Dr. E. Hartig. Leipzig. Arthur Felix. 4°. XXXVII.

Colorado Studies: Colorado College Studies. Papers read before the Colorado College scientific Society. Colorado Springs. 8°. II.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°. CXII, CXIII.

Darboux Bull.: Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux et J. Tannery avec la collaboration de MM. André, Battaglini etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°. (2) XV.

Delft Ann. d. l'Éc. Polyt.: Annales de l'École Polytechnique de Delft. Leiden. E. J. Brill. VII.

Deutsche Bauztg.: Deutsche Bauzeitung. Verkündigungsblatt des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieurvereine. Redacteure K. E. O. Fritsch und E. W. Büsing. Berlin. E. Toeche. XXV.

Dublin Proc.: Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin.

Dublin Trans.: Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. XXIX.

Edinb. M. S. Proc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 8°. IX.

Edinb. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°. XIX.

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°.

Ed. Times: Mathematical questions, with their solutions from the „Educational Times" with many papers and solutions not published in the „Educational Times." Edited by W. J. C. Miller. London. 8°. Francis Hodgson. LIV, LV.

Exner Rep.: Repertorium der Physik, herausgegeben von Exner. München und Leipzig. gr. 8°. XXVII.

Génie civil: Le Génie civil. Revue générale hebdomadaire des industries françaises et étrangères. Paris. XVIII, XIX.

Gött. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4°.

Gött. Nachr.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen. Göttingen. 8°. 1891.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft. Hamburg. 8°. III.

Hannov. Zeitschr.: Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, redigirt von Keck. Hannover. Schmorl u. Seefeld. 4°. XXXVII.

Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung der Herren u. s. w. herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. Teubner. 8°. XXII.

Hoppe Arch.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig. C. A. Koch. 8°. (2) X.

Japan Journ.: Journal of the college of science, imperial university, Japan. Published by the university. Tokyo. 4°. II-IV.

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 4°. Cah. LXI.

J. de Math. élém.: Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du Gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de M. de Longchamps. Paris. Delagrave. 8°. (3) V.

J. de Math. spéc.: Journal de Mathématiques spéciales à l'usage des canditats aux Écoles Polytechnique, Normale et Centrale, publié sous la direction de M. de Longchamps. Paris. Delagrave. 8°. (3) V.

J. für Math.: Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben unter Mitwirkung etc. von L. Kronecker. Berlin. G. Reimer. 4°. CVII, CVIII, CIX.

Jordan Z. f. V.: Zeitschrift für Vermessungswesen. Organ des deutschen Geometervereins. Herausgegeben von W. Jordan und C. Steppes. Stuttgart. 8°. XX.

Journ. de Math.: Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville etc. Publié par C. Jordan avec la collaboration de M. Lévy, A. Mannheim, É. Picard, H. Poincaré, H. Resal. Paris. 4°. (4) VII.

Kasan Ber.: Sitzungsberichte der mathematischen Section des Naturforschenden Vereins zu Kasan. (Russisch.) (2) I.

Kasan Ges.: Sammlung der Mitteilungen der physikalisch-mathematischen Gesellschaft zu Kasan. (Russisch.) (2) I.

Kiew Nachr.: Nachrichten der Kaiserlichen Universität zu Kiew. (Russisch.) XI.

Kjöb. Skrift.: Schriften der Kopenhagener Akademie. Kopenhagen. (6) V, VI.

Krak. Abh.: Abhandlungen der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.) (2) I-III.

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig. 4°.

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig. 8°. XLIII.

Leopold. Akad.: Verhandlungen der Kais. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Halle. gr. 4°. LVII.

Liège Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège. Bruxelles. Hayez; Paris. Roret.

Lisboa Jorn.: Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes publicado sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lomb. Ist. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°. (2) XXIV.

Lond. M. S. Proc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8°. XXII.

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°. CLXXXII.

Lond. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8°. XLIX, L.

Manchester Proc.: Memoirs and Proceedings of the literary and philosophical Society of Manchester. Manchester. (4) V.

Math. Ann.: Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, K. VonderMühll gegenwärtig herausgegeben von F. Klein, W. Dyck und A. Mayer. Leipzig. Teubner. 8°. XXXVIII, XXXIX.

Mathesis: Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand. Hoste; Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°. (2) I.

Mém. Sav. Étr.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. 4°.

Mess.: The Messenger of Mathematics. Edited by J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan and Co. 8°. (2) XX, XXI.

Met. Zeitschr.: Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben von der österreich. Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen Meteorol. Gesellschaft, redigirt von J. Hann u. W. Koeppen. Wien. gr. 8°. VIII.

Mitt. üb. Art. u. Genie: Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Herausgegeben vom K. K. technischen u. administrativen Militär-Comité. Wien. R. v. Waldheim. 8°. XXII.

Modena Mem.: Memorie della Regia Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Modena. 4°.

Monatsh. f. Math.: Monatshefte für Mathematik und Physik. Mit Unterstützung des hohen K. K. Ministeriums für Cultus und Unterricht herausgegeben von G. v. Escherich und Em. Weyr. Wien. 8°. II.

Mosk. Math. Samml.: Mathematische Sammlung, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau. (Russisch.) XV, XVI.

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München. 4°. XVII.

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°. XXI.

Napoli Rend.: Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Napoli. 4°. (2) V.

Nature: Nature, a weekly illustrated journal of science. London and New York. Macmillan and Co. 4°. XLIII, XLIV, XLV.

Naturf. Ges. Halle: Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte. 64. Versammlung zu Halle a. S. 21.-25. Septbr. 1891. I u. II. Herausg. von A. Wangerin und F. Krause. Leipzig. F. C. W. Vogel. 1891 u. 1892. 8°.

New York M. S. Bull.: Bulletin of the New York Mathematical Society. A historical and critical review of mathematical science. Edited by Th. S. Fiske and H. Jacoby. New York. 8°. I.

Nieuw Archief: Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap. Amsterdam. 8°. XVII, XVIII.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation, rédigé par MM. Ch. Brisse et E. Rouché. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°. (3) X.

Nova Acta Leop. Carol. Akad.: Siehe Leopold. Akad.

Nuovo Cimento: Il Nuovo Cimento. Giornale fondato per la fisica e la chimica da C. Matteucci e R. Piria, continuato per la fisica esperimentale e matematica da E. Betti e R. Felici. Pisa. Salvioni. gr. 8°. (3) XXIX, XXX.

Nyt Tidss. for Math.: Nyt Tidsskrift for Mathematik. Redigeret af P. T. Foldberg og C. Juel. (Abteilung A für elementare, B für höhere Mathematik.) Kjöbenhavn. 8°. II.

Odessa Ges.: Denkschriften der mathematischen Abteilung der neurussischen Gesellschaft der Naturforscher. (Russisch.) XIII.

Padova Atti: Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova.

Palermo Rend.: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo. gr. 8⁰. V.

Periodico di Mat.: Periodico di matematica per l'insegnamento secondario pubblicato per cura di A. Lugli. Roma. 8⁰. VI.

Petersb. Abh.: Abhandlungen der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. St. Petersburg. LXIV.

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science, by Kane, Thomson, Francis. London. 8⁰. (5) XXIX, XXX, XXXI, XXXII.

Phys. Ges. St. Petersb.: Journal der physiko-chemischen Gesellschaft zu St. Petersburg. (Russisch.) XXIII.

Phys.-Math. Wiss.: Die physiko-mathematischen Wissenschaften. Journal der reinen und angewandten Mathematik, Astronomie und Physik, herausgegeben von W. W. Bobynin. Moskau. (Russisch.) IX. (1890)

Pisa Ann.: Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Pisa. 8⁰.

Poske Z.: Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von E. Mach und B. Schwalbe, herausgegeben von F. Poske. Berlin. J. Springer. gr. 8⁰. IV, V.

Pr. = Programmabhandlung, *Gymn.* = Gymnasium, *Realgymn.* = Realgymnasium, etc.

Prace mat.-fiz.: Prace matematyczno-fizyczne. (Mathematische und physikalische Abhandlungen, hrsg. in Warschau von S. Dickstein, W. Gosiewski, E. u. W. Natanson.) gr. 8⁰. (Polnisch.)

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8⁰. 1891.

Progreso mat.: El progreso matemático. Periodico de matemáticas puras y aplicadas. Director D. Zoel G. de Galdeano. Zaragoza. 8⁰. I.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by N. M. Ferrers, A. Cayley, J. W. L. Glaisher, A. R. Forsyth. London. 8⁰. XXV.

Rev. d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15 de chaque mois. Paris. 8⁰. XXXVII, XXXVIII.

Rev. des Quest. sc.: Revue des Questions scientifiques, publiée par la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. gr. 8⁰. XXIX.

Riv. di Mat.: Rivista di Matematica, diretta da G. Peano. Torino. 8⁰. I.

Rom. Acc. L. Mem.: Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma. gr. 4⁰.

Rom. Acc. L. Rend.: Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Roma 4⁰. (4) VII. (Zwei Semester, unterschieden als VII_1 und VII_2.)

Rom. Acc. P. d. N. L.: Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei. Roma. 4⁰. XLIV.

Schlömilch Z.: Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter verantwortlicher Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor. Leipzig. Teubner. 8⁰. XXXVI.

Hl. A.: Historisch-litterarische Abteilung (besonders paginirt).

Silliman J.: The American Journal of science. Editors: J. D. and E. S. Dana. (3). XLI, XLII.

S. M. F. Bull.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°. XIX.

Soc. Philom. Bull: Bulletin de la Société Philomathique de Paris. Paris. 8°. (8) III.

Spaczinski's Bote: Spaczinski's Bote der Experimentalphysik und elementaren Mathematik. (Russisch.)

Stockh. Akad. Bihang: Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Stockholm. 8°. XVI.

Stockh. Öfv.: Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm. XLVIII.

Techn. Blätter: Technische Blätter. Vierteljahrsschrift des Deutschen Polytechnischen Vereines in Böhmen. Redig. v. Ed. Mais etc. Prag. 8°. XXII, XXIII.

Teixeira J.: Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8°. X.

Tokio Math. Ges.: Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji (Zeitschrift der Physiko-Mathematischen Gesellschaft in Tokio. Englisch u. Japanisch.) Tokio. 8°. IV.

Torino Atti: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8°. XXVI, XXVII.

Torino Mem.: Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino. 4°. (2) XLII.

Toulouse Ann.: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la faculté etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 4°. V.

Toulouse Mém.: Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse. Toulouse. Douladoure-Privat. 8°. (9) III.

Ungar. Ber.: Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ung. Akad. der Wissensch. und der Königl. Ung. naturwissenschaftlichen Gesellschaft hrsg. von Baron R. Eötvös etc. Redig. v. I. Fröhlich. Budapest. 8°. IX.

Ven. Ateneo: L'Ateneo Veneto. Rivista mensile di scienze, lettere ed arti diretta da A. S. de Kiriaki e L. Gambari. Venezia. 8°.

Ven. Ist. Atti: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8°. (7) II.

Ven. Ist. Mem.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 4°. XXIV.

Warsch. Nachr.: Nachrichten der Warschauer Universität. Warschau. (Russisch.) V.

Washington Bull.: Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Washington 8°. XI (1888-1891).

Wiedemann Ann.: Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn H. v. Helmholtz herausgegeben von G. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°. XLII, XLIII, XLIV.

Wien. Bauztg.: Allgemeine Bauzeitung gegründet von Chr. L. Förster. Redigirt unter Mitwirkung etc. von A. Köstlin. Wien. R. v. Waldheim. LVI.

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8°. C.

Wochenschr. f. Astr.: Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie. Redigirt von Hermann J. Klein. Halle. H. W. Schmidt. 8°. (2) XXXIV.

W. Oestr. Ing. u. Arch.: Wochenschrift des Oesterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Redacteur P. Kortz. Wien. 4°. XVI.

Wolf Z.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8°. XXXVI.

Z. dtsch. Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Th. Peters. J. Springer. Berlin. 4°. XXXV.

Z. f. Bauwesen: Zeitschrift für Bauwesen, herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin u. O. Hossfeld. Berlin. Ernst u. Sohn. 4°. XLI.

Z. Oestr. Ing. u. Arch.: Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur- u. Architekten-Vereins. Redacteur P. Kortz. Wien. 4°. XLII.

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Capitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Litterarisches.

Seite

B. Pädagogik.

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Capitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

Capitel 2. Theorie der Formen (Invariantentheorie).

Capitel 3. Elimination und Substitution. Determinanten, symmetrische Functionen.

Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik.

Capitel 1. Niedere Arithmetik.

Capitel 2. Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

B. Theorie der Formen.

Capitel 3. Kettenbrüche.

Vierter Abschnitt. Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

Seite

Capitel 2. Besondere Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Capitel 7. Variationsrechnung.

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen und der hypergeometrischen Reihen).

B. Elliptische Functionen.

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

B. Besondere ebene Gebilde.

C. Besondere räumliche Gebilde.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Lehrbücher, Coordinaten.

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

D. Andere specielle Curven.

Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Kinematik.

Capitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

B. Hydrostatik.

Capitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

B. Elasticitätstheorie.

C. Capillarität.

Capitel 2. Akustik und Optik.

A. Akustik.

Seite

B. Theoretische Optik.

C. Geometrische Optik.

Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

Capitel 4. Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

B. Gastheorie.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

Seite

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Capitel 1. Geodäsie.

Capitel 2. Astronomie.

Capitel 3. Mathematische Geographie und Meteorologie.

Anhang.

Verzeichnis
der Herren, welche für den dreiundzwanzigsten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate.)

A. Herr Prof. August in Berlin.
Bb. „ Professor Bobylew in St. Petersburg.
Bdn. „ Dr. Brodén in Lund.
Bdt. „ Prof. Burkhardt in Göttingen.
Bm. „ Prof. v. Braunmühl in München.
Bö. „ Dr. Börsch in Potsdam.
Br. „ Dr. Brix in Berlin.
Cly. „ Prof. Cayley in Cambridge.
Dn. „ Dickstein in Warschau.
Dz. „ Prof. Dziobek in Charlottenburg.
E. „ Prof. Eneström in Stockholm.
E. K. „ Prof. E. Kötter in Berlin.
El. „ Prof. Engel in Leipzig.
F. „ Dr. Faerber in Berlin.
F. K. „ Prof. F. Kötter in Berlin.
G. „ Prof. van Geer in Leiden.
Gbs. „ Assist. Prof. Gibson in Glasgow.
H. „ Prof. Hoppe in Berlin.
Hae. „ Dr. Haentzschel in Berlin.
Hk. „ Prof. Hauck in Berlin.
Ho. „ Dr. Horn in Charlottenburg.
Hr. „ Prof. Hamburger in Berlin.
Ht. „ Prof. Hilbert in Königsberg i. Pr.
Hz. „ Prof. Hurwitz in Zürich.
Js. „ Prof. Jolles in Villenkolonie Grunewald.
Kr. „ Prof. Krazer in Strassburg i. E.
La. „ Prof. Loria in Genua.
Lg. „ Prof. Lange in Berlin.
Lp. „ Prof. Lampe in Berlin.
Lsg. „ Dr. Landsberg in Heidelberg.
M. Herr Prof. F. Müller in Berlin.
Mh. „ Dr. Meth in Berlin.
Mi. „ Dr. Michaelis in Berlin.
Mk. „ Prof. Minkowski in Königsberg i. Pr.
Mn. „ Prof. Mansion in Gent.
Mo. „ Dr. Molenbroek im Haag.
My. „ Prof. F. Meyer in Clausthal.
Mz. „ Dr. Maynz in Ludwigslust.
N. „ Prof. C. Neumann in Leipzig.
R. M. „ Dr. R. Müller in Berlin.
Sbt. „ Dr. Siebert in Gross-Lichterfelde.
Schg. „ Prof. Schlegel in Hagen.
Schn. „ Prof. Schumann† in Berlin.
Scht. „ Prof. Schubert in Hamburg.
Sfs. „ Prof. Schönflies in Göttingen.
Sh. „ Dr. Schafheitlin in Charlottenburg.
Si. „ Dr. Sintzow in Kasan.
Sn. „ Dr. P. Simon in Bonn.
St. „ Dr. Stäckel in Halle a. S.
Std. „ Prof. Studnička in Prag.
Tn. „ Prof. Treutlein in Karlsruhe.
Tx. „ Prof. Teixeira in Porto.
V. „ Dr. Valentiner in Kopenhagen.
Vi. „ Dr. Vivanti in Mantua.
Wbg. „ Dr. Wallenberg in Berlin.
Wi. „ Prof. A. Wassilieff in Kasan.
Wn. „ Prof. Wangerin in Halle a. S.
W. St. „ Prof. W. Stahl† in Berlin.
Wz. „ Dr. Weltzien in Zehlendorf.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:
Professor Dr. Lampe, Berlin W, Kurfürstenstr. 139.

Inhaltsverzeichnis.

Ausführliches Inhaltsverzeichnis und Namenregister folgen am Schlusse des Bandes.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe. Berlin W. Kurfürstenstrasse 139.

Erster Abschnitt.

Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.

Geschichte.

A. Biographisch-Litterarisches.

A. Kerscha. Pantobiblion. Internationale Bibliographie der polytechnischen Wissenschaften. Monatliche Uebersicht der auf diesen Gebieten neu erschienenen Buch- und Journallitteratur. Jährlich 12 Nummern. St. Petersburg. Fontanka 64.

Die erste Nummer dieses neuen Unternehmens, welche der Redaction allein zugegangen ist, umfasst 287 zweigespaltene Seiten gross Lexikon-Octav. Nach der Einleitung soll das Pantobiblion bringen: 1) einen bibliographischen Anzeiger sämtlicher neuen Werke, die in allen Ländern und allen modernen Sprachen auf dem Gebiete aller Zweige der polytechnischen und anderen Wissenschaften erscheinen; 2) eine Reihe von Kritiken über die wichtigsten wissenschaftlichen Werke, abgefasst in der Sprache des betreffenden Buches; 3) einen Ueberblick der Inhaltsangabe der wichtigsten Fachzeitschriften oben erwähnter Wissenschaften. Beabsichtigt war ferner die Hinzufügung: 4) einer kritischen Uebersicht der Hauptartikel in den wichtigsten wissenschaftlichen Journalen; 5) diverser Nachrichten aus

dem Gebiete der polytechnischen Weltlitteratur. Von den einzelnen Abschnitten seien angeführt: I. Mathematik, II. Physik und Chemie, V. Astronomie und Meteorologie, VI. Mechanik, VII. Hydraulik und Wasserbau, IX. Elektricität und Elektrotechnik. Lp.

A. FAVARO. Sopra la parte fatta alla storia in un disegno di Bibliografia delle Matematiche. Riv. di Mat. I. 72-77.

Gelegentlich der Pariser Weltausstellung tagte auch ein internationaler Congress für mathematische Bibliographie (16. bis 19. Juli 1889), und von diesem wurde, auf Grund von Vorarbeiten der französischen mathematischen Gesellschaft, die Veröffentlichung eines bibliographischen Repertoriums beschlossen. Favaro wendet sich nun gegen das hierüber festgestellte Programm, insbesondere gegen die gewählte Art und zeitliche Ausdehnung der Berücksichtigung der Geschichte der Mathematik, und verlangt eine Umgestaltung des betreffenden Programmabschnittes. Tn.

M. CANTOR. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2. Band. Von 1200—1668. 1. Teil. Leipzig. Teubner. 499 S. gr. 8°.

Bericht erfolgt mit Teil 2 zusammen. Lp.

W. W. BOBYNIN. Russische physiko - mathematische Bibliographie. Bd. II. (Russisch.)

Dieser zweite Band des für die Geschichte der Mathematik in Russland bedeutungsvollen Werkes enthält eine eingehende Uebersicht aller Werke über die Arithmetik, Artillerie, Astronomie, Geographie, Geometrie, Feldmesskunst, Mechanik, Navigation, Fortification, sowie auch der Kalender, welche in Russland vom Jahre 1764 bis 1799 erschienen sind. Der Band giebt auch das Verzeichnis der Abhandlungen physiko-mathematischen

Inhaltes, welche in den Schriften der Kaiserlichen Akademie in St. Petersburg für diese Jahre stehen. Wi.

D. Bierens de Haan. Bibliographie de l'histoire des sciences mathématiques aux Pays-Bas. Bibl. Math. (2) V. 13-22.

Diese Note gehört zu der Reihe von Notizen über das mathematisch-historische Studium in verschiedenen Ländern, über welche schon früher in diesem Jahrbuche (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 3; XXII. 1890. 2) berichtet worden ist. Nach einer kurzen historischen Einleitung verzeichnet Herr Bierens de Haan 60 in den Niederlanden erschienene mathematisch-historische Schriften. Aelter als 1750 sind nur drei derselben; die Perioden 1751-1800, 1801-1850, 1851-1888 sind durch respective 3, 13 und 41 Schriften repräsentirt. Als Anhang wird ein Verzeichnis von Biographien hervorragender niederländischer Mathematiker beigefügt.

E.

M. Steinschneider. Miscellen zur Geschichte der Mathematik. Bibl. Math. (2) V. 113-116.

Fortsetzung der schon früher (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 6; XXII. 1890. 12) angezeigten Reihe von vermischten Notizen zur Geschichte der Mathematik.

7) Es wird ein mittelalterlicher Mathematiker Boëtius erwähnt, der um 1277 gelebt haben soll, und dahingestellt, ob nicht die Controversen über den alten Boëtius teilweise auf einer Verwechselung der beiden Verfasser beruhen können.

8) Aegidius de Columna ist fälschlich als Verfasser einer Schrift „De cometis" angegeben worden.

9) Das Wort Kardaga, welches nach Gherardo Cremonese $\frac{1}{96}$ des Kreisumfangs bedeutet, ist nicht ein persisches Lehnwort, sondern das indische Kramadja.

10) Herr Steinschneider berichtet über den Inhalt des Commentars des Iohannes de Saxonia zur „Introductio Alchabitii";

dieser Commentar ist 1521 zu Venedig gedruckt, als Anhang an den „Libellus isagogicus Abdilazi". E.

M. Steinschneider. Ueber die mathematischen Handschriften der amplonianischen Sammlung. Bibl. Math. (2) V. 41-52, 65-73.

Der Anfang dieses Artikels ist in der Bibl. Math. (2) IV (F. d. M. XXII. 1890. 12) erschienen. Die Fortsetzung enthält eine grosse Anzahl von Notizen über arabische Gelehrte und Uebersetzungen arabischer Arbeiten aus dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. Am Schlusse des letzten Artikels ist ein alphabetisches Verzeichnis der behandelten Verfasser beigefügt. E.

G. Eneström. Question 33. Académie des Sciences de Madrid. Question 34. G. Eneström. Question 35. A. Favaro. Question 36. G. Eneström. Addition à la question 31. Bibl. Math. (2) V. 32, 64, 96, 119.

Anfragen über verschiedene Punkte der Geschichte der Mathematik (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 12).

33) Ueber verschiedene Ausgaben einer anonymen Schrift: „Astrolabii quo primi mobilis motus deprehenditur Canones", welche von Prosdocimo de' Beldomandi verfasst ist.

34) Ueber die Curven, welchen eine besondere Benennung (z. B. nach dem Entdecker) gegeben worden ist.

35) Ueber die verschiedenen Multiplicationszeichen.

36) Ueber eine im Jahre 1610 von M. Horky herausgegebene Schrift gegen Galilei.

Zusatz zur Anfrage 31 (F. d. M. XXII. 1890. 12). Die algebraische Schrift des Guglielmo de Lunis ist nicht italienisch, sondern lateinisch geschrieben. E.

W. Altmann. Die Doctordissertationen der deutschen Universitäten in den Jahren 1885/86 bis 1889/90. Statistische Betrachtungen. Nebst einem statistischen

Ueberblick über die Doctordissertationen der französischen Universitäten. Berlin. Gaertner. 64 S. 8°.

J. ADAM. The nuptial number of Plato: its solution and significance. London. C. J. Clay and Sons. Cambridge University Press Warehouse. 79 S. 8°.

Schon Cicero hat betreffs der „Hochzeitszahl“ in Plato's Staat den Vergleich gebraucht: numero Platonis obscurius. In allen den Jahrhunderten seitdem sind Versuche zur Aufklärung gemacht worden; die obige Schrift giebt eine neue, wie ihr Verfasser sagt, „vollständige“ Lösung. Er findet, wie schon Hultsch, freilich auf anderem Wege, die Zahl $= 2700.4800 = 3600^2$, also $= 12960000$ und, vom sogenannten pythagoreischen Dreieck ausgehend und auf die Harmonien der Zahlen sich stützend, erklärt er sie als die Zahl der Tage des „grossen“ Jahres von 36000 Jahren, welche Zeit als Halbdauer der Welt Plato entnommen habe aus der Lebenszeit des Menschen $= 100.360$ Tagen; die Bestandteile dieser Zahl aber habe Plato gebildet entsprechend der Zahl von Tagen, die der Mensch als Foetus brauche bis zu gewissen Zeitpunkten seiner Entwickelung. Die eingehende sprachliche und sachliche Erklärung wirft schöne Streiflichter auf die platonische Kosmologie. Tn.

APOLLONII Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg. I. Lipsiae. B. G. Teubner. XII + 451 S. 8°.

Seit dem Jahre 1710 ist das bedeutsame Werk des Apollonius nicht wieder im Urtext herausgegeben worden; der berühmte Herausgeber des Euklid und Archimed füllt nun auch diese Lücke aus, will sich freilich auf die ersten vier Bücher beschränken, die allein noch griechisch vorhanden sind. Er giebt hier die drei ersten Bücher, und zwar wesentlich nach dem Texte des cod. Vatic. aus dem 12.-13. Jahrhundert, unter Benutzung noch eines weiteren Vatic. und eines Constantinop. sowie eines

Paris., die alle drei aus dem 13. Jahrhundert stammen. E
zweiter Band soll das vierte Buch und Fragmente bringen, s
wie die Lemmen des Pappus und die Erläuterungen des Eutokiu
überdies kritische Auseinandersetzungen. Tn.

Cleomedis de motu circulari corporum caelestium lib
duo. Edidit et latina interpretatione instruxit H. Ziegle
Lipsiae. B. G. Teubner. VI + 257 S. 8°.

Die letzte Ausgabe des Cleomedes stammt aus dem Jahr
1820 bezw. 1832, und so kommt diese Neuausgabe erwünsch
Sie stützt sich ganz vorwiegend auf den dem 12. Jahrhunder
zugehörigen cod. Medic. (jetzt Laurent.) und benutzt die Vor
und Hülfsarbeiten von Kapp, Hultsch u. a. Eine selbständig
lateinische Uebersetzung ist beigefügt, ebenso ein genaues Namen
und Wörterverzeichnis. Tn.

Iamblichi de communi mathematica scientia liber. Ad
fidem codicis Florentini edidit N. Festa. Lipsiae. B. G.
Teubner. IX + 152 S. 8°.

Von dem grossen Werke des Iamblichus (wohl um 300 n.
Chr.) in 10 Büchern sind nur deren fünf erhalten, das erste,
zweite, dritte, vierte, siebente, und sie sind einzeln bezw. in den
Jahren 1815, 1813, 1781, 1668, 1817 herausgegeben worden; die
vorliegende Neuausgabe des dritten Buches ist also sehr zu begrüssen.
Sie hält sich hauptsächlich an die Florentiner Handschrift,
giebt ein genaues Namen- und Wörterverzeichnis, leider
aber, wie zumal der Titel erwarten liesse, keine lateinische Uebersetzung.
Tn.

M. Curtze. Commentar zu dem „Tractatus de Numeris
Datis“ des Jordanus Nemorarius. Schlömilch Z. XXXVI.
Hl. A. 1-23, 41-62, 81-95, 121-138.

Im Jahre 1879 hat der Berichterstatter erstmals, freilich nur
nach einer Handschrift und mit Lesefehlern, den obengenannten
Traktat zum Abdruck gebracht. Curtze giebt nun eine erneute

und vervollständigte Ausgabe derselben Schrift und fügt ihr Satz um Satz je eine Uebersetzung in die heute übliche mathematische Sprache und erläuternde Bemerkungen bei. Den Schluss des Werkes (vom 15. Satze des vierten Buches ab), welchen die seither gekannten Handschriften nicht enthalten, giebt Curtze nach einer Dresdener Handschrift, die leider nicht ganz den ursprünglichen Text enthält. Tn.

Beltrami e Della Croce. Il codice di Leonardo da Vinci nella biblioteca del Principe Trivulzio. Milano. Dumolard.

H. Staigmüller. Dürer als Mathematiker. Pr. (Nr. 590) Kgl. Realgymn. Stuttgart. 57 S. 4°. (2 Fig.-T.)

Da „die wichtigste, ja fast einzige Quelle zur Beurteilung Dürer's als Mathematiker seine Unterweisung der Messung mit Zirkel und Richtscheit ist“, so ist auch demgemäss die Hauptsache der vorliegenden Programmschrift eine sorgfältige Analyse jener „Underweysung“ vom Jahre 1525 unter teilweiser Beiziehung der Auflage vom Jahr 1538; zahlreiche Nachbildungen von Dürer's Figuren erleichtern das Verständnis. Der Verfasser hat sich aber nicht mit einer Analyse begnügt; eine rück- und vorschauende begleitende geschichtliche Betrachtung vertieft den Wert seiner Abhandlung und erschliesst das volle Verständnis für Dürer's Leistung, und zahlreiche beigefügte Fussnoten geben in heutiger mathematischer Sprache teils Erläuterungen teils Weiterführungen von Dürer's Auffassung und kritisiren dabei Meinungen anderer (so betreffs der Schneckenlinien, der asymptotischen Curven, der planimetrischen Construction der Ellipse, der Dürer'schen Muschellinie, der Dreiteilung eines Winkels, des Vitruv'schen Wertes von π, des Distanzpunktes). Zum Schluss (S. 50ff.) erörtert der Verfasser die Quellen, aus denen Dürer geschöpft hat, und erkennt als wichtigste die Zunfttradition der Bauhütte, mündliche Unterweisung Befreundeter, die reichen litterarischen Schätze Nürnbergs und — last not least — die eigene Befähigung unseres grossen Meisters. Tn.

J. L. E. Dreyer. Tycho Brahe: a picture of scientific life and work in the sixteenth century. Edinburgh. A and C. Black. (1890). [Nature XLIII. 98-100.]

Galilei. Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia. Vol. II. Firenze. G. Barbèra. 611 S.

In Betreff des Ursprungs und der Vorgänge der Veranstaltung dieser neuen Ausgabe der Werke Galilei's, wie auch wegen des gewählten Plans verweisen wir auf unseren Bericht über den I. Bd. (F. d. M. XXII. 1890. 837); wir beschränken uns daher hier auf eine Inhaltsübersicht des vorliegenden zweiten Bandes. Ein erster Abschnitt desselben ist der Kriegsbaukunst gewidmet; er enthält zwei Handbücher, welche „Breve istruzione all'architettura militare" und „Trattato di fortificazione" betitelt sind; nach der Meinung des Herausgebers (A. Favaro) ist das erste ein Gerippe der öffentlichen Vorlesungen Galilei's in Padua, während das zweite von ihm in seinem Privatunterricht gebraucht wurde.

Aus dem Unterricht Galilei's sind auch „Le Meccaniche" entsprungen, eine Arbeit, welcher wir hinter den obengenannten begegnen. Derselben folgt chronologisch eine „Lettera a Jacopo Mazzoni" (30. Mai 1597) über die Schrift „De comparatione Aristotelis et Platonis" dieses Philosophen; und dann ein neues didaktisches Werk, der „Trattato delle sfere ovvero Cosmografia", welches im J. 1656 durch Urbano Daviso gedruckt wurde, und von Libri (Histoire des Sciences mathématiques en Italie T. IV, Paris 1841, S. 184) für unecht gehalten wurde. Dann begegnen wir einer Fortsetzung der im I. Bd. enthaltenen Schrift „De Motu", welche „De Motu accelerato" betitelt ist.

Ein neuer Abschnitt beginnt mit einigen „Frammenti di lezioni e di studii sulla nuova stella dell'Ottobre 1604" und enthält ferner die „Consideratione astronomica circa la stella nuova dell'anno 1604 di Baldesar Capra" mit den Anmerkungen von Galilei und den „Dialogo di Cecco Ronchitti da Bruozene in

perposito della stella nuova", welcher von Galilei unter Mitwirkung von D. Girolamo Spinelli geschrieben zu sein scheint.

Der letzte Abschnitt enthält zuerst das berühmte Heft „Le operazioni del compasso geometrico e militare", mit einer Einleitung des Herausgebers; ferner die nicht minder berühmte Schrift „Usus et fabrica circini cuiusdam proportionis, opera et studio Balthesaris Caprae", mit den Anmerkungen Galilei's; endlich die „Difesa di G. G. contro alle calunnie ed imposture di Baldessar Capra".

Der Band schliesst mit einer kurzen „Raccolta di quelle cognizioni che a perfetto cavaliero e soldato si richieggone le quali hanno dipendenza dalle scienze matematiche". La.

A. Favaro. Galileo Galilei e Suor Maria Celeste. Firenze. G. Barbèra. 440 S.

Wer kennt nicht die zähe Beständigkeit, mit der Herr Favaro seit vielen Jahren sich mit allem beschäftigt, was näher oder entfernter das Privatleben oder die wissenschaftlichen Arbeiten Galilei's betrifft? Kein Jahr erreicht sein Ende, ohne dass einige Bände oder Aufsätze die Zahl der Arbeiten vermehren, welche dem berühmten Gelehrten von dem unermüdlichen Professor der Universität Padua schon gewidmet sind. Alle gesammelten Materialien sollen in der Staats-Ausgabe der Werke Galilei's benutzt werden (vgl. das vorige Referat). Inzwischen aber wollte Herr Favaro dieselben benutzen, um eine Biographie des Gelehrten zu skizziren, in der nur die Familienverhältnisse und insbesondere seine Beziehungen zu seiner Tochter Suor Maria Celeste untersucht werden sollten. Von dem so entstandenen interessanten Werkchen (welches alle Briefe enthält, welche Suor Maria Celeste an ihren Vater gerichtet hat) können wir nur eine Ankündigung geben, da es nur beiläufig die Geschichte der Wissenschaft berührt; aber mindestens die Ankündigung desselben haben wir geben wollen, da alles, was einen so grossen Mann betrifft, des Interesses des mathematischen Publicums wert ist. La.

A. Favaro. Sopra alcuni nuovi studi Galileiani. Ven. Ist. Atti. (7) II. 133-140.

A. Favaro. Nuovi studi Galileiani. Ven. Ist. Mem. XXIV. 1-430.

Die von Staats wegen eingeleitete und begonnene Ausgabe von Galilei's Werken, mit deren Oberleitung der unermüdlich thätige Favaro beauftragt ist, schreitet nur langsam voran, da immer erneut beiströmender Stoff zu bewältigen ist und die Arbeit sehr sorgsam durchgeführt wird. Im Interesse der nötigen Vorarbeiten und um die Berufenen miturteilen zu lassen über Aufnahme oder Nichtaufnahme gewisser Stücke in die „Gesammelten Werke", veröffentlicht Favaro immer erneut und in verschiedenen Gesellschaftsschriften zur Aufklärung über Galilei's Leben und Wirken beitragende Aktenstücke. So auch jetzt in dem oben genannten zweiten Buche, zu welchem der an erster Stelle erwähnte Aufsatz die orientirende Einführung bildet.

„Neue Studien" betitelt Favaro seinen dicken Quartband, weil dieser nur bisher Ungedrucktes mitteilt. Es sind im ganzen 15 Gegenstände, auf welche sich die zahlreichen Aktenstücke, teils aus italienischen, teils aus spanischen und holländischen Archiven entnommen, beziehen; ein einleitender oder verbindender Text rückt diese Aktenstücke jeweils in die richtige geschichtliche Beleuchtung.

Im einzelnen handelt es sich um die folgenden Gegenstände.

1. (S. 9ff.) Zur Jugendgeschichte Galilei's, betreffend einen Prozess aus dem Jahre 1589.

2. (S. 55ff.) Echtheit der vom Pater Urbano d'Aviso 1656 herausgegebenen „Sphaera" des Galilei und Unechtheit der von Gargani und Libri als galileianisch ausgegebenen „Sphären".

3. (S. 71ff.) Nachweis, dass Galilei ein noch vorhandenes — aber nicht die zwei gewöhnlich dafür ausgegebenen — Exemplar der Revolutionen des Kopernikus mit Randbemerkungen versehen habe.

4. (S. 79ff.) Galilei betreffende Auszüge aus 18 Briefen, die der Augsburger Welser in den Jahren 1611-1614 an den Bamberger Faber in Rom geschrieben hat.

5. (S. 101 ff.) Ueber Verhandlungen mit Spanien betreffs Bestimmung von geographischen Längen in den Jahren 1612-1632; ebenso (S. 289-339) mit den Niederlanden in den Jahren 1634-1640 (No. 11).

6. (S. 149 ff.) Abdruck der unten (S. 13) erwähnten Streitschrift gegen Kopernikus' Lehre (S. 165-173) und der Entgegnung Kepler's (S. 173-184).

7. (S. 185 ff.) Angaben über Briefe Verschiedener an Cesi aus den Jahren 1604-1629.

8. (S. 203 ff.) Ueber die Beziehungen Galilei's zu seinem Gegner Grassi.

9. (S. 221 ff.) Galilei Betreffendes aus dem Briefwechsel von Peiresc.

10. (S. 237-289.) Auszüge aus dem Briefwechsel zwischen Galilei und E. Diodati aus den Jahren 1620-1640.

12. (S. 339 ff.) Die päpstliche Pension Galilei's Betreffendes mit 13 Aktenstücken (S. 352-373).

13. (S. 373 ff.) Drei Gutachten zu Gunsten Galilei's in Betreff des Fortbezugs seines Gehaltes und betreffs seiner Beerdigung in geweihter Erde.

14. (S. 389 ff.) Neue Aktenstücke zur Geschichte der Pendeluhr.

15. (S. 419 ff.) Beitrag zur Geschichte der Aufhebung des kirchlichen Verbotes, das Weltsystem des Kopernikus zu lehren.

Tn.

Galileo Galilei. Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend. Aus dem Italienischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von A. von Oettingen. Leipzig. W. Engelmann. (Ostwald's Klassiker Nr. 24 u. 25.) 141 u. 66 S. 8°.

Wenn im vorigen Jahrgange des Jahrbuchs das erste Heft der Galilei'schen Discorsi mit den beiden ersten Tagen in der vortrefflichen Uebersetzung des Hrn. von Oettingen angezeigt werden konnte, so sind wir nun in den Stand gesetzt, die beendigte Uebersetzung in den beiden neuen Heften, den dritten

und vierten sowie den fünften und sechsten Tag umfassend, zu besprechen. Das Heft mit dem dritten und vierten Tage enthält eine der hervorragendsten Leistungen Galilei's, ein streng geordnetes System der Fallgesetze, von dem Lagrange gesagt hat, es gehöre ein ausserordentliches Genie dazu, diese beiden Tage zu verfassen; man werde dieselben nie genug bewundern können. Der Herausgeber bemerkt dazu, dass manche Aufgabe aus ihnen wert wäre, der Vergessenheit entzogen und in die Lehrbücher aufgenommen zu werden. Der Docent sowie der Schüler werde vielfach Gelegenheit finden, an ihrer Hand die Lehre vom Fall und von der Wurfbewegung zu vertiefen. Der Anhang zum dritten und vierten Tage, der fünfte und sechste Tag enthalten Schwerpunktsbestimmungen, Betrachtungen über Proportionen und die Stosswirkungen. „Der Leser wird manchen anregenden Gedanken sowohl im Anhange zum dritten und vierten, als auch besonders im sechsten Tage finden. Leider ist der letztere offenbar von Galilei nicht ganz vollendet worden. Der Vollständigkeit wegen haben wir auch den fünften Tag aufnehmen müssen, wenngleich derselbe kaum mehr als ein historisches Interesse beansprucht.“ Lp.

E. Strauss. Aus Galilei's Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme. Pr. (Nr. 401) Realsch. d. israel. Gem. Frankfurt a. M. 26 S. 4°.

Nach kurzen Vorbemerkungen über Entstehung und Bedeutung des Galilei'schen Dialogs werden diejenigen zwei Abschnitte desselben in Uebersetzung vorgelegt, welche sich beziehen auf die Bekämpfung des Autoritätsglaubens in der Wissenschaft und auf die Vereinbarkeit lotrechter Fallbewegung mit der Axendrehung der Erde. Dies Programm ist ein Teil der unterdess bei Teubner erschienenen Uebersetzung des ganzen Werkes. Tn.

G. Bellacchi. Galileo ed i suoi successori. Discorso letto nel R. Istituto Tecnico Galilei di Firenze il di XXIX Ottobre MDCCCLXXXXI. Firenze. Tip. Galletti e Cocci. 29 S.

A. FAVARO. Sopra una scrittura di inedita Giovanni Keplero intorno al sistema coppernicano. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII_2. 18-24.

In den litterarischen Kampf gegen Galilei war auch F. Ingoli aus Ravenna eingetreten (1615); während aber Galilei selbst diesem erst 8 Jahre später antworten konnte, erliess Kepler, dem im Juni 1617 ein Abzug jener Streitschrift zugekommen war, im Anfang 1618 eine Gegenschrift gegen Ingoli zu Gunsten der Kopernikanischen Lehre. Eine Abschrift dieser Gegenschrift aus alter Zeit hat Favaro wieder aufgefunden und in den Mem. del R. Istit. Ven. XXIV (vgl. oben S. 11, No. 6) zum Abdruck gebracht; hier bespricht er diese Schrift und beweist, dass Kepler in der That eine Gegenschrift erlassen habe, und dass die jetzt wieder aufgefundene genau die Kepler'sche sei. Tn.

P. FERMAT. Oeuvres de Fermat publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Tome premier. Oeuvres mathématiques diverses. — Observations sur Diophante. Paris. Gauthier-Villars et Fils. XXXVII + 440 S. 4°.

Peter Fermat (gest. 12. Jan. 1665) hat zu seinen Lebzeiten nur eine Abhandlung in den Druck gegeben: „De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica", aber auch diese nur anonym als Beigabe zu dem Werke Lalouvère's über die Cykloide, in welchem noch die Pars prior der Appendix secunda dem Fermat angehört. Schriftstücke, die von ihm herrühren, erschienen ferner spärlich in den Veröffentlichungen anderer Gelehrter, so bei Mersenne und in dem Commercium epistolicum von Wallis. Samuel Fermat, der Sohn Peter's, liess 1670 eine Folioausgabe des Diophant und in derselben die berühmten Randbemerkungen zur Zahlentheorie drucken, welche Peter Fermat in sein Exemplar, eine Ausgabe von Bachet, im Laufe der Zeit eingetragen hatte. Endlich veröffentlichte Samuel Fermat 1679 unter dem Titel „Varia opera mathematica D. Petri de Fermat, senatoris Tolosanae" die gesammelten Werke

seines Vaters, und diese Ausgabe ist 1861 bei Friedlaender und Sohn in Berlin in heliotypischem Verfahren reproducirt worden. Libri, welcher aus dem Nachlasse von Arbogast Fermat'sche Manuskripte erworben hatte, die noch nicht bekannt waren, wurde 1843 von der französischen Regierung mit der Veranstaltung einer neuen Ausgabe der Werke Fermat's betraut, liess auch durch Despeyrous Vorarbeiten dazu machen, entzog sich aber den übernommenen Verpflichtungen und entwich 1848 aus Paris unter Mitnahme vieler dem Staate gehörigen Manuskripte. Die Angelegenheit ruhte nun bis 1879, wo Hr. Ch. Henry im Bullettino des Fürsten Boncompagni seine Untersuchungen über die Manuskripte Fermat's veröffentlichte, eine Frucht seiner Studien in den Bibliotheken von Paris und anderswo. (Vergl. F. d. M. XI. 1879. 16.) Nach dem Erscheinen dieser Abhandlung, die zum Teil heftig bekämpft wurde, weil sie den Charakter Fermat's in ungünstigem Lichte erscheinen liess, konnte der Fürst Boncompagni Hrn. Henry 1881 benachrichtigen, dass er zwei Manuskriptbände aus dem Libri'schen Besitze erworben hätte. Die Frage, ob andere Papiere Libri's mit Fermat'schen Manuskripten in der Ashburnham - Sammlung wären, fand erst bei der Rückerwerbung des Libri'schen Vorrats aus jener Sammlung im Jahre 1888 ihre Erledigung, und nun war das Material zusammen, das zu einer neuen Ausgabe durchaus erforderlich schien. Die beiden Forscher, welche sich hierbei vereinigt haben, Hr. Paul Tannery für die Textkritik, Hr. Henry für die Sammlung und Vergleichung der Manuskripte, sind nach ihrem ganzen Bildungsgange die geeignetsten Männer für dieses Unternehmen, die volles Vertrauen und den besten Dank der mathematischen Welt verdienen. Nach ihrem Plane sollen drei Bände erscheinen; der erste enthält die vervollständigten Varia opera mathematica und die Bemerkungen zum Diophant; die beiden folgenden sollen den Briefwechsel Fermat's bringen, sowohl die von ihm geschriebenen als auch die empfangenen Briefe. Endlich soll ein Supplementband die Uebersetzungen der lateinischen Originale sowie Aeusserungen von Zeitgenossen Fermat's liefern, welche auf ihn Bezug nehmen.

Der erste Quartband, welcher in der bekannten schönen Ausstattung der Verlagshandlung vorliegt, ist mit einer getreuen Nachbildung des Stiches Fermat's und des Titelblattes in den Varia opera von 1679 geschmückt. Ausserdem ist S. XIX ein Facsimile der ersten Seite des Manuskripts Doctrinam tangentium etc. beigegeben, damit jeder in den Stand gesetzt werde, die Handschrift Fermat's mit alten Manuskripten oder Randbemerkungen in Büchern zu vergleichen und somit zur Auffindung neuer inedita beizutragen.

Der Vorbericht, welchem die vorstehenden Angaben entnommen sind, giebt über alle bezüglichen Verhältnisse genaue Auskunft. Im übrigen dürfte es nicht angemessen sein, auf den Inhalt der einzelnen Artikel hier näher einzugehen; wir beschränken uns daher auf einen einfachen Abdruck der Titel und fügen, wie in dem Bande, die Buchstaben *C*, *L*, *M*, *P* hinzu, um anzudeuten, dass die betreffenden, nicht in den Varia Opera enthaltenen Aufsätze aus den Briefen des Cartesius, der Abhandlung Lalouvère's über die Cykloide, den benutzten Manuskripten, den Werken Pascal's herstammen.

Erster Teil. Verschiedene mathematische Werke. Ebene Oerter des Apollonius: Apollonii Pergaei libri duo de locis planis restituti. Liber I, II.

Kugelberührungen: De contactis sphaericis.

Geometrische Bruchstücke: Solutio problematis a Domino Pascal propositi (*P*). — Porismata duo (*P*). — Porismatum Euclideorum renovata doctrina et sub forma Isagoges recentioribus Geometris exhibita. — Propositio D. de Fermat circa parabolen. — Loci ad tres lineas demonstratio (*M*).

Ebene und körperliche Oerter: Ad locos planos et solidos Isagoge. — Appendix ad Isagogen topicam, continens solutionem problematum solidorum per locos.

Oerter in einer Oberfläche: Isagoge ad locos ad superficiem, carissimo Domino de Carcavi (*M*).

Dreiteilige Abhandlung: De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas et unicuique problematum generi proprie convenientes, dissertatio tripartita.

Maxima und Minima: Methodus ad disquirendam maximam et minimam. De tangentibus linearum curvarum. — Centrum gravitatis parabolici conoidis, ex eadem methodo. — Ad eamdem methodum: Volo mea methodo etc. — Methodus de maxima et minima (*M*). — Ad methodum de maxima et minima appendix (*M*). — Ad eamdem methodum: Doctrinam tangentium etc. — Problema missum ad Reverendum Patrem Mersennum 10ª die Novembris 1642 (*M*). — Analysis ad refractiones (*C*). — Synthesis ad refractiones (*C*).

Eliminationsmethode: Novus secundarum et ulterioris ordinis radicum in Analyticis usus. — Appendix ad superiorem methodum.

Problem des Adrien Romain: Ad Adriani Romani problema Viro clarissimo Christiano Huggenio P. F. S. T. (*M*).

Fragen des Cavalieri: Ad Bon. Cavalieri quaestiones responsa (*M*).

Sätze für Lalouvère: Ad Laloveram propositiones (*L*).

Abhandlung M. P. E. A. S. De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione, dissertatio geometrica. — Appendix ad dissertationem de linearum curvarum cum lineis rectis comparatione.

Methoden zur Quadratur: De aequationum localium transmutatione et emendatione, ad multimodam curvilineorum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricae in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus. — De cissoide fragmentum (*M*).

Zweiter Teil. Anmerkungen zum Diophant (50 Seiten).

Anhang. Lp.

F. J. Studnička. Ioannes Marcus Marci a Cronland, sein Leben und gelehrtes Wirken. Festvortrag. Prag. Verlag der Kgl. Böhmischen Gesellsch. der Wissenschaften. 32 S. 8°.

Enthält manches schon Bekannte, aber auch manche neue Angaben über Leben und Wirken Marci's (1595—1667), den der Festredner „Böhmens Galilei“ nennt. Einer kurzen Geschichte seines Lebens folgt eine Aufzählung seiner 16 Schriften, die

von Philosophie, Geometrie, Physik, Astronomie und Medicin handeln. Eingehendere Behandlung erfahren seine richtigen Lehren vom Stoss und von der Pendelbewegung, beide aus dem Jahre 1639, und die bedenkliche Stellung von Huygens zu dem böhmischen Gelehrten. Tn.

P. Tannery. Les autographes de Descartes à la Bibliothèque nationale. Darboux Bull. (2) XV. 69-75, 111-120, 202-212, 228-236, 260-274, 281-296, 301-308; (2) XVI. 32-40.

Der erste Herausgeber der Briefe des Descartes, Clerselier, beklagt sich in der Vorrede zum dritten Bande (1667), dass Roberval nach dem Tode des Mersenne sich aller Briefe bemächtigt habe, die Descartes an diesen geschrieben hätte, so dass es unmöglich gewesen sei, die Fehler nach den Originalen der von Descartes aufbewahrten Entwürfe zu verbessern. Nach Roberval's Tode (1675) müssen diese Briefe an die Pariser Akademie gekommen und von La Hire benutzt sein. Zur Zeit jedoch, wo Cousin seine Ausgabe der Oeuvres de Descartes veranstaltete, war diese Thatsache nicht bekannt. Dagegen wusste Libri, wahrscheinlich zufolge einer Notiz von Arbogast, von jenen Briefen und entwandte sie mit vielen anderen Manuskripten 1884, als er Paris und Frankreich verliess. Von dem dadurch verschwundenen Schatze ist aus der Ashburnham-Sammlung etwa der vierte Teil wieder für die Nationalbibliothek zurückerworben worden; derselbe bildet das Manuskript No. 5160 der Neuerwerbungen und wird von Hrn. Tannery in einer Reihe von Artikeln eingehend besprochen. Er enthält im ganzen 23 Briefe, von denen 8 als bisher gar nicht, 1 als zum Teil nicht veröffentlicht bezeichnet werden. Nach einer vorhandenen Liste von Dom Poirier zur Zeit der ersten Revolution müssen in den Manuskripten der Briefsammlung des Descartes 20 unbekannte gewesen sein. Auf Grund einer genauen Prüfung aller vorhandenen Angaben kommt Hr. Tannery jedoch im zweiten Artikel zu dem Schlusse, dass nur 11 Briefe verloren gegangen sind. Die bisher nicht veröffentlichten Briefe des Descartes lässt der Herausgeber, soweit dieselben allgemeineres Interesse haben, wörtlich abdrucken und

begleitet sie mit Erläuterungen. Der erste Brief aus dem November 1629 ist besonders dadurch interessant, dass Descartes in demselben seine Ansichten über die Gesetze des freien Falls ausführlich entwickelt und zuletzt auch auf die Bewegung eines Pendels und einer schwingenden Saite eingeht. Das Trägheitsgesetz findet man sehr klar ausgesprochen. Unter den folgenden bisher nicht bekannten Briefen beantwortet der vom 26. April 1643 die dem Descartes vorgelegte Frage, welche in jetziger Fassung etwa so lauten würde: Ist die Bewegung eines Wurfgeschosses bloss durch die Anfangsbedingungen bestimmt? Auch eine Bemerkung über die Grössen, welche durch Gleichungen zu bestimmen sind, ist beachtenswert. Zum Verständnisse der weiteren noch nicht veröffentlichten Briefe lässt Hr. Tannery dann drei handschriftliche anonyme Schmähschriften gegen Descartes aus dem Manuskripte 5161 abdrucken; dieselben werden mit grösster Wahrscheinlichkeit dem Jean de Beaugrand, Verfasser einer Géostatique (1636) zugeschrieben; in ihnen werden besonders Einwürfe gegen die Geometrie des Descartes erhoben. Es folgt nun die Darstellung der Entstehung der Zwistigkeiten zwischen Roberval und Descartes über einen Satz des Pappus sowie über den Schwingungsmittelpunkt eines Pendels. Hierauf beziehen sich zwei von den bisher nicht bekannten Briefen des Descartes (7. Septbr. und 5. October 1646), in denen der Philosoph sehr ausfallend gegen seinen Gegner ist. Hinter der gleichfalls abgedruckten Erwiderung des Roberval, die an Charles Cavendish gerichtet ist, folgt ein unedirter Brief des Descartes vom 12. October 1646, in welchem dieser erklärt, dass er mit Roberval überhaupt keinen Verkehr mehr haben wolle. Als ihm jedoch der vorher erwähnte Brief des Roberval zugegangen war, antwortete er am 2. Novbr. 1646 in einem bisher nicht bekannten und nun veröffentlichten Briefe. Zuletzt erzählt Hr. Tannery den Ausgang des Streites zwischen den beiden Gelehrten des siebzehnten Jahrhunderts. Nach dem Tode Mersenne's, der die Rolle eines ungeschickten Zwischenträgers gespielt hatte, versuchte Roberval durch die Vermittelung des Carcavi eine Aussöhnung, ohne sie aber zu erreichen. Lp.

Ch. Huygens. Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la société hollandaise des sciences. IV. La Haye. Martinus Nijhoff. 520 S. 4°.

Der vierte Band enthält den Briefwechsel aus den Jahren 1662-1663, mit den Nummern 948 bis 1197 versehen; die hauptsächlichsten Correspondenten sind de Fermat, Moray, Hevelius, Heinsius, Thevenot, Brouncker, Petit, Bouilliau, de Sluse, de Monmor, Bruce, J. de Witt, Lodewijk und Constantijn Huygens. Im Anhang findet man noch Briefe von Boyle, Hooke, Leopoldo de Medicis. Auch in diesem Bande sind die verschiedensten Gegenstände behandelt: Maxima und Minima, Auflösung von Gleichungen mittels Construction, die Cissoide, Konchoide, Isochronismus der Cykloide, Inhaltsbestimmungen von ebenen Figuren und von Rotationsflächen, die Gesetze der Bewegung des Pendels, die Pendeluhr, das Campani'sche und das Huygens'sche Ocular, der Mond, der Ring des Saturnus, u. s. w. Wie gewöhnlich finden sich am Schluss des Bandes alphabetische Personen- und Sachregister. Mo.

C. Le Paige. Un astronome belge du 17e siècle: Godefroid Wendelin. Mathesis (2) I. Suppl. II.

Aus Belg. Bull. (3) XX. 709-727 (F. d. M. XXII. 1890. 17). Mn.

K. J. Gerhardt. Leibniz in London. Berl. Ber. 1891. 157-176.

Leibniz war von Paris aus zweimal in London (1673 und 1676): aus seinen Aufzeichnungen, die er sich dort machte, werden hier drei auf Mathematik bezügliche im Auszug mitgeteilt. Aus der dritten gehe hervor, dass Leibniz während seines zweiten Aufenthaltes in London hinsichtlich der Infinitesimalrechnung nichts gewonnen habe. Tn.

K. J. Gerhardt. Leibniz über die Determinanten. Berl. Ber. 1891. 407-423.

Enthält ausser der orientirenden Einleitung vier bis jetzt

ungedruckte Aufsätze von Leibniz. Der erste berichtet von seinen mathematischen Studien in Paris (1678), insbesondere von denen über die allgemeine Auflösung der Gleichungen; die drei anderen behandeln den von ihm erfundenen Canon pro tollendis incognitis, d. h. die Determinanten, über welche Leibniz selbst nichts veröffentlicht hat. Diese Aufsätze sind auch wegen ihrer Benutzung von Zahlensymbolen anstatt der Buchstaben bemerkenswert. Tn.

K. J. Gerhardt. Leibniz und Pascal. Berl. Ber. 1891. 1053-1068.

Dieser Aufsatz, in Verbindung mit dem über „Leibniz in London", erstrebt den Nachweis, dass „irgend welche Einwirkung von aussen auf Leibniz in Betreff der Einführung des Algorithmus der höheren Analysis ausgeschlossen ist", „dass Leibniz speciell durch das Studium der Schriften Pascal's auf die Erfindung dieses Algorithmus geführt wurde" (nicht von Cavalieri's Methode aus). Als Beweisstücke werden mitgeteilt 1) ein bisher ungedrucktes Stück eines Briefes an Tschirnhaus aus 1679, 2) ein eben solches an de l'Hospital aus 1694, 3) der Anfang einer Aufzeichnung von Leibniz, vermutlich aus dem Jahre 1673. Tn.

J. H. Graf. Das Leben und Wirken des Physikers und Geodäten Jacques Barthélemy Micheli du Crest aus Genf, Staatsgefangener des alten Bern von 1746 bis 1766. Aktenmässig dargestellt. Bern. Wyss. 211 S. mit Bildnis, Ansicht und Panorama. 8°. (Sonderdr.)

Benjamin Franklin. Nature XLIII. 39-40.

Bericht über die zum Andenken an den hundertjährigen Todestag Franklin's (17. April 1790) in Philadelphia veranstaltete Feier. Lp.

Laplace. Oeuvres complètes de Laplace. Tome VIII. Mémoires extraits des recueils de l'Académie des sciences. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Herausgegeben von K. Weierstrass. Bd. VI u. VII. Berlin. Georg Reimer. VIII u. 433, VIII u. 440 S. 4°.

Mit diesen beiden Schlussbänden ist nun die neue Ausgabe der Jacobi'schen Werke zu Ende geführt, und nächst dem Herausgeber Herrn Weierstrass ist für die schnelle und sorgfältige Bearbeitung Herrn Hettner zu danken, der seinem bejahrten Lehrer und Freunde mit voller Thatkraft zur Seite gestanden hat, ebenso Herrn Wangerin, der, wie in den früheren Bänden, seines Amtes als Corrector gewissenhaft gewaltet hat. Ausser diesen beiden Gelehrten sind noch die Herren G. Cantor, Mertens, Netto, Thomé für den VI. Band, Bruns, Kortum, E. Schering, Stickelberger, Tietjen für den VII. Band an der Durchsicht der einzelnen Abhandlungen beteiligt gewesen.

Die erste Abteilung des VI. Bandes enthält die Abhandlungen Jacobi's zur Theorie der bestimmten Integrale und der Reihen, soweit nicht in ihnen algebraische Untersuchungen den hauptsächlichen Inhalt bilden und sie deshalb schon in den dritten Band aufgenommen sind. In der zweiten Abteilung finden sich die zahlentheoretischen Abhandlungen Jacobi's vereinigt. Die hierher gehörigen nachgelassenen Abhandlungen Jacobi's, welche aber sämtlich bereits im Journal für Mathematik veröffentlicht waren, stehen am Schlusse der betreffenden Abteilungen. Ein Neudruck des 1839 von Jacobi herausgegebenen Canon arithmeticus erschien gegenwärtig nicht erforderlich, da noch eine hinlängliche Anzahl von Exemplaren desselben vorhanden ist.

Der VII. Band enthält die geometrischen und astronomischen Abhandlungen, ferner Aufsätze verschiedenen, meist historischen Inhalts, und ausserdem Briefe Jacobi's an Bessel und an Gauss. Als Anhang ist ein chronologisches Verzeichnis sämtlicher Abhandlungen Jacobi's beigefügt, welches Hr. Hettner zusammengestellt hat, und das zugleich als Gesamtregister für alle sieben

Bände dienen kann. Von den aus Jacobi's Nachlass heraus gegebenen Arbeiten sind die dreizehn zuletzt angeführten, sowi die Briefe Jacobi's an Bessel und Gauss, zum ersten Male i dieser Ausgabe von Jacobi's Werken veröffentlicht. Die Anmer kungen, welche beiden Bänden am Schlusse beigegeben sind rühren von Hrn. Hettner her, der ja die Lasten der Arbeit in vollem Umfange getragen hat.

Wenn nun über die glückliche Beendigung der schönen Ausgabe der Gesammelten Werke Jacobi's, die Borchardt begonnen, Weierstrass unter Beihülfe jüngerer Freunde durchgeführt hat, der Freude Ausdruck gegeben werden darf, so ist es vielleicht auch gestattet, den Wunsch hinzuzufügen, dass dem einen Supplementbande der Dynamik noch andere folgen möchten, wie das ursprünglich geplant war, und wozu in den Nachschriften der Jacobi'schen Vorlesungen, besonders über die elliptischen Functionen, Stoff vorhanden ist. Lp.

A. Cauchy. Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy publiées sous la direction scientifique de l'Académie des sciences et sous les auspices de M. le ministre de l'instruction publique. (2) IX. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 452 S. 4°.

Anzeige in F. d. M. XXI. 1889. 12.

W. v. Zahn. Hermann Hankel. Böklen Mitt. IV. 1-11.

Abdruck aus Math. Ann. VII (F. d. M. VI. 1874. 31), vervollständigt durch einige Litteraturangaben nach der Uebersetzung in Boncompagni Bull. IX. 1876. Lp.

S. Ferrari. Ricordo del P. Angelo Secchi in occasione dell'erezione del busto marmoreo alla sua memoria nel palazzo della cancelleria apostolica. Rom. Acc. P. d. N. L. XLIV. 240-245.

Eine Festrede zum Preise der Vereinigung von Glauben

und Wissenschaft, Frömmigkeit und Arbeit in Secchi, bei Gelegenheit der Enthüllung seiner Büste. Lp.

Dewar. The scientific work of Joule. Nature XLIII. 111-113.

Auszug aus einer Freitag-Abend Vorlesung in Royal Institution. Lp.

J. E. Kuntze. Gustav Theodor Fechner (Dr. Mises). Ein deutsches Gelehrtenleben. Leipzig. Breitkopf und Härtel. XI + 372 S. mit 3 Bildn. gr. 8°.

G. Kirchhoff. Gesammelte Abhandlungen. Nachtrag. Herausgegeben von L. Boltzmann. Leipzig. J. A. Barth. VII u. 137 S. 8°.

In dem vorliegenden Nachtrag zu den 1882 erschienenen gesammelten Abhandlungen Kirchhoff's sind acht von Kirchhoff in den Jahren 1880-1885 veröffentlichte Arbeiten nebst einer Arbeit von G. Hansemann wiederabgedruckt. Die erste Abhandlung [Ueber die Leitungsfähigkeiten der Metalle für Wärme und Elektricität, von Kirchhoff und Hansemann] ist, ebenso wie die erwähnte Hansemann'sche Arbeit [Ueber die Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand], rein experimentellen Inhalts. Ueber die übrigen Aufsätze ist seinerzeit in den Bänden XII (1880) sowie XIV-XVII (1882-1885) des Jahrbuchs ausführlich berichtet. Referent glaubt daher von einer nochmaligen Besprechung des Inhalts absehen zu sollen und begnügt sich die Worte wiederzugeben, mit denen der Herausgeber den Nachtrag einleitet.

„Eines der Hauptziele, welche Kirchhoff in seinen Abhandlungen und Vorlesungen anstrebte, war der Aufbau der theoretischen Physik auf möglichst klaren Principien und die Ausbildung und Vollendung ihrer Methoden. Durch jahrelange Arbeit gelang es ihm, diese so durchzubilden, dass er ein Instrument gewann, welches nach fest ausgebildeten Regeln arbei-

tete und immer in der einfachsten und sichersten Weise zur Lösung der Aufgabe führte. Gerade zur Erläuterung der Treffsicherheit und der Art und Weise der Behandlung dieses Instruments sind die nachfolgenden Abhandlungen besonders geeignet. In vielen derselben zeigte er, wie von anderen gefundene Resultate mittelst desselben teils in weit einfacherer und eleganterer Form gewonnen, teils wesentlich ergänzt und erweitert werden können, wobei zugleich ihre Beziehungen zu den übrigen Teilen der theoretischen Physik in's klarste Licht gesetzt werden."

„Dabei tritt allenthalben neben dem Sinne für mathematische Consequenz der scharfe Blick Kirchhoff's für physikalische Verwertbarkeit hervor, welche durch die wenigen, der Vollständigkeit halber hier ebenfalls aufgenommenen Versuche Hansemann's noch lange nicht erschöpft und ausgenutzt sein dürfte."

Wn.

H. A. Newton. A memoir on Elias Loomis. Smithsonian Rep. (1890). 741-770.

Elias Loomis, geb. 7. Aug. 1811 zu Willington in Connecticut, gebildet auf dem Yale College, studirte nach wiederholtem Berufswechsel 1836-37 in Paris, richtete sich ein Observatorium in Hudson ein, wo er bis 1844 blieb, wurde Professor für Mathematik und Physik an der Universität zu New York bis 1860 mit einer einjährigen Unterbrechung in Princeton; von da bis zu seinem Tode, 15. Aug. 1889, war er Professor am Yale College zu New Haven. Am Schlusse der mit vieler Wärme geschriebenen Lebensskizze steht eine chronologische Liste seiner Schriften astronomischen, physikalischen, mathematischen und meteorologischen Inhalts in 164 Nummern. Lp.

G. Loria. Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati. Palermo Rend. V. 236-251.

Hr. Loria zeichnet den Lebensgang von Casorati (1835-1890), weiter sein Wirken als Lehrer, Forscher und Schriftsteller und hebt dann einige seiner Hauptleistungen besonders hervor, so

vornehmlich die betreffs der vielfachperiodischen Functionen und betreffs des Krümmungsmasses der Flächen; den Schluss macht eine nach der Zeitfolge geordnete Aufzählung von Casorati's (51) Arbeiten. Tn.

G. Loria. Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati. Bibl. Math. (2) V. 1-12.

Felice Casorati, geboren zu Pavia den 17. December 1835, wurde 1859 ausserordentlicher und 1861 ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität seiner Geburtsstadt; er starb daselbst den 11. September 1890. Herr Loria giebt Auskunft über die wichtigsten Arbeiten Casorati's und verzeichnet 48 seiner Schriften, deren Mehrzahl in den „Annali di Matematica" und den „Rendiconti dell'Istituto Lombardo di scienze e lettere" erschienen sind. Die Untersuchungen Casorati's beziehen sich vorzugsweise auf die Functionentheorie, den Calcul der endlichen Differenzen und die analytische Theorie der Oberflächen. Durch seine, leider unvollendete, „Teoria delle funzioni di variabili complesse" hat er das Studium der Functionentheorie wesentlich gefördert; auch als Lehrer übte er einen grossen Einfluss.

E.

Z. G. de Galdeano. Felice Casorati. Progreso mat. I. 22-24.

G. Eneström. Gumersindo Vicuña (1840-1890). Bibl. Math. (2) V. 33-34.

Vicuña wurde 1840 in Habana geboren und starb 1890 als Professor der mathematischen Physik an der Universität zu Madrid. Er hat verschiedene Schriften physikalisch-historischen Inhalts herausgegeben. E.

A. Capelli. Commemorazione di Raffaele Rubini. Atti dell' Accademia Pontaniana. XXI. 275-281, auch sep. Napoli, Tip. della R. Univ. 9 S. 4°.

R. Rubini wurde in Brindisi den 20. October 1817 geboren

und starb in derselben Stadt den 13. Mai 1890. Er studirte die höhere Mathematik in Neapel unter der Leitung von F. Padula und erlangte 1844 die Doctorwürde. Bald nachher begann er seinen Unterricht, zuerst in dem Collegio della Nunziatella in Neapel, dann (1848) in dem Lyceum von Lecce. Diese Lehrstühle verlor er seiner politischen Meinungen wegen, und erst 1859 durfte er in den öffentlichen Unterricht wieder eintreten. In diesem Jahre finden wir unseren Mathematiker als Professor der theoretischen Mechanik an der Marineschule, und 1861 erhielt er denselben Lehrstuhl an der Universität von Neapel; bald nachher wurde er Professor der höheren Algebra an der genannten Hochschule, in welcher Stellung er bis 1886 verblieb.

Er veröffentlichte die folgenden Lehrbücher: „Trattato di Geometria analitica", „Elementi" und „Complementi di Calcolo infinitesimale", „Complementi d'Algebra", „Teoria delle forme algebriche", von denen einige ins Spanische übersetzt und im öffentlichen Unterrichte benutzt wurden. Napoli Rend., Batt. G. und Tortolini Annali enthalten ferner einige seiner Abhandlungen.

La.

Anna C. Leffler. Sonja Kovalevsky. Annali di Mat. (2) XIX. 201-211.

Ein warm geschriebener Aufsatz zum Gedächtnis der zu früh Verstorbenen (1850-1891), die aufs neue gezeigt, dass auch das Weib in abstracter Wissenschaft Hervorragendes zu leisten vermöge. Ihr Werden, ihr herbes Schicksal, ihre Arbeiten auf mathematischem und litterarischem Gebiete werden in Kürze dargelegt, ihr eigenartiges Wesen wird fein gezeichnet.

Tn.

C. A. Bjerknes. Fru Kowalevski og hendes Fortjenester af Videnskaben. Oversigt af Videnskaps-Selskabets Möder i 1891. Christiania. 7-20.

Eine Gedächtnisrede auf Frau Kowalevski, welche sich besonders ausführlich mit der Bedeutung ihrer Arbeit „Ueber die Brechung des Lichtes in krystallinischen Mitteln" beschäftigt.

Bdn.

A. G. STOLETOW, N. E. JOUKOWSKY und P. A. NEKRASSOW. S. W. Kowalewsky. Mosk. Math. Samml. XVI. 1-38.

Diese Schrift enthält eine Lebensskizze (geschrieben von A. G. Stoletow) und eine Uebersicht der wissenschaftlichen Leistungen der Frau S. W. Kowalewsky (geboren 1850, gestorben 29. Jan. a. St. 1891) auf dem Gebiete der angewandten Mathematik (von N. E. Joukowsky) und der reinen Mathematik (von P. A. Nekrassow). Wi.

L. KRONECKER. Sophie von Kowalevsky. J. für Math. CVIII. 88.

Giebt einen ganz kurzen Lebensabriss der Forscherin und rühmt dann ihr ausserordentliches Talent, ihren grossen Fleiss, ihren offenen Sinn für geistige Interessen überhaupt. Beigegeben ist eine Liste ihrer mathematischen Leistungen. Tn.

Mme E. DE KERBEDZ. Sophie de Kowalevski. Palermo Rend. V. 121-128, und: Darboux Bull. (2) XV. 212-220.

Giebt eine kurze Skizze des Lebensganges (1850-1891), einen Auszug aus zwei Urteilen der Pariser Akademie über ihre preisgekrönten Arbeiten, endlich eine Aufzählung ihrer (10) mathematischen und (6) litterarischen Arbeiten. Tn.

E. NOVARESE. Sofia Kowalevski. Riv. di Mat. I. 21-22.

Z. G. DE GALDEANO. Sofia de Kowalevski. Progreso mat. I. 88-90.

E. RIECKE. Wilhelm Weber. Göttingen (1892). Dieterich. 44 S. 4°.

Diese Gedächtnisrede auf den berühmten Physiker (1804-91) wurde in öffentlicher Sitzung der Göttinger Akademie gehalten, welcher Weber durch 6 Jahrzehnte angehört hatte. Sie behandelt kurz die Hauptzüge seines Lebens, ausführlicher seine wissenschaftlichen Leistungen. Seine Wellenlehre, seine Mechanik der Gehwerkzeuge, seine Verdienste um die Einrichtung des ersten Telegraphen, dann besonders seine bahnbrechenden Leistungen im Gebiete der Elektrodynamik finden ihre Würdigung. Im Anschlusse an die Besprechung der elektrodynamischen Mass-

bestimmungen, deren theoretische und praktische Wichtigkeit dargelegt wird, geht der Vortragende ein auf die Bedeutung der sogenannten Constanten des Weber'schen Gesetzes und auf die relativ begrenzte Gültigkeit des letzteren; eine Beleuchtung des Gesetzes vom Standpunkte der neuesten Entwickelung der Physik, insbesondere eine Betrachtung über Fernwirkung und Molekularhypothese machen den Schluss. Tn.

MASCART. Notice sur Wilhelm Weber. C. R. CXIII. 105-109.

Eine kurze, aber sehr anerkennende Würdigung der hohen Verdienste Weber's, besonders seiner „Elektrodynamischen Maassbestimmungen", überhaupt seiner eindringend genauen Arbeiten. Tn.

G. BASSO. In commemorazione di Guglielmo Weber. Torino Atti. XXVII. 4-13.

Bericht über Leben, Werke und Bedeutung des grossen deutschen Physikers (24. Oct. 1804-23. Juni 1891). Tn.

G. C. F. Wilhelm Eduard Weber†. Nature XLIV. 229-230, 272.

John Couch Adams†. Nature XLIV. 565, XLV. 301.

Geboren 5. Juni 1819 zu Lidcot bei Launceston in Cornwall, „Senior wrangler" zu Cambridge 1843, zum Lowndean Professor der Astronomie und Geometrie in Cambridge berufen 1859, gest. 21. Januar 1892. Gbs. (Lp.)

M. LÉVY. Note sur les travaux de Pierre-Prosper Boileau. C. R. CXIII. 409-412.

Boileau (1811-1891) war Schüler von Poncelet und kam so zur Beschäftigung mit Hydraulik, die ihm vielfache praktische Messungen und Formeln und theoretische Arbeiten verdankt. Hervorgehoben werden seine Ergebnisse über den Ort grösster Geschwindigkeit in strömendem Wasser und über innere Reibung von Flüssigkeiten. Tn.

E. GOODFELLOW. Charles Otis Boutelle. Washington Bull. XI. 467-470.

Ch. O. Boutelle, Geodät, geb. 4. Aug. 1813 zu Lexington, Massachusetts, gest. 22. Juni 1890 zu Hampton, Virginia.

Lp.

Francis Brünnow †. Nature XLIV. 449-450.

W. Ferrel †. Nature XLIV. 527-528.

William Ferrel geb. 29. Jan. 1817, gest. 1891. (Meteorologe.)

John Casey †. Lond. R. S. Proc. XLIX, Lond. M. S. Proc. XXII.

Geboren zu Kilberny, Cork, im Mai 1820, fast gänzlich Autodidakt in der Mathematik, bis er 1858 in das Trinity-College eintrat, 1883 als Professor der höheren Mathematik an der katholischen Universität von Irland berufen, gest. 3. Jan. 1891.

Gbs. (Lp.)

Obituary notices. Lond. M. S. Proc. XXII. 476-481.

John Casey, geb. Mai 1820, zuerst Elementarlehrer und Autodidakt, 1858—62 Schüler des Trinity-College, 1883 Professor der höheren Mathematik an der katholischen Universität, gest. 3. Jan. 1891 zu Dublin.

Robert Nicholas Fowler, geb. 14. Septbr. 1828, gest. 22. Mai 1891.

Henry Martyn Jeffery, geb. 5. Jan. 1826, Schüler des St. John's College zu Cambridge, Lehrer und später Vorsteher (headmaster) der Grammar School zu Cheltenham, gest. 3. Novbr. 1891.

William Joseph Curran Sharp aus dem Trinity-College zu Dublin.

Lp.

P. MANSION. Le R. P. Delsaux. Brux. S. sc. XV A. 86-91, Rev. d. qu. sc. XXIX. 585-588.

Delsaux, geb. zu Brüssel am 27. Mai 1828, gest. zu Namur am 26. Februar 1891, hat eine grosse Anzahl von Arbeiten aus der mathematischen Physik veröffentlicht, deren Liste hier gegeben wird; drei grössere Werke: Capillarität (1865), geometrische Optik (1866), theoretische Optik (1868); endlich eine kritische Studie: Les derniers écrits philosophiques de Tyndall (Paris. Baltenweck. 1877). Mn. (Lp.)

W. Harkness. Ezekiel Brown Elliott. Washington Bull. XI. 470 - 473.

Der Statistiker Elliott (nicht zu verwechseln mit Edwin Bayley Elliott in Oxford), geb. 16. Juli 1823 im Dorfe Sweden, Monroe county, New-York, gest. 24. Mai 1888 in Washington. Lp.

A. R. Emile Gautier†. Nature XLIII. 518-519.

Geb. 18. April 1822 in Genf, gest. ebenda 24./25. Febr. 1891 als Director der Sternwarte. Lp.

J. Bertrand. Notice sur le général Ibañez. C. R. CXII. 266-269.

In scharfen Umrissen wird hier die Lebensarbeit des grossen spanischen Geodäten (1824-1891) gezeichnet, wie er zuerst mit Saavedra die bekannte Basismessung durchführte, dann seit 1866 allein das spanische geographische und statistische Institut schuf, wie er die Balearen und (mit Perrier) Algier an das Festland anschloss, wie er überhaupt sein weitausschauendes wissenschaftliches und praktisches Programm durchführte, insbesondere sich um die europäische Gradmessung und in der Metercommission verdient machte. Tn.

Z. G. de Galdeano. El general Ibañez. Progreso mat. I. 25 - 26.

James Thomson†. Lond. R. S. Proc. LIII.

Geboren zu Belfast 16. Febr. 1822, Professor für Ingenieur-

Wissenschaften zu Belfast von 1857 bis 1872, zu Glasgow von 1872 bis 1889, gest. 8. Mai 1892. Gbs. (Lp.)

C. O. Boutelle. Henry Francis Walling. Washington Bull. XI. 492-496.

Der Geodät Walling, geb. 11. Juni 1825 in Burrillvill, R. J., gest. 1889. Lp.

Nekrologe. Monatsh. f. Math. II. 479-480.

Adolf Ameseder, geb. 25. Mai 1858 in Zuberbach im Eisenburger Comitate, Privatdocent in Wien 1884, Professor an der technischen Hochschule zu Graz 1886, gest. 17. Jan. 1891.

Rudolf Staudigl, geb. 14. Novbr. 1838, 1866 Docent für Zeichnen am Wiener Polytechnikum, 1867 Adjunct und 1868 Privatdocent daselbst, 1869 ausserordentlicher und 1875 ordentlicher Professor für darstellende Geometrie, gest. 22. Febr. 1891.

Josef Petzval, geb. 6. Jan. oder 2. Mai 1807, Professor an der Wiener Universität von 1849 bis 1877, gest. 17. Septbr. 1891. Lp.

Weidenmüller. Professor Wilhelm Gies. Nekrolog. Hoffmann Z. XXII. 236-238.

Gest. 12. Febr. 1891 im 78. Lebensjahre zu Fulda, früher Gymnasiallehrer daselbst bis 9 Jahre vor seinem Tode. Lp.

Oberlehrer Professor Dr. Auth, Kassel †. Hoffmann Z. XXII.

Geb. 1. Oct. 1827 zu Fulda, gest. 23. Decbr. 1890 zu Kassel. Lp.

Künstler. Zum Andenken an Dr. Kober. Hoffmann Z. XXII. 148-153.

Julius Kober, geb. 15. Juli 1828 zu Gross-Sara in Sachsen-Altenburg, Lehrer am Krause'schen Institut in Dresden bis 1872,

an der Fürstenschule in Grimma bis 1875, Director der Realschule zu Grossenhain bis zu seinem Tode 11. Jan. 1890.

Lp.

G. Schubring. Nachruf für Director Dr. Koch in Erfurt. Hoffmann Z. XXII. 683-635.

C. E. Koch, geb. zu Ditfurt bei Quedlinburg 21. Oct. 1812, Director des Realgymnasiums in Erfurt von 1844-85, gest. 27. Septbr. 1891; schriftstellerisch als Meteorologe thätig.

Lp.

A. Thaer. Friedrich Kruse. Hoffmann Z. XXII. 468-470.

Geb. 12. Mai 1824 zu Friedewalde, Regierungsbezirk Minden, Professor am Wilhelms-Gymnasium zu Berlin, gest. 12. Decbr. 1890.

Lp.

O. Schieck. Zur Erinnerung an Ludwig Kunze. Hoffmann Z. XXII. 314-316.

Karl Ludwig Albrecht Kunze, geb. zu Jever 26. Juli 1805, Professor am Gymnasium zu Weimar von 1828-1875, gest. 15. Juli 1890; Verfasser eines Lehrbuchs der Planimetrie und mehrerer Gelegenheitsschriften.

Lp.

Ansprachen und Reden gehalten bei der am 2. November 1891 zu Ehren von Hermann von Helmholtz veranstalteten Feier. Berlin. Hirschwald'sche Buchhdl. 63 S. gr. 8°.

„Am 31. Aug. 1891 vollendete Hermann von Helmholtz sein siebzigstes Lebensjahr. Da der Jubilar diesen Tag in stiller Zurückgezogenheit im Gebirge verlebte, so wurde mit seiner Genehmigung am 2. Novbr., an welchem Tage er vor 49 Jahren zum Doctor medicinae promovirte, in seinem Hause zu Charlottenburg eine Feier veranstaltet, in welcher die verschiedenen Behörden, Corporationen, Freunde und Schüler ihre Glückwünsche persönlich zum Ausdruck brachten. Am Abend desselben Tages fand ein Festessen im Hôtel „Der Kaiserhof“ statt.“ Lp.

VENTURA REYES Y PROSPER. Cristina Ladd Franklin matemática americana y su influencia en la lógica simbólica. Progreso mat. I. 297-300.

GEORGE WINSLOW PIERCE. The life romance of an algebraist. Boston. J. G. Cupples. XXI + 167 S. 8°.

Ein mit dem Bildnisse des Verfassers ausgestattetes Buch, das in amerikanischer Art nur den Zweck verfolgt, die Aufmerksamkeit der Welt auf den Verfasser zu ziehen, das aber von Mathematik recht wenig, von vielen anderen Dingen, wie Gedichte, Träumereien u. s. w., sehr viel enthält. Lp.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

W. W. ROUSE BALL. Mathematical recreations and problems of past and present times. Macmillan and Co. XII u. 240 S. [New York M. S. Bull. II. 37-46.]

Dieses Buch enthält in gedrängter Form einen Bericht über manche Aufgaben und Ueberlegungen mathematischer Art, an denen der Scharfsinn vieler Generationen sich geübt hat, und jedermann, der nur ein wenig Interesse an mathematischer Denkweise besitzt, wird in ihm eine Fülle angenehmer Unterhaltung finden. Es zerfällt in zwei Teile, betitelt: „Mathematische Ergötzlichkeiten" und „Mathematische Aufgaben und Ueberlegungen". Der erste Teil besteht aus sieben Capiteln. Die ersten drei beschäftigen sich beziehungsweise mit arithmetischen, geometrischen und mechanischen Aufgaben, wogegen das vierte verschiedene Fragen behandelt, wie die lustige 15, den Turm von Hanoï, chinesische Ringe, das Problem der acht Königinnen, die Aufgabe von den 15 Schulmädchen und Aufgaben mit einem Pakete Spielkarten. Magische Quadrate bilden den Gegenstand von Capitel V und einläufige Aufgaben den der Capitel VI und VII; hierher gehörig: das Euler'sche Problem, Irrwege, geometrische

Bäume und das Hamilton'sche Spiel. Capitel VIII beginnt den zweiten Teil des Buches und erörtert die drei Probleme der Verdoppelung des Würfels, der Dreiteilung eines Winkels und der Quadratur des Kreises. Die Gegenstände der übrigen Capitel sind Astrologie, Hyperräume, Zeit und ihr Mass, die Zusammensetzung der Materie. Die späteren Capitel des Buches leiden zu sehr an übermässiger Gedrängtheit. Gbs. (Lp.)

A. W. Wassiliew. Aus der Geschichte und Philosophie des Begriffes der ganzen positiven Zahl. Kasan Ges. (2) I. 1-21.

Diese Rede, bei der Eröffnung der physiko-mathematischen Gesellschaft zu Kasan gehalten, enthält eine Zusammenstellung der geschichtlichen Resultate über die allmähliche Entwickelung des Zahlbegriffs, mit den Ansichten Helmholtz's über die Arithmetik in seiner Abhandlung: „Zählen und Messen". Wi.

H. B. Fine. The number-system of algebra, treated theoretically and historically. Boston and New York. Leach, Shewell & Sanborn. IX + 131 S. 8°. [New York M. S. Bull. I. 26; Bibl. Math. (2) V.] Vergl. S. 61.

G. Loria. Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. Riv. di Mat. I. 185-248.

Hr. Loria bietet hier, als Ergebnis mehr als fünfjähriger Studien, eine der Zeitfolge nach geordnete übersichtliche Darlegung des Gedankenganges der bis jetzt versuchten und geführten Beweise für den Grundlehrsatz der Theorie der Gleichungen; er giebt weiter eine bibliographische Nachweisung der Fundstellen dieser 71 Beweise (seit 1746 bis 1891) und entscheidet sich schliesslich bei der Frage, welcher dieser Beweise im Unterrichte zu bevorzugen sei, für deren zwei, für den von Legendre (1806) und den von Cauchy (1837). Tn.

G. Loria. Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche. Bibl. Math. (2) V. 99-112.

Dieser Aufsatz enthält eine Umarbeitung und teilweise eine Erweiterung der Note: „Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche“, welche in der „Rivista di matematica“ I. 185-248 erschienen ist (siehe das vorangehende Referat). Herr Loria verzeichnet hier 80 verschiedene Schriften über das Fundamentaltheorem der Theorie der Gleichungen. E.

Fr. Meyer. Bericht über die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert. Naturf. Ges. Halle. LXIV. 5-7.

Auszug aus dem im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung I erschienenen vollständigen Vortrag; Bericht im nächsten Jahrgange. Lp.

W. Adam. Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts. Zum Gebrauch an gehobenen und höheren Lehranstalten, sowie auch bei der Vorbereitung auf die Mittelschullehrer- und Rectoratsprüfung bearbeitet. Quedlinburg. Vieweg's Buchh. VIII + 182 S. gr. 8°.

F. Cajori. The study of Diophantine analysis in the United States. Colorado Studies II. 39-47.

Giebt Namen und kurze Kennzeichnung der Leistungen derjenigen Männer, welche sich seit 1804 in den Vereinigten Staaten mit unbestimmter Analytik beschäftigt haben; wünscht eine lebhaftere Förderung dieses Zweiges der Wissenschaft. Tn.

A. Matrot. Sur le théorème de Bachet (aperçu historique). Assoc. Franç. Marseille XX. 185-191.

Der Satz, dass jede ganze Zahl die Summe von höchstens

vier Quadraten ist, wurde zuerst von Bachet in seinem Commentar zu Diophant's Arithmetik ausgesprochen, von Fermat gemäss einer Randnote zu Diophant bewiesen und verallgemeinert, ohne dass dieser Beweis auf uns gekommen ist. Darauf hat Euler sich um den ausstehenden Beweis ohne directen Erfolg bemüht; hiernach hat Lagrange, unabhängig von Euler, eine strenge Herleitung gegeben. Endlich (1772) ist denn auch Euler der Beweis gelungen, und Hr. Matrot hat diesen Euler'schen Beweis in einer Mitteilung an die Assoc. Franç. 1890 (F. d. M. XXII. 211) bedeutend vereinfacht, sodass jetzt nur noch elementare Sätze benutzt werden. (Vergl. diesen Band, Abschnitt III, Cap. 2 A.) Lp.

Berson. Sur l'emploi des figures géométriques par les Japonais pour la résolution des problèmes d'arithmétique. Toulouse Mém. (9) III. 268-271.

Vor der Einwanderung der Europäer in Japan verwandten vielfach die Japanesen geometrische Versinnlichungen zur Lösung von Rechenaufgaben. Bei letzteren unterschieden sie drei Arten: die unserer Regeldetri entsprechenden, die Teilungsaufgaben bei gegebenem Verhältnis und die Ueberschuss- und Abmangel-Aufgaben. Von jeder dieser Arten löst der Vf. eine nach japanischer Art. Tn.

E. Picard. Revue annuelle d'analyse. Palermo Rend. V. 80-90.

Abdruck aus Revue générale des sciences pures et appliquées. Lp.

G. Vivanti. Sur une classe de grandeurs infiniment petites considérée par Newton. Bibl. Math. (2) V. 97-98.

Herr Vivanti lenkt die Aufmerksamkeit auf eine Stelle in den Principia, wo Newton eine Reihe von Winkeln behandelt, von denen jeder folgende unendlich klein im Vergleich mit dem vorangehenden ist. E.

G. Eneström. Note historique sur les symboles qui servent à désigner des fonctions quelconques de variables données. Bibl. Math. (2) V. 89-90.

Es wird bemerkt, dass die Einführung der allgemeinen Functionszeichen von Johann Bernoulli herrührt, dass aber besondere Zeichen für Functionen mehrerer Variabeln erst von d'Alembert und Euler angewandt worden sind. E.

P. Mansion. Note bibliographique sur les intégrales générales et les solutions singulières des équations différentielles et aux dérivées partielles. Brux. S. sc. XV A. 32-37, 60.

Geschichtliche Uebersicht der diese Frage betreffenden Arbeiten bis 1890. Der Verfasser hat dabei die schöne Inaugural-Dissertation Poincaré's übersehen: „Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux dérivées partielles." Paris. Gauthier-Villars. 79 S. 4° (1879). Mn. (Lp.)

Th. S. Fiske. On the doubly infinite products. New York M. S. Bull. I. 61-66.

Eine kurze Uebersicht über die Hauptgesichtspunkte und die vornehmlichsten Arbeiten betreffs dieser Producte von Abel, Jacobi, Cayley, Eisenstein, Weierstrass, Hermite. Lp.

A. Brill. Streifblicke auf die Geschichte der Geometrie. Böklen Mitt. IV. 12-29.

Ist ein Stück einer im Jahre 1884 gehaltenen Antrittsrede und giebt einen Ueberblick über die Entwickelung der Geometrie seit den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart, von Euklid bis Cayley. Tn.

E. Vigarié. Les progrès de la géométrie du triangle, en 1890. J. de Math. élém. (3) V. 8-12, 28-32, 56-59, 80-82.

E. VIGARIÉ. Los progresos de la geometría del triángulo en 1890. Progreso mat. I. 101-106, 128-134, 187-190.

Hr. Vigarié stellt die Uebersicht über die Fortschritte der Dreiecksgeometrie im Jahre 1890 als Ergänzung seiner früheren bezüglichen Aufsätze unter den folgenden Titeln zusammen: 1. Coordinatensysteme. 2. Aehnliche Figuren. 3. Brocard'sche Elemente. 4. Steiner'sche Brennpunkte. 5. Steiner'sche Axen und Kiepert'sche Hyperbel. 6. Reihen merkwürdiger Punkte. 7. Kreis der neun Punkte. 8. Fuhrmann'scher Kreis. 9. Artzt'sche Parabeln. 10. Mandart'sche Parabeln. 11. Merkwürdige Kegelschnitte. 12. Kubische Curven. 13. Verallgemeinerungen.

Lp.

Z. G. DE GALDEANO. La evolución de la geometría del triángolo. Progreso mat. I. 223-228, 269-274, 317-318.

Historische Skizze, in welcher besonders die Vorarbeiten von Hrn. Vigarié benutzt sind. Lp.

M. REMBACZ. Abriss der Geschichte der darstellenden Geometrie. Pr. Stanislawow. 1. Teil 1890. 39 S., 2. Teil. 64 S. (Polnisch.)

J. S. MACKAY. The Wallace line and the Wallace point. Edinb. M. S. Proc. IX. 83-91.

In dieser Abhandlung wird die Geschichte zweier Sätze sowie eine Uebersicht über die aus ihnen gezogenen Schlussfolgerungen gegeben. Der erste Satz lautet: Wenn von einem beliebigen Punkte des Umkreises eines Dreiecks Lote auf die Seiten gefällt werden, so liegen die Fusspunkte dieser Lote in einer Geraden. Von dieser Linie, die oft die Fusspunktlinie, oft auch die Simson-Linie genannt wird, sagt man gewöhnlich, sie sei durch Robert Simson (aus Glasgow) entdeckt worden. Indessen wird kein Verweis auf irgend eine Schrift Simson's gegeben, in der dieser Satz steht. Der Verf. bespricht hier die

Geschichte der Entdeckung und bringt Gründe bei, durch welche es glaubhaft wird, dass Wallace der Entdecker ist. Der Aufsatz von Wallace erschien in Leybourn's „Mathematical Repository" (old series) II. 111 (1798). Man vergleiche auch Nature XXX. 635. Verschiedene Verallgemeinerungen des Wallace'schen Satzes von Poncelet, Steiner und anderen finden Erwähnung.

Der zweite im Titel erwähnte Satz ist der folgende: Wenn vier gerade Linien sich gegenseitig schneiden und vier Dreiecke bilden, so schneiden sich die Umkreise dieser Dreiecke in einem und demselben Punkte. Dieser Satz wurde 1804 in Leybourn's Math. Rep. (new series) I. 22 durch „Scoticus" zum Beweise vorgelegt, welcher Schotte, wie man guten Grund zur Vermutung hat, Wallace war. Verallgemeinerungen dieses Satzes nebst ihrer Geschichte werden ebenfalls besprochen. Es möge hinzugefügt werden, dass Wallace Professor der Mathematik an der Universität Edinburgh war. Gbs. (Lp.)

Z. G. de Galdeano. La evolución de la geometría proyectiva. Progreso mat. I. 3-8, 26-30, 54-57, 106-108, 256-258.

Eine Skizze der Entwickelung der neueren synthetischen Geometrie seit dem Erscheinen der Géométrie descriptive von Monge bis zu den Propriétés projectives von Poncelet; eine Fortsetzung wird versprochen. Lp.

A. Favaro. Notizia storica sulle applicazioni della spirale logaritmica. Bibl. Math. (2) V. 23-25.

Die Mitteilung des Herrn Favaro bezieht sich auf einen 1675 geschriebenen Brief von Collins an Oldenburg, worin verschiedene Anwendungen der logarithmischen Spirale angegeben sind. E.

W. W. R. Ball. Newton's classification of cubic curves. Bibl. Math. (2) V. 35-40.

Die Note fasst den wesentlichen Inhalt eines längeren Auf-

satzes zusammen, der im XX. Bande der Proceedings of the London Mathematical Society erschienen ist. E.

J. FRISCHAUF. Beiträge zur Geschichte und Construction der Karten-Projectionen. Graz. Leuschner und Lubensky. 14 S. und ein Carton. 8°.

Dieses „den Manen J. H. Lambert's gewidmete" Schriftchen weist nach, dass die von Tissot (1881) vorgeschlagenen besonderen Methoden zur Abbildung einer Zone durch Kegelprojection und zu der eines Zweiecks nur Näherungsformeln der von Lambert (1772) angegebenen winkeltreuen Abbildung sind. Auch wird eine verbesserte Cassini'sche Projection gelehrt und die Bonne'sche Projection gegen gewisse Angriffe verteidigt, insbesondere als für Katasterkarten verwendbar bezeichnet.

Tn.

J. HOWARD GORE. The decimal system of measures of the seventeenth century. Silliman J. (3) XLI. 22-28.

J. PEVELING. Geschichte der Gesetze von der Erhaltung der Materie und Energie. Pr. (Nr. 465) Realsch. Aachen. XL S. 4°.

Nach einer Einleitung über Erklärung und Gesetze der Naturerscheinungen wendet sich der Verf. zu der Geschichte der beiden genannten Gesetze, jedes für sich behandelnd (S. 7-18, 18-40) und einen Abschnitt über den bezüglichen Einfluss der älteren Philosophie voraussendend. Tn.

M. GEBBIA. Una quistione di priorità su alcune contribuzioni alla teoria dei sistemi articolati. — Estratta da una lettera al prof. C. Ceradini a Roma. Il Politecnico. XXXIX. 778-782.

Herr Gebbia bemerkt, dass einige die Fachwerke mit über-

zähligen Stäben betreffende, von ihm in den Jahren 1881 und 1882 als neu herausgegebene Resultate schon seit 1874 von Hrn. Mohr gefunden worden sind, während ein von diesem Letzteren im Jahre 1885 aufgestellter Satz vier Jahre früher von ihm bewiesen worden ist. Vi.

E. Kullrich. Zur Geschichte des mathematischen Dreikörperproblems. Diss. Halle. 8°.

A. S. Hathaway. Early history of the potential. New York M. S. Bull. I. 66-74.

In Todhunter's „History of the theories of attraction" wird Laplace als derjenige bezeichnet, welcher (1784) die Potentialfunctionen in die Mechanik eingeführt habe. Dagegen weist Hr. Hathaway auf mehrere Arbeiten von Lagrange hin, in denen dies lange vorher geschehen ist. Die erste Idee tritt schon auf in „Recherches sur la libration de la Lune" (Oeuvres VI. 5. 1764); vollständig klar ausgesprochen ist das Princip der Differentiation der Potentialfunction zur Gewinnung der Kräfte in „Sur l'équation séculaire de la Lune" (Oeuvres VI. 335. 1773). Geradezu der Potentialfunction gewidmet ist die Abhandlung „Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances" (Oeuvres IV. 402. 1777). Endlich wird in der Arbeit „Théorie de la libration de la Lune" (Oeuvres V. 5. 1780) die Bezeichnung V eingeführt, von der auch Laplace Gebrauch machte. Wie bei anderen Gelegenheiten, so hat auch in diesem Falle Laplace seinen Vorgänger nicht erwähnt. Lp.

E. Robel. Die Sirenen. Ein Beitrag zur Entwickelungsgeschichte der Akustik. I. Pr. (Nr. 98) Luisenst. Realgymn. Berlin. 29 S. 4°.

Der hier vorliegende erste Teil des Programms führt die Geschichte der Sirenen bis etwa zur Mitte der dreissiger Jahre unseres Jahrhunderts. Es werden der Reihe nach Art und Erfolg

der bezüglichen Arbeiten von Hooke (1681), Stancari (1706), Robison (1795), Cagniard de la Tour (1819, 1827 - 1840) und Savart (1830) dargelegt, auch schon die von Ohm gestreift, und es ist dankenswert, dass wichtige Stellen der bezüglichen Schriften wortgetreu wiedergegeben werden. Ein interessantes Ergebnis ist das, dass die Radsirene eine Erfindung nicht, wie gewöhnlich angegeben, französischer, sondern englischer Physiker ist (S. 10). Der zweite Teil der Abhandlung wird die Verdienste Ohm's würdigen und die Entwickelung der Sirenen bis 1890 weiterführen. Tn.

A. FAVARO. Galileo Galilei e la presentazione del cannocchiale alla Repubblica Veneta. Nuovo Archivio Veneto. T. I. Parte I.

Man besitzt drei verschiedene Erzählungen von der Entdeckung des Fernrohrs durch Galilei. Die erste ist in einem Briefe enthalten, welchen Galilei den 29. August 1609 an seinen Schwager Benedetto Landucci in Florenz richtete; die zweite befindet sich in „Sidereus Nuncius“ und die dritte im „Saggiatore“. Es ist der eben angeführte Brief, welchen Herr Favaro auf Grund einer Handschrift der Staats-Bibliothek in Florenz veröffentlicht, um nachher die Echtheit desselben gründlich zu untersuchen und die Wahrheit seines Inhaltes zu bestimmen. Die Echtheit scheint dem Verfasser noch unsicher; die Art, wie nach ihm die Ueberreichung des Fernrohres an die venetianischen Behörden stattgefunden haben und demnach die Erhöhung der Besoldung Galilei's entschieden worden sein soll, kann der Leser aus der Originalarbeit selbst lernen. La.

Is the mariner's compass a Chinese invention? Nature XLIV. 308-309.

Nach einem Artikel in dem „North China Harold“ von Shanghai, der die Geschichte des Compasses in China behandelt, ist der Magnetismus des Eisens vor 2100 Jahren dort bekannt gewesen, die Polarität der Nadel 324 v. Ch., erst vierhundert Jahre später der Compass; im achten Jahrhundert n. Ch. wurde

die Magnetnadel bei Aufnahmen verwendet, zugleich ungefähr die Declination entdeckt. Um 1122 wird von einem Gesandten nach Korea der Gebrauch einer schwimmenden Magnetnadel auf dem zur Reise benutzten Schiffe beschrieben. Lp.

G. BILFINGER. Die Sterntafeln in den ägyptischen Königsgräbern von Bibân el Molûk. Stuttgart. A. F. Prechter (Wildt'sche Buchhdlg.). 80 S. 4°, auch Pr. Eberhard-Ludwigs-Gymn. Stuttgart.

Champollion hat im Jahre 1829 in Aegypten eine merkwürdige Sterntafel gefunden, die seitdem die Neugierde und den Scharfsinn viel beschäftigt und auch den über Zeitmesser und Stundenmasse der Alten erfolgreich arbeitenden (F. d. M. XVIII, 32; XX, 38) Verfasser angelockt hat. Eindringendes Studium lässt ihn die beiden seither aufgestellten Erklärungen der Tafel entweder als eines ewigen Kalenders mit Verschiebungen um je 60 Jahre, oder als eines Horoskops für den begrabenen König verwerfen; Letzterem sei vielmehr mit diesem Grabschmuck eine erwünschte Darstellung der regelmässigen Himmelsbewegungen, der ewig sich erneuernden Perioden von Tag und Jahr gewissermassen ins Jenseits mitgegeben worden. Die Vereinigung der täglichen und jährlichen Himmelsbewegung in einem Gesamtbilde brachte freilich Entstellungen der üblichen Nachteinteilung und Stundengrösse mit sich, die im einzelnen festgestellt werden. Tn.

J. D. LUCAS. L'astronomie à Babylone. Rev. des Quest. sc. XXIX. 513-541.

Fortgesetzte Besprechung der Untersuchungen der Herren Epping und Strassmaier. Mn. (Lp.)

M. SIMON. Grundzüge des jüdischen Kalenders. Berlin. Bibliographisches Bureau. 39 S. 8°.

Eine in der That „leichtfassliche Anleitung“ zum Verständnis und zur Berechnung des jüdischen Kalenders mit seinen

sechserlei Jahren und seinen vier Behinderungsfällen. Beigegeben ist ein neues leichtes Verfahren zur Verwandlung jüdischer Daten in bürgerliche. Tn.

J. N. Lockyer. On some points in the early history of astronomy. Nature XLIII. 559-563; XLIV. 8-11, 57-60, 107-110, 199-202.

Diese Reihe von Artikeln giebt den Inhalt von Vorträgen wieder, die vor Arbeitern im November 1890 gehalten sind und sich hauptsächlich auf die astronomischen Kenntnisse bei den Aegyptern beziehen. Die bezüglichen Notizen hat der Verf., wie er angiebt, während des Monats Januar in Assuan gesichtet. Bei seiner Rückkehr aus Aegypten im März des Jahres fand er, dass ein Teil des Stoffes der Vorlesungen von Herrn Nissen in dem Rheinischen Museum für Philologie 1885 auf Grund desselben Materials veröffentlicht ist. Diesem schreibt er unter anderem den Gedanken zu, dass die Axen der Tempel in Aegypten nach den Richtungen der Strahlen der aufgehenden Gestirne gebaut worden seien und das Allerheiligste den dunklen Beobachtungsraum für die horizontal einfallenden Lichtstrahlen gebildet habe. Lp.

A. Messedaglia. Sulla Uranologia omerica. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII_1. 495-526.

In feierlicher Sitzung der Akademie, in Gegenwart des Königs spricht Hr. Messedaglia über die Präcession der Tag- und Nachtgleichen, im besonderen, ob und wie dieselbe in den altklassischen Dichtern, zumal bei Homer, zum Ausdruck gelange. Nach Erläuterung ihres Wesens, ihres Grundes und ihrer augenfälligen Erscheinung am Sternhimmel, wie sie sich im Verlauf der Jahrtausende zeigen musste, geht er des näheren ein auf die Homerstellen Il. 18, 489 und Od. 5, 275 und 272 und sucht aus diesen nachzuweisen, wie anders als heute Homer den Himmel gesehen. Zum Schluss verteidigt der Redner seine Meinung, dass auch in den ältesten Zeiten die Doppelnatur der

Venus als eine scheinbare erkannt worden sei. Reiche Anmerkungen und Quellennachweise (S. 512-526) schliessen den Abdruck der Rede. Tn.

PH. GILBERT. La dernière lutte à Rome autour du système de Copernic. Rev. des Quest. sc. XXIX. 589-594.

Trotz der gegenteiligen Ansicht des Papstes und des Sanctum Officium wollte der Pater Anfossi 1820 den Druck einer Astronomie des Canonicus Settele nicht gestatten, weil das Kopernikanische System darin gelehrt wurde. Mn. (Lp.)

C. FLAMMARION. Copernic et la découverte du système du monde. Paris. Marpon et Flammarion. [Nature XLV. 77.]

H. WAGNER. Ueber das von S. Günther 1888 herausgegebene spätmittelalterliche Verzeichnis geographischer Coordinatenwerte. Gött. Nachr. 1891. 256-278.

Günther hat 1888 in der Zeitschr. f. wiss. Geographie das vorstehend genannte Verzeichnis veröffentlicht und hat dabei dessen Entstehung in die Ostseeprovinzen verlegt. Wagner, Günther heftig angreifend, bestreitet den einheitlichen Charakter der betreffenden Handschrift, nennt Nürnberg als höchst wahrscheinlichen Ort der Abfassung, läugnet die von Günther angenommene genauere Kenntnis von Polhöhen im Mittelalter und erweist die in Frage stehende Ortstabelle als einen Auszug aus Regiomontan's Kalender (etwa aus dem Jahre 1475). Mit Günther stimmt Wagner darin überein, dass hier die erste Ortstabelle vorliege, in welcher die geographischen Längen durchweg in Zeit angegeben sind, und zwar vom Nürnberger Meridian aus.

Tn.

M. FIORINI. Il mappamondo di Fausto Rughesi. Bull. della Soc. geogr. Italiana. November 1891.

Nach einem zusammenfassenden Berichte über die Karto-

graphie in Italien während des XVI. Jahrhunderts beschäftigt sich der Verf. sehr eingehend mit Fausto Rughesi aus Montepulciano (Toscana), welcher 5 sehr schöne, in der Bibliothek Barberini (Rom) aufbewahrte Karten angefertigt hat. Alle wurden in Rom gezeichnet und gedruckt und dem Vincenzo Gonzaga, Herzog von Mantua und Monferrat, gewidmet. Herr Fiorini beschränkt sich auf die Beschreibung des Hauptblattes (welches die Weltkarte darstellt); die Wichtigkeit desselben liegt darin, dass es den F. Rughesi als den ersten nachweist, welcher die orthographische Projection auf die Construction einer Weltkarte angewandt hat. Ferner sammelt der Verf. alle Nachrichten, welche über das Leben Rughesi's ein wenig Licht verbreiten können; diese Nachrichten sind aber sehr dürftig. Als Anhang des Aufsatzes findet man eine Sammlung von Briefen zwischen Gonzaga's Hof und unserem Kartographen. La.

H. A. Newton. The fireball in Raphael's Madonna di Foligno. Silliman J. (3) XLI. 235-238.

A. Daubrée. Bolide peint par Raphael. Flammarion Rev. d'Astr. X. 201-206.

J. Benes. Ueber Hoene-Wronski's „Canons de logarithmes“. Casop. XX. 24. (Böhmisch.)

Liefert eine ausführliche Belehrung über die Einrichtung dieser Tafeln. Std.

Capitel 2.
Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

S. Dickstein. Die mathematischen Begriffe und Methoden. Erster Band. Erster Teil. Theorie der Operationen. Warschau. Gebethner & Wolf. VI u. 25 S. 8°. (Polnisch.)

Dieser Band bildet den ersten Teil eines grösseren Werkes,

das sich über das ganze Gebiet der reinen Mathematik erstrecken soll; der zweite und dritte Teil des ersten Bandes werden nämlich der Zahlentheorie und Algebra, der zweite Band der Geometrie, der dritte der Kinematik gewidmet sein.

Der Band beginnt mit einer Einleitung, in der die Meinungen vieler Philosophen in Bezug auf die mathematischen Begriffe besprochen werden, und der Grund für die Anwendbarkeit der Mathematik auf die Erfahrung in einem Principe gefunden wird, das als eine Verallgemeinerung des Hankel'schen Permanenzprincipes angesehen werden darf.

Es folgen sieben Capitel, deren Inhalt im folgenden kurz zusammengefasst werden möge.

Capitel I. Ganze Zahlen; elementare Operationen; transfinite Zahlen.

Capitel II. Formale Operationen nach Hankel (Theorie der complexen Zahlensysteme) und nach Dedekind (Was sind und was sollen die Zahlen?).

Capitel III. Anwendung des Permanenzprincipes auf die gebrochenen Zahlen. Einführung dieser Zahlen nach Weierstrass. Versuch von Kronecker, die ganze Mathematik auf die ganzen positiven Zahlen vermittelst des verallgemeinerten Congruenzprincipes zurückzuführen.

Capitel IV und V. Negative und complexe Zahlen.

Capitel VI. Höhere und complexe Zahlen. Untersuchungen von Weierstrass und Dedekind. Grassmann'sche Theorie. Quaternionen.

Capitel VII. Ganze rationale Functionen. — Teilung. Grösster gemeinschaftlicher Teiler. Entwickelung einer Function nach Potenzen einer anderen. Symmetrische Functionen. Ableitung einer ganzen Function. Taylor'sche Reihe. Differenzen; Bernoulli'sche Zahlen. Lagrange'sche Interpolationsformel. Wronski'sches „höchstes Gesetz“.

Ein ausführlicher Bericht über das vorliegende Buch ist vom Ref. in Darb. Bull. (2) XVI. 120-128 gegeben worden.

Vi.

G. MALLERY. Philosophy and specialties. Address as retiring president. Washington Bull. XI. 3-39.

Aus dieser Rede, welche das Verhältnis der Philosophie zu den Einzelwissenschaften behandelt, werde nur hervorgehoben, dass, nachdem sich 1879 die anthropologische, 1880 die biologische Gesellschaft von der Washingtoner Philosophical Society losgelöst hatten, am 29. März 1883 sich innerhalb der Muttergesellschaft die mathematische Section gebildet hat, und dass seitdem zur grossen Befriedigung der übrigen Gesellschaftsmitglieder die mathematischen Vorträge (aus denen Auszüge im Washington Bull. abgedruckt werden, deren Titel daher im laufenden Bande der F. d. M. an den geeigneten Stellen stehen) nur noch innerhalb dieser Section gehalten werden. Lp.

K. PEARSON. The grammar of science. London. Walter Scott. XVI + 493 S.

Dies ist ein bemerkenswertes Buch, das Werk eines kraftvollen und unabhängigen Denkers. Mit den philosophischen Ansichten des Schriftstellers sympathisiren wir gerade nicht sehr; aber wir meinen, er hat den Studirenden der Dynamik in seiner Erörterung der Bewegungsgesetze im achten Capitel des Buches einen recht grossen Dienst geleistet, und wir fühlen uns ganz einig mit ihm in der warmen Wertschätzung des Mach'schen Werkes: „Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt“ (F. d. M. XV. 1883. 762). Eine neue Fassung der Bewegungsgesetze scheint uns höchst nötig, und wir heissen Hrn. Pearson's Beitrag willkommen, obschon wir manches für verunziert halten durch einen zu polemischen Ton. Vieles aus dem Werke liegt jenseit der Grenzen des Jahrbuchs; doch möge es gestattet sein, die Titel der Capitel anzuführen: I. Einleitendes. II. Die Thatsachen der Wissenschaft. III. Das wissenschaftliche Gesetz. IV. Ursache und Wirkung, Wahrscheinlichkeit. V. Raum und Zeit. VI. Die Geometrie der Bewegung. VII. Materie. VIII. Die Bewegungsgesetze. IX. Leben. X. Die Klassificirung

der Wissenschaften. Man vergleiche die Recension in Nature XLVI und die sich anschliessende Correspondenz.

Gbs. (Lp.)

St. G. Mivart. The implications of science. Nature XLIV. 60-62, 82-85.

Eine Freitagabend-Vorlesung in Royal Institution über die Grundlagen der Erkenntnislehre. Der Verf. zählt als solche auf: die Zuverlässigkeit der Schlussfolgen, das Gesetz des Widerspruches, die Zuverlässigkeit unseres Gedächtnisvermögens, das Bewusstsein des Subjects von der Aussenwelt, die Kenntnis unseres eigenen stetigen Daseins. Dies wird im zweiten Teile des Vortrags näher durchgeführt.

Lp.

A. B. Kempe. The subject-matter of exact thought. Nature XLIII. 156-162.

Der Zweck dieser Abhandlung ist die möglichst einfache und nicht schulmässige Darlegung der Principien, welche der Verfasser zuerst in seinem „Memoir on the theory of mathematical form" (Lond. Phil. Trans. CLXXVII. 1886) und in einer darauf bezüglichen Note der Lond. Phil. Proc. XLII formulirt hat, über welche aber der gewöhnliche Berichterstatter ein Referat zu liefern unterlassen hat. Die besonderen Anwendungen der Theorie sind in einem neueren Aufsatze hervorgehoben: „On the relation between the geometrical theory of points and the logical theory of classes" (Lond. M. S. Proc. XXI. 147; Referat in diesem Bande). Der Verf. giebt am Schlusse seiner in neuer Behandlung entwickelten Ueberlegungen die folgende zusammenfassende Uebersicht: Welches auch die wahre Natur der Dinge und der Begriffe ist, die wir von ihnen haben (wonach zu forschen wir hier keinen Anlass haben), in den Operationen des exacten Denkens werden sie als eine Anzahl einzelner Wesen (entities) behandelt. Jedes Wesen ist von manchen Wesen unterschieden und (ausser wenn einzig) von anderen ununterschieden. In gleicher Weise ist jede Ansammlung von Wesen von manchen

Ansammlungen von Wesen unterschieden und (ausser wenn einzig) von anderen ununterschieden; und jede Ansicht (aspect) einer Ansammlung von Wesen ist von manchen Ansichten von Ansammlungen unterschieden und (ausser wenn einzig) von anderen ununterschieden. Jedes System von Wesen hat eine bestimmte Form, welche 1) von der Anzahl seiner es bildenden Wesen herrührt und 2) von der Art, in der die unterschiedenen und ununterschiedenen Wesen, Ansammlungen von Wesen und Ansichten von Ansammlungen von Wesen durch das System verteilt sind. Die Eigenheiten und Eigenschaften eines Systems von Wesen hängen, soweit die Processe des exacten Denkens betroffen werden, von der besonderen „Gestalt" ab, die es annimmt, und sind sonst von nichts weiter abhängig. Es kann manchmal den Anschein gewinnen, dass ausser der Gestalt noch andere Betrachtungen versteckt liegen; allein bei genauerem Eindringen wird man finden, dass die Einführung solcher Betrachtungen auch die Einführung neuer Wesen bedingt, und dann haben wir bloss die Gestalt des vergrösserten Systems zu betrachten. Lp.

D. Nicolás Ugarte. La matemática. Su importancia y preeminencia actuales. Progreso mat. I. 145-181.

Der Aufsatz ist der wesentliche Inhalt einer Rede des Verfassers im Ateneo von Guadalajara, deren Anlass in einer Discussion über den Nutzen und die relative Bedeutung der Wissenschaften gegeben war. Der Verf. verficht das Interesse seiner Wissenschaft mit einem gewissen Aufwande von Belesenheit und mit innerer Wärme sowie mit manchem rednerischen Schmucke. Die Bedeutung der Mathematik bei dem Studium der Natur und mancher Fragen der Philosophie wird besonders hervorgehoben. Lp.

L. Clariana y Ricart. Importancia de las formas congéneres en la matemática. Progreso mat. I. 90-91, 125-128, 203-205.

Der Verfasser stellt Betrachtungen an über den Vorteil, bei

Fragen der Mathematik Formen derselben Gattung zu benutzen wie die, welche man erforschen will. Als Beispiel betrachtet er die ebenen Flächeninhalte, um daran die Art zu beleuchten, wie man das Flächenelement bei der Bestimmung des zu messenden Inhaltes wählt. Lp.

K. Pearson. The applications of geometry to practical life. Nature XLIII. 273-276.

Ein halbstündiger Probevortrag im Gresham College, der einerseits die Anregungen hervorhebt, welche die Mathematik durch die Aufgaben des praktischen Lebens erhält, andererseits die Erleichterungen beleuchtet, welche die graphischen Methoden der Neuzeit dem Verständnisse der nicht fachkundigen Laien für die Naturerscheinungen gewähren. Lp.

E. Schröder. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exacte Logik). II. Band. 1. Abteilung. Leipzig. B. G. Teubner. XIII + 400 S. 8°.

Das Referat folgt nach dem Erscheinen der noch fehlenden Schlusscapitel des Werkes. Schg.

G. Peano. Principii di logica matematica. Sommario dei libri VII, VIII e IX di Euclide. Riv. di Mat. I. 1-10, 10-12.

G. Peano. Formole di logica matematica. Aggiunti e correzioni. Riv. di Mat. I. 24-31, 182-184.

Diese Aufsätze verfolgen den Zweck, den Leser mit den Anfangsgründen der mathematischen Logik bekannt zu machen und ihn gleichzeitig in die Zeichenschrift einzuführen, welche vom Verf. schon früher ausgebildet und mit bestem Erfolge [in den Schriften „Arithmetices principia“ und „I Principii di Geometria“ (1889); F. d. M. XXI. 1889. 51, 524] zur abgekürzten Darstellung von Regeln und Sätzen auf den Gebieten der Logik und der reinen Mathematik verwendet worden ist. Der als Beispiel in

die Zeichensprache übersetzte Inhalt der oben genannten Bücher des Euklid nimmt kaum 2 Seiten ein. Gleich ausgezeichnet durch Kürze ist die Sammlung von logischen Formeln, welche alle in der vom Verf. citirten Litteratur enthaltenen Resultate wiedergiebt. Merkwürdig ist, dass mit dieser Zeichenschrift wieder eine Idee von Leibniz verwirklicht worden ist, wünschenswert, dass bei Zeiten eine Einigung der Autoren über die zu verwendenden Zeichen stattfinde, damit die Schrift, im Gegensatz zu vielen der neueren mathematischen Symbole, das Ideal internationaler Verständlichkeit erreiche und vor dem Schicksal der „Weltsprachen" bewahrt bleibe. Schg.

G. Peano. Sul concetto di numero I, II. Riv. di Mat. I. 87-102, 256-267.

Der im vorigen Referate besprochenen Sammlung logischer Formeln werden hier einige weitere Gruppen derartiger Formeln hinzugefügt, welche in der Einführung eines neuen Zeichens (Functionszeichen) ihren Ursprung finden. Diese Formeln werden auf die Grundbegriffe und Operationen der Arithmetik angewandt und liefern für die Erklärungen und Regeln derselben Ausdrucksweisen, welche an Schärfe den sonst üblichen vielfach überlegen sind. Des Verfassers Bestrebungen und Ziele berühren sich hierbei namentlich mit denjenigen von Dedekind und anderer Autoren, welche neuerdings auf grössere Präcision in der Erfassung und Darstellung der arithmetischen Grundbegriffe hingearbeitet haben. Den Formeln folgen jedesmal ausführliche erläuternde Bemerkungen, welche auch alle einschlägigen Fragen berühren, die neuerdings in den Vordergrund des Interesses getreten sind, so die Definition der Irrationalzahlen (im Anschluss an Dedekind und Pasch), die Cantor'schen Untersuchungen u. a.

Schg.

G. Vailati. Le proprietà fondamentali delle operazioni della logica deduttiva. Riv. di Mat. I. 127-134.

Der Verf. bringt zuerst die Grundbegriffe des allgemeinen

Operationscalculs in Erinnerung, nämlich: die Relation $a)b$, welche aussagt, dass durch ein Object a ein anderes, demselben System angehörendes, b mitbestimmt ist, die Operation $a \frown b$, aus welcher ein neues Object c desselben Systems hervorgeht, und die combinatorischen Eigenschaften beider, welche in Bedingungen ihren Ausdruck finden, denen die Objecte unterworfen sind. Hierauf wird gezeigt, dass die Annahme zweier Eigenschaften der Relation und je zweier der durch die speciellen Zeichen $+$ und $\times$ ausgedrückten Operationen ausreicht, um alle Grundgesetze des logischen Calculs abzuleiten, in welchen übrigens auch diejenigen der arithmetischen Addition und Multiplication mit enthalten sind. Schg.

G. Frege. Function und Begriff. Vortrag. Jena. H. Pohle. 31 S. 8°.

Frege's Untersuchungen über Function und Begriff bilden eine Fortführung der im Jahre 1879 herausgegebenen Begriffsschrift, welche den Leibniz'schen Gedanken eines calculus philosophicus auf dem Gebiete der logischen Schlüsse durchführen sollte. Diese Fortsetzung soll speciell zur Anwendung der Begriffsschrift auf die Grunddefinitionen der Arithmetik hinleiten. Das Argument einer Function gehört nach Frege nicht mit zur Function, sondern bildet zusammen mit der Function ein vollständiges Ganzes. Die Function ist für sich allein unvollständig und ergänzungsbedürftig. Das, wozu die Function durch ihr Argument ergänzt wird, heisst der Wert der Function für dies Argument. Ein Begriff ist eine Function, deren Wert immer ein Wahrheitswert ist. Der Begriffsumfang ist der Wertverlauf einer Function, deren Wert für jedes Argument ein Wahrheitswert ist. — Wie bei allen Frege'schen Arbeiten hat Referent auch bei dieser den Eindruck, dass sie in Subtilitäten verläuft.

Mi.

W. Brix. Der mathematische Zahlbegriff und seine Entwickelungsformen. Eine logische Untersuchung. Wundt's Philos. Studien. 1890. 632-677; 1891. 104-166, 261-334.

In dieser umfangreichen Abhandlung giebt der Verfasser eine in historischer, wie kritischer Hinsicht so vielseitige Untersuchung der verschiedenartigen Formen des Zahlbegriffs, dass Referent Philosophen wie Mathematiker auf diese höchst dankenswerte Arbeit aufmerksam machen möchte, um so mehr, als dieselbe flüssig und klar geschrieben ist.

Leider muss sich Referent hier, wo nur die mathematischen Interessen in Betracht kommen können, möglichst kurz fassen.

Um den Leser von vorn herein zu orientiren, möge das Inhaltsverzeichnis, welches der Verfasser selbst nicht zusammengestellt hat, vorausgeschickt werden.

In der Einleitung wird besonders auf die Widersprüche

hingewiesen, welche sich bei der mathematischen Discussion des Zahlbegriffs noch in neuester Zeit herausgestellt haben. Wenn dabei die in der Hoffmann'schen Zeitschrift über das Negative geführte Controverse unmittelbar neben Aeusserungen von Kronecker, Hankel, Christoffel u. a. citirt wird, so mutet das einen Mathematiker etwas seltsam an.

Die merkwürdigen Worte Christoffel's: „Da die Irrationalzahlen demnächst abgeschafft werden sollen u. s. w.“ hat der Verfasser wohl zu ernsthaft aufgefasst. Zweifellos ist darunter nur eine ironische Wendung gegen Kronecker zu verstehen, der es sich ja (wie der Verfasser völlig richtig erkennt) zur Aufgabe gesetzt hatte, alle Begriffe der Analysis und Algebra auf den der ganzen Zahl zurückzuführen; dieser Standpunkt ist theoretisch unanfechtbar, während nur über die praktische Durchführbarkeit desselben die Meinungen geteilt sind.

Die historische Entwickelung des Zahlbegriffs im ersten Capitel ist übersichtlich gehalten. Mit der getroffenen Einteilung des Stoffes ist Referent allerdings nicht recht einverstanden. Der Verfasser unterscheidet drei Perioden. In der ersten, naiven Periode kommt man über den Begriff der ganzen positiven Zahl und höchstens ihrer Bruchverhältnisse nicht hinaus. Die zweite Periode umfasst nahezu alle übrigen Zahlschöpfungen, also die negativen, irrationalen, imaginären und höheren complexen Zahlen, die algebraischen und transcendenten Zahlen u. s. w. mit alleiniger Ausnahme der G. Cantor'schen Theorie der infiniten und transfiniten Zahlen, während eben diese letztere die dritte Periode ausmacht. Referent glaubt nicht, dass selbst Herr G. Cantor mit dieser, ihn so ausserordentlich bevorzugenden Einteilung einverstanden sein dürfte, um so mehr, als ja, wie er selbst wiederholentlich zugiebt, seine Theorie noch wesentliche Lücken darbietet, und überdies gegen die Begründung dessen, was er wirklich geschaffen, nicht unwesentliche Einwände erhoben werden.

Was die Lehre von den formalen Verknüpfungsgesetzen für die Zahlen angeht, so legt ihr der Verfasser mit Recht eine hohe Bedeutung bei, nur scheint sein historischer Standpunkt

kein ganz fester zu sein. Einmal überlässt er der von Hamilton inaugurirten englischen Schule nahezu das ganze Verdienst, das andere Mal kann er doch nicht umhin, das Grassmann'sche System als das weit umfassendere und tiefer angelegte anzuerkennen.

Referent will übrigens gleich hinzufügen, dass derartige scheinbare Widersprüche bei einer so ausgedehnten Arbeit, die ihre Entstehung verschiedenen Stadien der Entwickelung des Autors verdankt, nicht verwundern können.

Bei der ausführlicheren Besprechung der Cantor'schen Mannigfaltigkeitslehre (siehe oben) geht der Verfasser zu weit, wenn er alles, was in dieser Richtung geschehen ist, auf den Namen Cantor bezieht; beispielsweise sind die vom Verfasser citirten einschlägigen Leistungen P. du Bois-Reymond's (wie Referent auf Grund mündlichen Verkehrs weiss) von Cantor ganz unabhängig entstanden.

Das zweite Capitel liefert die psychologische Erörterung der einfachsten Zahlformen. Man hat hier, wie du Bois-Reymond betont hat, die Zahl der Raumanschauung von der Zahl der Zeitanschauung oder Anzahl zu trennen. Die erstere ist noch kein Begriff, sondern nur die Vorstellung von dem Getrenntsein der Wahrnehmungsgegenstände, sodass der Umfang der so gewonnenen Zahlen nur ein geringer ist; bei der zweiten Zahlform tritt als neues Moment die Zeit hinzu, insofern sie durch successive Zusammenfügung von Einheiten erwächst.

Will man nun aber im Gebiete der Anzahlen weiter fortschreiten, so muss man neue grössere Einheiten einführen, überhaupt ein systematisches Bezeichnungssystem zu Grunde legen. Damit beginnt der Uebergang zur erkenntnistheoretischen Thätigkeit, der das folgende Capitel gewidmet ist.

Der Verfasser weist hier nach, wie vor allem bei den Griechen, aber auch bei den Aegyptern und Indern eine reinliche Weiterentwickelung der Arithmetik durch den Zwitterbegriff der Zahlgrösse gehindert ward; man schwankte hin und her zwischen mathematisch zulässigen und praktisch anschaulichen Zahlformen, insonderheit bei Verwendung der negativen Zahlen.

Der Verfasser lässt in diesem wichtigen Capitel sowohl den realistischen wie den nominalistischen Standpunkt ausführlich zu Worte kommen, weist jeden derselben aber immer da zurück, wo er die zulässigen Grenzen überschreitet.

So hat beispielsweise der Realismus Unrecht, wenn er die gewöhnlichen complexen Zahlen auf Grund einer geometrischen Interpretation erkannt zu haben glaubt. Der Zahlbegriff drängt ja zweifellos zum Nominalismus hin, da jede Erweiterung der bestimmenden Elemente auf einer willkürlichen Festsetzung beruht. Der Nominalismus muss sich aber bewusst bleiben, dass eben diese Willkür an gewisse aus der Natur des Gegenstandes hervorgehende Gesetze gebunden ist.

Vor allem ist man aber in den verhängnisvollen Irrtum verfallen, früher über die nominalistische Natur der Zahlen zu urteilen, lange bevor man dieselbe wirklich erkannt hatte.

Es ist hier kein Raum, auf diese höchst interessanten Darlegungen einzugehen: Referent muss sich beeilen, das positive Resultat zu skizziren, zu dem der Verfasser in den beiden letzten Capiteln gelangt.

Nachdem die Haupt- und Grundformen des Zahlbegriffs nach ihrer mathematischen, wie logischen Gestalt gründlich besprochen sind, ergiebt sich eine Reihe von vier verschiedenen Zahltypen, indem als oberster Begriff für die Zahl derjenige der Mannigfaltigkeit genommen wird.

Der genetischen Entwickelung der Typen lässt der Verfasser umgekehrt eine logische Ableitung derselben eben aus dem Begriff der Mannigfaltigkeit folgen.

Die gemeinten vier Typen sind eben diejenigen, welche auch bei Cantor als Träger seiner ganzen Theorie dienen. Der erste Typus ist die einheitliche, unteilbare Mannigfaltigkeit, welche sich mit ihrem Element deckt; der zweite ist die endliche, aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehend; drittens die unendliche erster „Mächtigkeit" oder die „abzählbare" Mannigfaltigkeit, endlich diejenige zweiter Mächtigkeit oder die stetige.

Diesen vier Typen correspondiren genau vier Typen von

Grössen, nämlich die einfache, zusammengesetzte, discrete und stetige Grösse.

Die Arbeit der Zukunft scheint dem Referenten zu sein, die gewaltige, zwischen dem dritten und vierten Typus herrschende Kluft durch eine Reihe scharf gesonderter Zwischentypen zu überbrücken; es wird das freilich von ihrer Verwendbarkeit für specifische mathematische Fragen abhängen.

Der Referent hebt am Schlusse noch einmal hervor, dass er auf eine systematische Besprechung der so inhaltsreichen Arbeit von vorn herein verzichtet hat; er hat nur Streiflichter auf einige Punkte werfen wollen, die ihm besonders bemerkenswert erschienen. My.

E. G. Husserl. Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen. I. Band. Halle a. S. C. E. M. Pfeffer (R. Stricker). XVI + 324 S. 8°.

Herr Husserl stellt im I. Bande seiner Philosophie der Arithmetik durch eine erschöpfende Analyse des Anzahlbegriffs den Sinn der Zahlenaussage fest und weist nach, wie wir in der Mehrzahl der Fälle nicht auf directe, an den Gegenständen geübte, sondern auf indirecte, auf Zeichen beruhende symbolische Zahlenbildung angewiesen sind, und wie aus dieser Thatsache die Notwendigkeit der Ausbildung einer arithmetischen Wissenschaft mit ihren verschiedenen Operationskreisen hervorgeht. Die Analyse des Anzahlbegriffs führt durch die Analyse der Begriffe Vielheit, Etwas, Einheit, Gleichviel, Mehr und Weniger. Die Vielheit ist ein Ganzes, dessen Teile durch collective Verbindungen geeinigt sind. Die collective Verbindung ist eine eigene, nicht aus dem Bewusstsein im allgemeinen oder aus der Zeit- oder Raumform oder aus der leeren Form der Verschiedenheit abzuleitende Relation, die in gewissen psychischen Acten, welche die Inhalte einigend umschliessen, ihren Bestand hat, und deren sprachlicher Ausdruck die Conjunction „und“ ist. Durch Reflexion auf den psychischen Act, welcher die Einheit der zum Begriffe verbundenen Inhalte bewirkt, erlangen wir die abstracte Vorstellung der collectiven Verbindung, und vermittelst

dieser bilden wir den Begriff der Vielheit als den eines Ganzen, das Teile in bloss collectiver Weise verbindet. Der Begriff der Vielheit enthält mit und in dem Begriff der collectiven Verbindung auch den durch eine Abstraction, deren Hauptinteresse auf die collective Verbindung gerichtet ist, gewonnenen Begriff eines Etwas. Der allgemeine Begriff der Anzahl entsteht aus dem Begriffe der Vielheit durch Unterscheidung der abstracten Vielheitsformen. Er ist der Gattungsbegriff, der aus der Vergleichung der von einander bereits unterschiedenen bestimmten Vielheitsformen oder Zahlen, als der Speciesbegriffe, entsteht. Der Begriff der Aequivalenz oder Gleichzahligkeit leistet für die Analyse des Zahlbegriffs nichts. Die Zahlenaussage bezieht sich nicht auf den Begriff der gezählten Gegenstände, sondern auf deren Inbegriff. Die Entstehung der natürlichen Zahlenreihe und der Ausbau eines Zahlensystems beruht auf dem Begriff der symbolischen Vorstellungen und Operationen. Alles Operiren, was über die allerersten Zahlen hinausreicht, ist nur ein symbolisches Operiren mit symbolischen Vorstellungen. Diese Thatsache zwingt zur Ausbildung des Zahlengebietes in Form eines Zahlsystems mit Herausgreifung einer symbolischen Bildung, der die systematische Stelle gegeben wird, und mit der Reduction aller andern Zahlformen auf diese durch die arithmetischen Operationen. — Husserl's Untersuchungen bezeichnen sich bescheiden als eine Vorbereitung zu einer systematischen Philosophie der Arithmetik. Der Verfasser schreitet aber in so klarer, verständiger und geduldiger Einzelforschung und in so sorgfältiger Kritik der vorhandenen Theorien und Meinungen von Problem zu Problem, dass in seinen Untersuchungen weitaus das Beste vorliegen möchte, was seit langer Zeit über die Grundlagen der Arithmetik geschrieben ist. Mi.

W. Preyer. Ueber den Ursprung des Zahlbegriffs aus dem Tonsinn und über das Wesen der Primzahlen. **Hamburg u. Leipzig. L. Voss. 36 S. 8⁰.**

Preyer's Abhandlung enthält einen Versuch, die psychische

Entstehung der Zahlen zu erklären und eine damit nur durch den von ihm erfundenen Begriff der Lückenzahlen lose verknüpfte Abhandlung über einige Primzahlgesetze. Nach Preyer's Ansicht entstehen die Zahlen normalerweise in erster Linie nicht durch Addition von Eins zu Eins, sondern durch das Hören und Vergleichen von Tönen. Die Töne $\underline{C}\,C\,G\,c\,e\,g\,i$ entsprechen den Zahlgefühlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und enthalten vier Ergebnisse der Tonvergleichung in der Empfindung, die Prime, die Octave, die Quinte, die grosse Terz und die natürliche Septime. Dann beginnen Wiederholungen. Den Lücken in der Bildung entstammen die Lückenzahlen 11, 13, 17 etc. Die wahre Natur der Primzahlen ist, dass sie Lückenzahlen sind. Sie lassen sich in zwei Reihen von der Form $6n+1$ (1, 7, 13 u. s. w.) und $6n+5$ (oder $6n-1$) (5, 11, 17 u. s. w.) ordnen. Jede Primzahl giebt, durch 6 geteilt, den Rest 1 oder 5 und schliesst mit einer der Ziffern 1, 3, 7, 9. Um zu bestimmen, ob eine so beschaffene Zahl der beiden Reihen ein Product von Primzahlen > 3 oder eine Primzahl sei, genügt es, zu untersuchen, ob sie der Form: $G = P^2 + PN$ (in der G ein Product aus Primfactoren >3, P Primzahl, N eine gerade Zahl oder 0 ist) genügt. Aus der abgeleiteten Formel $P = -\frac{N}{2} \pm \sqrt{\frac{N^2}{4} + G}$, die, falls P Quadratzahl ist, in die Formel $P = \sqrt{G}$ übergeht, ergiebt sich, dass das Quadrat jeder Primzahl >3 von der Form $6n+1$ ist, und dass die Quadrate der Primzahlen in der ersten Reihe zwei Unterreihen mit der Differenz 72 bilden. Auch die Aufgabe, die Anzahl aller Primzahlen $<z$ zu bestimmen, löst sich mit Hülfe der zwei Reihen leicht. — Die von Preyer gegebene Arithmogenesis, die von Kant's anfechtbarem Satze ausgeht, dass die Arithmetik die Wissenschaft der reinen Zeit sei, und die sich auf die Beobachtung kleiner Kinder beruft, dürfte auf allgemeine Zustimmung kaum rechnen können. Dass Zahlen auf Tonempfindungen beruhen, erscheint mindestens zweifelhaft. Mi.

O. Stolz. Grössen und Zahlen. Rede. Leipzig. B. G. Teubner. 30 S. 8°.

Herr Stolz giebt einen geschichtlichen Ueberblick über die Entwickelung des Grössen- und Zahlbegriffs mit Hervorhebung der Bedeutung der Hamilton'schen Quaternionen und des Verdienstes, das sich Frobenius um Feststellung dieser Bedeutung erworben hat. Die allgemeine Arithmetik trägt in sich selbst ihren Abschluss, so dass man einer Bereicherung derselben nicht entgegenzusehen hat. Auf sie folgt die Theorie der Quaternionen, an Bedeutung sie zwar nicht erreichend, aber immerhin merkwürdig als Denkmal genialen Scharfsinns und wertvoll für geometrische und mechanische Untersuchungen. Mi.

H. B. Fine. The number-system of algebra treated theoretically and historically. Boston and New York. Leach, Shewell and Sanborn. IX + 131 S. 8°.

Das kleine Buch Fine's ist eine kurze Darlegung des Zahlbegriffs in seinen verschiedenen Gestaltungen, ganze positive Zahl, negative Zahl, Bruch, Irrationalzahl etc., wie er sich ohne jede philosophische Betrachtung einfach aus den Operationen der Arithmetik und Algebra ergiebt. Fine schliesst sich in seiner Entwickelung des Zahlbegriffs an Peacock, Grassmann, Weierstrass, Thomae und vor allem an Hankel und Cantor an. Mi.

W. B. Taylor. A question in mathematical nomenclature. Washington Bull. XI. 590-591.

Gegen den Gebrauch der Bezeichnung Quadrat und Kubus (oder Würfel) für die zweite und dritte Potenz einer Zahl. Lp.

Ventura Reyes y Prósper. El raciocinio a maquina. Progreso mat. I. 217-220.

G. Vivanti. Sull' infinitesimo attuale. Riv. di Mat. I. 135-153.

R. Bettazzi. Osservazioni sopra l'articolo del dott. G. Vivanti „Sull' infinitesimo attuale“. Riv. di Mat. I. 174-182.

G. Vivanti. Ancora sull' infinitesimo attuale. Riv. di Mat. I. 248-255.

Nach einer Uebersicht über die verschiedenen Definitionen des Unendlichkleinen, unter welchen der von Poisson aufgestellten der Vorzug gegeben wird, bespricht Herr Vivanti den Unterschied zwischen dem potentialen (variablen) und dem actualen (constanten) Unendlichkleinen und legt den Cantor'schen Beweis für die Nichtexistenz des letzteren dar. Zu demselben Resultate führt den Verfasser eine Kritik der Versuche, die Existenz des actualen Unendlichkleinen auf den Gebieten der geometrischen Wahrscheinlichkeitstheorie und der Cantor'schen transfiniten Zahlen, oder mit philosophischen Gründen zu beweisen. Dabei wird auch der Zusammenhang dieser Frage mit dem Postulat des Archimedes erörtert unter Berücksichtigung der von Bettazzi und Veronese gegebenen Definitionen des Stetigen. Im ganzen gelangt der Verfasser zu dem Schlusse: Im Gebiete der realen Grössen werden wir durch nichts, auch nicht durch die Anforderungen der Infinitesimal-Rechnung, zur Annahme der Existenz actualer unendlich kleiner Grössen genötigt. Dagegen erscheinen als besonderes Gebiet solcher Grössen die von Stolz definirten Momente der Functionen.

Herr Bettazzi giebt eine von der des Herrn Vivanti abweichende Definition des Actual-Unendlichkleinen und sagt: Wenn die Existenz desselben durch die von Herrn Vivanti angegriffenen Argumente auch nicht bewiesen wird, so wird sie durch jene Angriffe doch auch nicht widerlegt. Nicht um den Beweis der Existenz, sondern um den der Nichtexistenz handelt es sich, und dieser kann, solange dem streitigen Begriff kein innerer Widerspruch nachgewiesen ist, nicht als geführt erachtet werden.

Herr Vivanti stellt schliesslich einige Missverständnisse richtig, zu welchen einzelne, zu kurz gefasste Stellen seines Aufsatzes Anlass gegeben hatten, weist auf die Bedeutung der behandelten Frage hin, die den Kernpunkt philosophischer Untersuchungen aller Zeiten gebildet habe, und betont den inneren Widerspruch, den Cantor zwischen dem Begriff actualer unendlichkleiner Strecken und der Stetigkeit einer endlichen Strecke

nachgewiesen hat, welche sich aus jenen soll zusammensetzen lassen. Dieser Widerspruch entscheidet die Frage auch vom gegnerischen Standpunkte aus. Schg.

E. Hafner. Die Anziehungs- und Abstossungskräfte in der Natur, ihr Entstehungsgesetz und ihre Beziehungen zur Bewegung. Glarus. Bächlin. 119 S. mit 1 Fig.-Taf. 8°.

Nach Hafner's Ansicht wohnt die Gravitationskraft den Massen nicht in unveränderlicher Intensität inne. Ihre Intensität hängt von dem Maasse gleichgerichteter (sympathischer) Bewegung ab. Die Gravitationskraft wirkt so, dass sympathisch bewegte Massen sich anziehen, antipathisch bewegte sich abstossen nach dem Maasse parallelen Fortschreitens und im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Abstände. Mi.

W. Gef. Die Wellen der Schwerkraft und ihre Wirkung auf die Wellen der Elektricität, des Lichts und auf die Körper. Heidelberg. A. Siebert. 36 S. 8°.

Hr. Gef construirt die Anziehungskraft vermittelst einer Atomtheorie und gründet auf diese eine Wellentheorie, die auf Erscheinungen der Elektricität, des Lichtes und auf die Körper angewandt wird. Ein Element ist, nach Gef, eine Bewegungsart, die sich nicht in Bewegungsarten, aus denen sie hervorgeht, zerlegen lässt. Die kleinsten Teile der Elemente heissen Molecüle; die Molecüle zerfallen in Atome, diese in Unteratome u. s. f. ins Unendliche. In den Zwischenräumen der Atome schwingen wiederum Atome und in deren Zwischenräumen Unteratome u. s. f. Die gleiche Bewegungsart umgiebt ein Atom und erfüllt seine Zwischenräume. Die Bewegung, die in einem Atom als Bewegung der Unteratome besteht, fehlt innerhalb des Atoms der Bewegungsart, welche das Atom umgiebt und in seinen Zwischenräumen besteht. Das Mehr an Bewegung ausserhalb des Atoms über die gleiche Bewegungsart innerhalb des Atoms veranlasst einen allseitigen Druck auf das Atom. Eine jede

Ortsveränderung eines Atoms hat eine Druckveränderung auf die Nachbaratome und dadurch eine Bewegungsveränderung desselben zur Folge. Diese übertragen die Bewegung weiter, die sich kugelschalenförmig ausbreitet. Die Bewegung hindert die Teilatome an fortschreitender Bewegung. Durch die von den Teilatomen verbrauchte Arbeit verliert die Bewegung selbst an Kraft. Zwei Atome haben daher den Einfluss auf einander, dass sie diese Bewegung auch in der Richtung zu den Nachbaratomen vermindern. Dadurch trifft jedes Atom vom Nachbaratom aus ein geringerer Druck; die demnach stärkere Bewegung auf der entgegengesetzten Seite bewirkt eine Bewegung des Atoms zum Nachbaratom hin; der Druck, der diese Bewegung veranlasst, ist die Anziehungskraft. Mi.

W. W. Rouse Ball. A hypothesis relating to the nature of the ether and gravity. Mess. (2) XXI. 20-24.

Der Verf. zieht zur Erklärung die vierte Dimension herbei. „Mein Ziel ist, anzudeuten, dass diese und ähnliche Schwierigkeiten überwunden werden, wenn wir, indem wir in einer vierten Dimension uns um eine unendlich kleine Entfernung weiter bewegen, zu einem homogenen elastischen Körper gelangen."

Lp.

J. J. Walker. Of the influence of applied on the progress of pure mathematics. (Presidential address.) Lond. M. S. Proc. XXII. 4-18.

Rede bei der Abgabe des Vorsitzes. Der Redner erläutert sein Thema an der Geschichte der Logarithmen, einiger Curven, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Infinitesimalrechnung, der Lagrange'schen Reihe, der Bessel'schen Functionen, der Fourier'schen Reihe, des Ball'schen Cylindroids und einiger Eigenschaften des Potentials. Lp.

J. Croll. The philosophical basis of evolution. London. Edward Stanford. [Nature XLIII. 434-435].

O. J. Lodge, C. Lloyd Morgan, E. McLennan, E. T. Dixon, D. Wetterhan, T. T. Sherlock. Force and determinism. Nature XLIII. 491, 558; XLIV. 198, 249, 272-273, 319-320.

Die unter der Ueberschrift „Force and determinism" von Hrn. Morgan gegebene Anzeige des Buches von J. Croll (der inzwischen verstorben war) hebt die schwierigen philosophischen Fragen hervor, welche auf dem betrachteten Gebiete liegen. Nach Croll ist die Erzeugung der Bewegung ein Ding, die Bestimmung ihrer Richtung ein anderes und ein völlig bestimmtes Ding. Während nun Hr. Morgan auf die ungelösten Schwierigkeiten hinweist, die den Folgerungen aus dieser Anschauung entstammen, erklärt sich Hr. Lodge völlig einverstanden mit jenem Satze. „Die Richtung einer Bewegung bestimmen erheischt keinen Aufwand von Energie oder eine Arbeitsleistung. Die Energie kann längs gewünschter Kanäle geleitet werden, ohne dass man ihre Menge im geringsten ändert, gerade wie die Materie." „Es ist eine Function lebender Organismen, den Weg der Ueberführung der Energie zu richten; aber sie fügen ihrer Menge nichts hinzu." „Das Leben ist nicht Energie, es ist ein Bestimmer des Weges der Energie." An diese und ähnliche Ausführungen schliessen sich die nun folgenden Erörterungen an, bei denen es sich also im wesentlichen um das alte Problem der Erkenntnis des Verhältnisses zwischen Geist und Materie handelt. Lp.

Ch. A. B. Huth. Offener Brief an alle Mathematiker. Hamburg. Selbstverlag. 4 S. Fol.

In der wohlbekannten Reihe, welche die Zähler und Nenner der Näherungswerte des Kettenbruchs für $\sqrt{5}$ bilden, glaubt der Verf., das Wesen der ganzen Musik entdeckt zu haben, und knüpft seine Vorstellungen an den goldenen Schnitt. Lp.

Weitere Litteratur.

A. Capelli. La matematica nella sintesi delle scienze. Rivista di filosofia scientifica 1890. 232-245.
Bericht in F. d. M. XXI. 1889. 48.

E. D'Ovidio. Sulle origine e sullo sviluppo della matematica pura. Riv. di fil. sc. 1890. 33-51.

G. Garbieri. La matematica nello sviluppo delle scienze. Riv. di fil. sc. 1891. 222-231.

M. Rackwitz. Hegel's Ansicht über die Apriorität von Zeit und Raum und die Kant'schen Kategorien. Eine philosophische Kritik nach Hegel's „Phänomenologie des Geistes.“ Halle. C. E. M. Pfeffer. III + 82 S. 8°.

F. Watzlawik. Raum und Stoff, das Negative und Positive der Natur, zur Grundlage einer Ursachen-Wissenschaft dargestellt. Berlin. Claesen u. Co. 36 S. 8°.

A. Secchi. Die Einheit der Naturkräfte. Ein Beitrag zur Naturphilosophie. Autorisirte Uebersetzung von L. R. Schulze. 2. Aufl. (In 9 Lieferungen.) 1. Lfg. Braunschweig. Salle. 80 S. 8°.

Graf L. von Pfeil. Kometische Strömungen auf der Erdoberfläche und das Gesetz der Analogie im Weltgebäude. 4. Aufl. Berlin. Dümmler's Verlag. VIII + 315 S. mit 6 Karten. 8°.

M. Möller. Die Naturkraft oder die Bewegung der Masse, beherrscht durch äusseren Druck, und die Freiheit als Bethätigungsform geistiger Kraft, begrenzt und geleitet durch eigenen Willen. Philosophische Skizze. Hamburg. Friederichsen u. Co. XV + 176 S. 8°.

F. Kerz. Die Schalablagerungstheorie. Eine Erweiterung der Laplace'schen Nebularhypothese. Leipzig. Spamer. XVI + 64 S. 8°.

H. Driesch. Die mathematisch-mechanische Betrachtung morphologischer Probleme der Biologie. Eine kritische Studie. Jena. Fischer. V + 59 S. 8°.

B. Pädagogik.

F. Cajori. Historical sketch of the study of mathematics in the United States. Bibl. Math. (2) V. 74-78.

Enthält eine Uebersicht über die Entwickelung der mathematischen Studien in den Vereinigten Staaten. Der Verf. unterscheidet drei Perioden, nämlich die Colonialzeit (1636-1776), die Periode des englischen Einflusses (1776-1820) und die Periode des französischen Einflusses (1820-1876). Eine vierte Periode, die Zeit der selbständigen Forschungen, ist soeben begonnen. (Vgl. F. d. M. XXII. 1890. 5-6.) E.

V. Bobynin. Programme du cours de l'histoire des mathématiques à l'université de Moskwa. Bibl. Math. (2) V. 79-88.

Seit 1882 liest Herr Bobynin an der Universität zu Moskau über die allgemeine Geschichte der Mathematik. Der ganze Cursus wird in einem Jahre mit zwei wöchentlichen Vorlesungen durchgemacht; 33 Stunden sind dem Altertum und dem Mittelalter, 26 Stunden der Neuzeit gewidmet. Das Programm ist früher russisch veröffentlicht (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 87), wird aber hier in französischer Uebersetzung mitgeteilt und mit dem vom Herrn Eneström publicirten Programm (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 87) verglichen. E.

G. B. Halsted. On the teaching of the history of mathematics in the University of Texas. Bibl. Math. (2) V. 53.

Herr Halsted berichtet über die mathematisch-historischen Vorlesungen, welche er an der Universität zu Austin (Texas) gehalten hat. Diese Vorlesungen bilden nicht einen systematischen Cursus; vielmehr sind solche Fragen vorzugsweise historisch behandelt worden, welche für den Lehrer oder die Studenten von besonderem Interesse waren. E.

A. Hall. On problem solving. Washington Bull. XI. 598-600.

Beleuchtet den pädagogischen Wert des Lösens von Aufgaben, warnt aber auch vor der Ueberschätzung dieser Uebungen.

Lp.

Alb. Richter. Die Mathematik ist auf den höheren Lehranstalten als Hülfswissenschaft der Naturwissenschaft zu behandeln. Pr. (Nr. 281) Gymn. Wandsbeck. XXII S. 4°.

„Nicht das Wissen, sondern das Können, die formale Bildung ist Ziel des mathematischen Unterrichts; hierin hat die Mathematik einen Vorzug vor den übrigen Unterrichtsgegenständen im allgemeinen und vor den grammatischen insbesondere. Die formale Bildung durch den mathematischen Unterricht beschränkt sich nicht auf die mathematischen Stoffe, sondern überträgt sich auf alle andern.“ — Dies die herrschenden Ansichten, gegen welche sich der Verfasser wendet. Er gelangt dabei zu dem Ergebnis: Der mathematische Unterricht bietet allerdings eine über das mathematische Schulpensum hinausgehende formale Bildung, aber diese reicht nur so weit, wie bestimmte Raum- und Zahlenverhältnisse bei neuen Vorstellungen, namentlich physikalischen, wiederkehren. Wie bei jedem Unterricht ist auch beim mathematischen das Wissen der Hauptzweck. Darum ist die Mathematik nur als Hülfswissenschaft für die Naturwissenschaften beizubehalten und demgemäss inhaltlich und unterrichtlich zu gestalten. Stoff und Stundenzahl sind zu beschränken; auch im Bewusstsein der Schüler soll der mathematische Unterricht nur Vorbereitung für den physikalischen sein. Dabei können die bisherigen secundären Ziele, mögen sie die für die späteren Berufsarten notwendigen Kenntnisse oder den Ausdruck in der Muttersprache oder die moralischen Wirkungen betreffen, auch fernerhin beibehalten werden. Lg.

C. Burali-Forti. La risoluzione dei problemi di aritmetica nelle scuole secondarie inferiori. Rivista di Mat. I. 31-41.

Der Verfasser behauptet, dass man in den niederen Mittelschulen von jedem wissenschaftlichen Beweise, sowie von einer strengen Definition des Grössen-, Mass- und Zahlbegriffes absehen muss; diese Begriffe können nur anschaulicherweise eingeführt werden. Die zu behandelnden Probleme sollen sämtlich auf die fünf folgenden zurückgeführt werden:

1. Die Summe mehrerer gleichartigen Grössen (oder mehrerer Zahlen) zu finden.

2. Die Differenz von zwei ungleichen gleichartigen Grössen (oder von zwei ungleichen Zahlen) zu finden.

3. Das Zwei-, Drei-, . . ., m-fache einer Grösse (oder einer Zahl) zu finden.

4. Die Hälfte, das Drittel, . . . einer Grösse (oder einer Zahl) zu finden.

5. Anzugeben, wie oft die kleinere von zwei ungleichen gleichartigen Grössen (oder von zwei ungleichen Zahlen) von der grösseren subtrahirt werden darf, und welche Grösse (oder Zahl) übrig bleibt.

Vi.

Chr. Krenzlin. Ueber die Verwendung des geschichtlichen Elements im physikalischen Unterrichte der höheren Lehranstalten. Pr. (Nr. 260) Realgymn. Nordhausen. 16 S. 4°.

Soll das Geschichtliche im physikalischen Unterricht zur Geltung kommen, so müssten nach Ansicht des Verf. folgende Gesichtspunkte ins Auge gefasst werden:

I. Darstellung einzelner hierzu geeigneter Abschnitte der Physik nach ihrer historischen Entwickelung.

II. Biographien hervorragender Physiker.

III. Kurze, aber zusammenhängende und übersichtliche Darstellung der Entwickelungsperioden.

IV. Lectüre und Besprechung einzelner Abschnitte aus Schriften bedeutender Physiker aller Zeiten.

Die Lehre vom freien Fall, der Centralbewegung, die Entwickelung der Astronomie etc. ad I, die Geschichte der Physik im Altertum ad III werden als Musterbeispiele vorgeführt, und

im übrigen wird auf brauchbare Geschichtswerke wie die von Poggendorff und Heller verwiesen. — Dürfte auch nicht überall zu so ausführlichen geschichtlichen Betrachtungen die nötige Zeit vorhanden sein, so wird doch jeder Lehrer der Physik die gegebenen Anregungen dankbar annehmen und verwerten können.

Lg.

B. Wagner. Methodischer Lehrplan der Anstalt für den Unterricht in der Mathematik und im Rechnen. Pr. (Nr. 411) Realgymn. Fulda. 19 S. 4°.

Es werden für jede der Klassen Sexta bis Unter-Secunda zuerst das Jahrespensum im Anschluss an die gebrauchten Lehrbücher und sodann Methoden zur Behandlung desselben aufgestellt, welche im allgemeinen die Billigung der Fachcollegen finden dürften. Den Decimalbrüchen wird aber in Quinta noch ihre herkömmliche Stellung nach den gewöhnlichen Brüchen belassen, weil sich der Verfasser nicht von dem Begriff „Bruch" hat freimachen können. Auch bei den Logarithmen würde die allgemeine Darstellung der Zahlen als Systemzahlen die Uebereinstimmung der Kennziffer mit dem höchsten Stellenzeiger leichter erkennen lassen. Die Verteilung des Stoffes entspricht nicht ganz den neueren Bestimmungen, da in Unter-Secunda die Stereometrie fehlt, während die nach Ober-Secunda verlegten Reihen noch durchgenommen werden. Lg.

E. Roehr. Methodologisch-mathematische Aphorismen. III. Pr. (No. 197) Kath. Gymn. Oppeln. 16 S. 4°.

35 weitere einfache geometrische Aufgaben mit Lösung als Fortsetzung der Programmabhandlung von 1887. Cf. F. d. M. XIX. 1887. 56. Lg.

Weitere Litteratur.

W. W. Bobynin. Die Anwendung der Geschichte der Mathematik für die Lösung der pädagogischen Fragen. Phys.-math. Wiss. IX. (1890.) (Russisch.)

Felix Müller. Ueber litterarische Unternehmungen, welche geeignet sind, das Studium der Mathematik zu erleichtern. Naturf. Ges. Halle LXIV. 11.

J. C. V. Hoffmann. Die Mathematik als Hülfswissenschaft. Hoffmann Z. XXII. 241-251.

Sextus Empirikus. Wunde Punkte und fromme Wünsche im höheren und niederen Schulwesen. Mit Berücksichtigung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Hoffmann Z. XXII. 561-585.

M. Haberland. Die Stellung der Mathematik im System des erziehenden Unterrichts. Neustrelitz. Barnewitz. 16 S. 8°.

A. Höfler. Bemerkungen zu den Berliner Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichtes. Mit besonderer Beziehung auf Mathematik und Naturwissenschaften. Rede. Wien. Hölder. 38 S. 8°.

F. Kraft. Die Mathematik der Zukunft. Ein Beitrag zur Schulreform. Hoffmann Z. XXII. 537-547.

Der Verf. erwartet das Heil von der allgemeinen Einführung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre.

A. Schülke. In welcher Weise sollen Mathematik und Physik auf höheren Schulen betrieben werden? Hoffmann Z. XXII. 410-421.

Plassmann. Zur Ausbildung der Lehrer für Astronomie (bezw. astronomische Geographie) an Hochschulen (Sternwarten). Hoffmann Z. XXII. 15-16.

Jos. Hahn. Einfache Beispiele zu logarithmischer Berechnung. Hoffmann Z. XXII. 10-12.

K. Fink. Ueber die Einführung gewisser Grundbegriffe der projectiven Geometrie im Schulunterricht. Tübingen. Franz Fues. 26 S. gr. 8°. (Sonderdr.)

R. Wallace Stewart. Heat and light problems. University Correspondence College Tutorial Series. London. W. B. Clive and Co. (1890.) [Nature XLIII. 28.]

A. M. Bock. Die Theorie der Gravitation von Isenkrahe in ihrer Anwendung auf die Anziehung und Bewegung der Himmelskörper. Diss. München. 8°.

G. M. Minchin. „Nowhere can Mathematics be learned as at Cambridge“. Nature XLIII. 151.

Dieser Ausspruch Hopkinson's wird bezüglich der Geometrie angezweifelt. Lp.

Zweiter Abschnitt.

A l g e b r a.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

C. L. Landré. Algebraïsche hoofdstukken ter uitbreiding van de leerboeken over de elementaire analyse. Utrecht. Gebr. van der Post. 235 S. 8°.

Der Verfasser bezweckt mit der Herausgabe dieser Arbeit, eine Ergänzung zu den holländischen Lehrbüchern der algebraischen Analysis zu liefern. Demzufolge sind in dem relativ geringen Umfang sehr verschiedene Gegenstände zusammengestellt. Es mögen darunter Erwähnung finden: mehrere Reihen, speciell die Eisenstein'sche; Convergenz und Divergenz von Reihen; Ausgleichungs- und Näherungsformeln; symmetrische Functionen; Elimination; Gleichungen höheren Grades, welche algebraisch gelöst werden können; das Problem der Kreisteilung; Beweis des Satzes, dass die allgemeinen Gleichungen fünften und höheren Grades nicht algebraisch auflösbar sind. Die Darstellung dieser Gegenstände ist elementar, aber durchaus strenge gehalten.

Mo.

C. Alasia. Elementi della teoria generale delle equazioni ed in particolare delle equazioni di terzo e quarto grado e delle equazioni indeterminate. Napoli. 160 S. 8°.

G. PETERSEN. Teoria delle equazioni algebriche. Versione dal tedesco, autorizzata dall' autore, dei professori G. Rozzolino e G. Sforza. Vol. I. Parte I. Sulle equazioni in generale; Parte II. Sulla resoluzione algebrica delle equazioni. Napoli. Pellerano.

Bericht in Riv. di Mat. I. 103 - 105.

H. SCHEFFLER. Beiträge zur Theorie der Gleichungen. Leipzig. F. Foerster. 133 S. mit 1 Fig.-Taf. 8°.

H. SCHEFFLER. Beiträge zur Zahlentheorie, insbesondere zur Kreis- und Kugelteilung mit einem Nachtrage zur Theorie der Gleichungen. Leipzig. F. Foerster. XI + 285 S. mit 3 Fig.-Taf. 8°.

In den beiden vorliegenden Büchern wird eine grosse Anzahl arithmetischer und algebraischer Gegenstände behandelt, insbesondere die Auflösung algebraischer Gleichungen, die Theorie der algebraischen und transcendenten Zahlen, die der idealen Zahlen, die Gesetze der Primzahlen u. s. f. Die Darstellung dieser Gegenstände erfüllt jedoch nicht die Anforderungen wissenschaftlicher Strenge und Gründlichkeit; gerade, wo es sich um Schwierigkeiten handelt, hat Referent vielfach arge Irrtümer bemerkt. So glaubt z. B. im ersteren Buche S. 104 der Verfasser den folgenden Satz zu beweisen: Wenn eine Zahl α sich in ein unendliches Product von rationalen Brüchen, wie folgt:

$$\alpha = \frac{p_1}{q_1}\frac{p_2}{q_2}\frac{p_3}{q_3}\cdots$$

entwickeln lässt, und jede der im Zähler auftretenden ganzen Zahlen p_1, p_2, p_3 einen Primteiler enthält, welcher in keiner der ganzen Zahlen q vorkommt, so ist α irrational. Das Beispiel

$$p_n = \frac{2^{(n+1)!}-1}{2^{n!}-1}, \quad q_n = 2^{(n+1)!-n!}$$

widerlegt diesen Satz. Infolgedessen ist der Beweis für die Irrationalität von π unrichtig. Auch der später folgende Beweis für die Transcendenz von π ist unrichtig. Ht.

P. Molenbroek. Theorie der Quaternionen. Leiden. E. J. Brill. 284 S. 8°.

Das Studium der Quaternionen wird nach des Verfassers Ansicht wesentlich dadurch erschwert, dass einerseits die grundlegenden Schöpfungen Hamilton's zu ausführlich sind, andrerseits aber die Lehrbücher, welche sich zur Einführung in die neue Rechnungsweise empfehlen, die Theorie nicht genügend berücksichtigen. Das vorliegende Buch soll deshalb die Mitte zwischen diesen beiden Standpunkten einnehmen. Es schliesst sich denn auch im allgemeinen den Hamilton'schen Anschauungen völlig an. Zuerst wird der Begriff des Vectors, der Addition und der Subtraction von Vectoren und die Wirkung eines scalaren Operators erörtert. Hierbei tritt naturgemäss die Frage nach dem Resultat der Anwenduug des Symbols $\sqrt{-1}$ an einem Vector hervor. Der Verfasser betrachtet dieses Symbol als einen in einer unbestimmten Ebene wirksamen Operator, welcher einen Vector eine Vierteldrehung ausführen lässt, sodass unter der Grösse $\sqrt{-1}.\beta$ die Gesamtheit der aus β durch eine solche Drehung entstandenen Vectoren zu verstehen ist. Dieselben bilden einen „Vectorkreis", und das Symbol $\alpha+\sqrt{-1}\beta$ wird, hieran anschliessend, als ein „Vectorkegel" gedeutet, nämlich als die Summe des Vectors α mit jedem in dem Vectorkreis $\sqrt{-1}\beta$ enthaltenen Vector.

Die Theorie der Quaternionen wird in der Weise aufgebaut, dass der Quaternion $\alpha:\beta$ als ein Operator definirt wird, welcher den Vector α in β überführt, und erst nachdem die meisten Eigenschaften dieses Vectorenquotienten bewiesen sind, wird die viergliedrige Grundform für denselben hergeleitet. In gleicher Weise wird der Hamilton'sche Biquaternion

$$\frac{\alpha+\sqrt{-1}\beta}{\gamma} \quad \text{oder} \quad q+\sqrt{-1}q'$$

als ein Operator gedeutet, welcher den Vector γ in den Vectorkegel $\alpha+\sqrt{-1}\beta$ überführt.

Nachdem die Producte von Vectoren mit einander und mit Quaternionen definirt sind, wodurch die Gelegenheit geboten wird,

zu einer allgemeineren Deutung des Symbols $\sqrt{-1}\,\alpha$ zu gelangen, entwickelt der Verfasser im vierten Abschnitt eine Theorie der geometrischen Darstellbarkeit der imaginären Punkte im Raume. Zwei conjugirt imaginäre Punkte $\alpha \pm \sqrt{-1}\,\beta$ erscheinen hierbei als zwei zusammenfallende, aber in entgegengesetztem Sinne beschriebene Kreise. Hierdurch wird auch die geometrische Deutung von Figuren ermöglicht, welche mittels Gleichungen mit complexen Coefficienten dargestellt werden. Von diesen „allgemeinen" Gebilden werden die Ebene und die Gerade näher betrachtet und die Beziehung der Theorie des Verfassers zu der Tarry'schen dargelegt.

In den folgenden Abschnitten wird die Differentiation von Quaternionen, die lineare Vectorfunction eines Vectors und die Auflösung von Gleichungen mit Quaternionen behandelt. Der Logarithmus und die trigonometrischen Functionen eines Quaternionen werden im Anhange definirt.

Um das Eindringen in die Theorie möglichst zu erleichtern, sind alle Anwendungen vermieden. Mo.

P. Molenbroek. Ueber die geometrische Darstellbarkeit imaginärer Punkte im Raume. Hoppe Arch. (2) X. 261-282.

Wenn $\alpha = OA$ und $\beta = AB$ beliebige Vectoren sind, so versteht man nach Hamilton bekanntlich unter $\alpha + \beta$ den Vector OB und unter $\beta : \alpha$ die Gesamtheit derjenigen Operationen, welche erforderlich sind, um den Vector α in den Vector β überzuführen, d. h. eine gewisse Drehung, verbunden mit der erforderlichen Verlängerung oder Verkürzung des Vectors. Diese Definitionen führen unmittelbar zu dem Begriff des Symbols $x\alpha$, wo x eine reelle Zahl bedeutet. Die vorliegende Note hat den Zweck, zu zeigen, welche Bedeutung diesem Symbole beizulegen ist, wenn x eine complexe imaginäre Zahl ist. Man denke sich den Vector α in unzählige, dem ursprünglichen Vector an Länge und Richtung gleiche Vectoren gespalten und jeden der so entstehenden Vectoren in einer durch α gelegten Ebene um den Winkel $\frac{\pi}{2}$

gedreht. Auf diese Weise entsteht aus α die Gesamtheit der Radien einer auf α senkrechten Kreisfläche: ein sogenannter Circularvector. Die Wiederholung der eben beschriebenen Operation führt auf ein System von Kreisflächen, deren Ebenen sämtlich durch den Vector $-\alpha$ hindurchgehen; infolge dieses Umstandes sieht der Verfasser jenen eben construirten Circularvector als das geometrische Bild des Symbols $i\alpha$ an. Durch Zufügung eines reellen Vectors β ergiebt sich für das Symbol $i\alpha+\beta$ als geometrisches Bild das System aller Kanten eines gewissen schiefen Kegels mit einer Kreisbasis: ein sogenannter konischer Vector. Ferner zeigt der Verfasser, was man diesen Festsetzungen zufolge unter den imaginären Punkten einer Geraden, eines Kreises, einer Kugel, einer Ebene u. s. f. zu verstehen hat. So werden z. B. die imaginären Punkte einer Geraden durch Kreise dargestellt, deren Ebenen senkrecht zu jener Geraden stehen und deren Mittelpunkte in derselben enthalten sind. In einem Nachtrage wird gezeigt, wie diese Darstellung der imaginären Punkte sich auch ohne Zuhülfenahme der Theorie der Quaternionen ergiebt. Zugleich weist der Verfasser darauf hin, wie bei dieser Darstellung die Unterscheidung zweier conjugirt imaginären Punkte möglich ist, indem man mit der vorhin beschriebenen Spaltung des Vectors zugleich einen bestimmten Drehungssinn der einzelnen durch die Spaltung entstandenen Strahlen verbindet. Ht.

Th. B. van Wettum. Over den Quaternionmatrix.

Nieuw Archief XVIII. 168-186.

Die Matrize der rechtwinkligen Coordinatentransformation mit positiver Determinante wird derart umgestaltet, dass dieselbe mit der Quaternionenmatrize, welche der Verfasser im vorigen Bande des Nieuw Arch. näher betrachtet hat, identisch erscheint. Nun gehört aber jene Matrize zu einer konischen Drehung des Systems um eine bestimmte Axe, wodurch ein Vector OP in OP' übergehe. Es kann daher die Matrize der Coordinatentransformation als Symbol für den Vectorenquotienten $OP':OP$ betrachtet werden.

Das Product zweier derartigen Matrizen wird bestimmt und geometrisch erläutert. Der letzte Teil der Abhandlung enthält eine Kritik der Hamilton'schen Quaternionen. Ist $a+bi+cj+dk$ ein Radial (somit $a^2+b^2+c^2+d^2=1$), welches an einem Vector operirt, der nach dem Punkte x, y, z auf der Einheitskugel geht, so muss die Relation stattfinden $bx+cy+dz=0$. Der Verfasser betrachtet dieselbe irrtümlich als eine zwischen b, c, d stattfindende Beziehung und behauptet, ein Quaternion sei deshalb eigentlich ein „Ternion". Auch ist der Verfasser nicht einverstanden mit dem Wege, auf dem Hamilton zum Producte zweier Quaternionen gelangt; doch erhebt er keinen ernsten Einwand.

Mo.

A. Macfarlane. Principles of the algebra of physics. American Assoc. for the advancement of science Proc. XL. 65-117.

Der Verfasser, ein Schüler Tait's, bemerkt, dass die neueren Arbeiten auf dem Gebiete der Quaternionen sich nicht sowohl mit dem Ausbau dieser Theorie, als mit der Durcharbeitung ihrer Fundamente beschäftigen. Er findet die Ursache dieser Erscheinung in dem berechtigten Streben, sowohl die Principien als die Bezeichnungsweise der Quaternionentheorie zu vervollkommnen, und zeigt an mehreren Beispielen in eingehender Weise, wie namentlich im Gebiet der Determinanten und der Mechanik diese Principien sich in ihren Folgerungen mit anderweitigen Festsetzungen hinsichtlich der Vorzeichen in Widerspruch setzen, und welche Aenderungen getroffen werden müssen, um diese Widersprüche zu beseitigen. Er übersieht nicht die engen Grenzen, welche der Quaternionentheorie, verglichen mit der Ausdehnungslehre, im Gebiet der Determinanten gesteckt sind, dagegen sucht er die Vorwürfe, welche Gibbs und Hyde hinsichtlich der verhältnismässigen Unfruchtbarkeit der eigentlichen Quaternionen erheben, zu widerlegen. Zur Ausdehnungslehre übergehend, bemerkt er, dass der von Hyde an den Quaternionen-Gleichungen getadelte Mangel an Homogeneität in den Dimensionen auch in der Gleichung $p_2=p_1+\varepsilon$ zu finden sei, wo p_1 und p_2 Punkte bedeuten, ε aber eine Strecke. Auch will er den Massenpunkt

durch den Massenvector ersetzt wissen. Nun ist allerdings Hyde's Bemerkung, dass die Ausdehnungslehre sich durchweg den geometrischen Dimensionen anpasse, nicht zutreffend; Punkte und Strecken erscheinen z. B. gleichmässig als Grössen ersten Grades; allein diese Abweichung ist so nebensächlich, und ihre Notwendigkeit zeigt sich, besonders in den Anwendungen auf Mechanik, so deutlich, dass man sagen muss, dieselbe verdanke ihre Entstehung nicht sowohl einem Mangel, als einem Fortschritt der Theorie. — Dem Verfasser selbst schwebt eine die Quaternionen, Ausdehnungslehre und Determinanten umfassende allgemeine Analysis vor, welche besonders den Bedürfnissen der Physik gerecht werden soll. Diese allgemeine Analysis ist aber eben die Ausdehnungslehre selbst, wie längst anerkannt ist; und alle Versuche, andere Methoden im Sinne des Verfassers zu vervollkommnen, müssen von selbst dieser Theorie zustreben. Die Ueberlegenheit derselben den Quaternionen gegenüber liegt übrigens keineswegs allein, wie man aus den hier besprochenen Streitpunkten schliessen könnte, in ihrer grösseren Allgemeinheit, sondern, was noch wichtiger ist, in der unanfechtbaren Richtigkeit, Klarheit und Einfachheit ihrer Principien und der unvergleichlich grösseren Zweckmässigkeit ihrer Bezeichnungen. — Den Hauptteil der Arbeit bildet die Darstellung der oben erwähnten allgemeinen Theorie, welche im wesentlichen eine Streckenrechnung ist, die als Modification der Quaternionentheorie mit denselben Begriffen operirt wie diese, aber sich specieller den Bedürfnissen der Mechanik anpasst, und vor allem bequemere Bezeichnungen anwendet. — Von den Aeusserlichkeiten abgesehen, unterscheiden sich die Methoden des Verfassers von denen Grassmann's besonders durch den Verzicht auf die Rechnung mit Punkten. Auf die Beziehungen zur Ausdehnungslehre und die Abweichungen von der Quaternionentheorie ist überall an entsprechender Stelle aufmerksam gemacht, auch die Ausdehnungsfähigkeit der vorgetragenen Rechnungen auf den vierdimensionalen Raum in aller Kürze dargelegt. Die einzelnen Abschnitte behandeln: Addition, Subtraction und Multiplication der Vectoren und Quaternionen, Darstellung der Versoren durch Potenzreihen, Differentiation,

Matrizen, endlich Addition von Scalar- und Vectorgrössen, die von verschiedenen Punkten ausgehen. Schg.

C. H. Chapman. On the matrix which represents a vector. American J. XIII. 363-380.

Der Verfasser beschäftigt sich in dieser Arbeit mit den Eigenschaften der Matrize

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix},$$

welche als Operationssymbol die Bedeutung hat, die rechtwinkligen Componenten (x, y, z) eines Vectors ϱ aus denen des Einheits-Vectors (1, 1, 1) abzuleiten, und daher jenen Vector selbst vertreten kann. Das Product zweier Matrizen dieser Art besitzt commutative Eigenschaft. Je nachdem man zwei oder eine der Grössen x, y, z gleich Null, und die übrigen gleich 1 setzt, stellt die Matrize die Einheiten i, j, k, oder I, J, K der Quaternionentheorie dar. Zur Bezeichnung der einmaligen und zweimaligen cyklischen Vertauschung zwischen x, y, z werden die Symbole cy, cy^2 vor ϱ gesetzt; hinzugefügte Accente dienen zur Unterscheidung der rückläufigen Vertauschung. Hierauf wird die Scalarfunction $S\cdot\alpha\beta$ des Productes zweier Matrizen α und β, sowie die Vectorfunction $V(\alpha, \beta)$ (bei Hamilton $V\alpha\beta$) in ihrem Zusammenhange mit den Bestandteilen der Matrizen betrachtet. Allgemeinere Symbole cyklischer Vertauschung sind $cy^{\frac{3\vartheta}{2\pi}}$ und $cy'^{\frac{3\vartheta}{2\pi}}$. Dieselben stellen die Drehung eines Vectors um einen beliebigen Winkel ϑ dar und geben Anlass zur Lösung der Aufgabe, diejenige Matrize μ zu finden, für welche

$$\mu\varrho = cy^{\frac{3\vartheta}{2\pi}}\varrho$$

ist. Unter Anwendung einer neuen Abkürzung für obige Symbole werden dann ϱ und ϑ als Coordinaten einer Curve betrachtet, und schliesslich die Cosinussätze der ebenen und sphärischen Trigonometrie in einer gegen das Verfahren der gewöhnlichen

Quaternionentheorie abgekürzten Weise abgeleitet. Trotzdem haftet auch dem hier gemachten Versuch, letztere Theorie zu vervollkommnen, noch die ganze Schwerfälligkeit ihrer Bezeichnungsweise an, und immer wieder muss auf Grassmann's Abhandlung (Math. Ann. XII. 375) verwiesen werden, die deutlich zeigt, dass das Problem, die Quaternionentheorie äusserlich und innerlich zu vervollkommnen, durch Uebersetzung ihrer Symbolik in die Sprache und Bezeichnungsweise der Ausdehnungslehre eine Lösung findet, wie sie auch heute noch nicht besser gedacht werden kann. Schg.

J. W. Gibbs. On the rôle of quaternions in the algebra of vectors. Nature XLIII. 511-513.

P. G. Tait. Quaternions and the algebra of vectors. Nature XLIII. 535.

P. G. Tait. The rôle of quaternions in the algebra of vectors. Nature XLIII. 608.

J. W. Gibbs, P. G. Tait. Quaternions and the „Ausdehnungslehre“. Nature XLIV. 79-82, 105-106.

Eine Polemik zwischen den beiden Gelehrten, veranlasst durch eine gegen Herrn Gibbs gerichtete Stelle in der Vorrede zur dritten Auflage in Tait's „Quaternions“. In dem ersten Artikel setzt Hr. Gibbs die Zweckmässigkeit der von ihm gewählten Aenderungen an den Hamilton'schen Bezeichnungen auseinander, ohne jedoch, wie die Erwiderungen des Hrn. Tait zeigen, diesen zu überzeugen. Der zweite Artikel des Hrn. Gibbs beleuchtet in ruhiger und objectiver Art die Anteile von Hamilton und Grassmann an der Ausbildung der neuen Begriffe, erregt aber, wie nicht anders zu erwarten war, dadurch den Widerspruch des Hrn. Tait, der ja stets vermeintliche Rechte seiner Landsleute zu beschützen bereit ist. Lp.

A. Macfarlane. Principles of the algebra of vectors. Salem Press, Salem. Massachusetts.

Anzeige in Nature XLVII. 3; vergl. auch oben S. 78.

E. Busche. Ueber Kronecker'sche Aequivalenzen.
Hamb. Mitt. III. 3-7.

Bezeichnet man (nach Kronecker) zwei Zahlen a, b als äquivalent, $a \backsim b$, wenn ihre Differenz eine ganze Zahl ist, und betrachtet ein System von n homogenen linearen Aequivalenzen

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \backsim 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

wo die a_{ik} gegebene ganze Zahlen und die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu bestimmende Unbekannte bedeuten, so ist die Anzahl der Lösungen eines solchen Systems, unter der Voraussetzung, dass seine Determinante $R = |a_{ik}|$ von Null verschieden ist, gleich dem absoluten Werte dieser Determinante R. Der Beweis beruht auf einem Satze der Determinantentheorie (Baltzer § 7, 2). F.

A. Capelli. Sulla teoria degli irrazionali algebrici.
Napoli Rend. (2) V. 61-70.

Die in einer früheren Arbeit (Sulla teoria delle funzioni algebriche di più variabili, Napoli Rend. (2) IV. 297—303; F. d. M. XXII. 1890. 392) für algebraische Functionen bewiesenen Sätze werden hier auf irrationale, von einem gegebenen Rationalitätsbereich algebraisch abhängige Zahlen ausgedehnt.

Es sei C irgend ein Rationalitätsbereich, und es bedeuten $x_1, \ldots, x_n$ die Wurzeln einer Gleichung, deren Coefficienten $p_1, \ldots, p_n$ dem Bereiche C angehören. Bezeichnen wir als „irrationale Grössen von der λ^{ten} Ordnung in Bezug auf einen Bereich K" die Wurzeln einer im Bereiche K irreductibeln Gleichung von der λ^{ten} Ordnung, deren Coefficienten diesem Bereiche angehören, dann gelten die folgenden Sätze:

Gehört A dem Rationalitätsbereiche $(C, x_1, \ldots, x_n)$ an, und ist α eine in Bezug auf diesen Bereich irrationale algebraische Grösse, so gehört A dem Rationalitätsbereiche $(C, \alpha, p_1, \ldots, p_n)$ dann und nur dann an, wenn jede Vertauschung zwischen den x_i, welche α (d. i. die Coefficienten der die Grösse α definirenden Gleichung) unverändert lässt, die Zahl A (als Function der x_i betrachtet) ebenfalls unverändert lässt.

Sind α, β irrationale algebraische Grössen in Bezug auf den Bereich $(C, x_1, \ldots, x_n)$, die letzte von der λ^{ten} Ordnung, und lässt β jede Vertauschung zwischen den x_i zu, für welche α unverändert bleibt, so ist β eine irrationale algebraische Grösse in Bezug auf den Bereich $(C, \alpha, p_1, \ldots, p_n)$, und ihre Ordnung übertrifft nicht λ. Vi.

M. Lerch. Zur Didaktik der complexen Grössen. Casop. XX. 265. (Böhmisch.)

Der Verfasser leitet auf eine elegante Weise den Begriff der complexen Zahl $a+bi$ ab und weist schliesslich auf ihre Bedeutung für die Auflösung von Gleichungen hin. Die Schlussbemerkungen enthalten „Naives“, um des Autors Terminologie beizubehalten. Std.

K. Weierstrass. Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen. Berl. Ber. 1891. 1085-1101.

Wenn man den Coefficienten von $x^{n-\nu}$ in der Entwickelung des Productes $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ mit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_\nu$ bezeichnet, so lässt sich der Fundamentalsatz der Algebra dahin formuliren, dass zu irgend n gegebenen Grössen $C_1, C_2, \ldots, C_n$ stets ein System bestimmter Werte der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existirt, für welches die n Gleichungen

$$(1) \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n)_\nu = C_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen. Der so formulirte Satz wird nun in der vorliegenden Mitteilung „auf directeste Weise begründet durch Entwickelung eines Verfahrens, mittels dessen man, wenn $C_1, \ldots, C_n$ numerisch gegeben sind, n Zahlgrössen, die für $x_1, \ldots, x_n$ gesetzt die Gleichungen (1) befriedigen, mit Sicherheit berechnen kann, und zwar ohne dass zuvor die Existenz solcher Grössen bewiesen zu sein braucht“. Dieses Verfahren beruht im wesentlichen auf folgenden Ueberlegungen. Man darf sich zunächst auf den Fall beschränken, in welchem die Discriminante $\Delta(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ von

$$(2)\qquad f(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n$$

einen nicht verschwindenden Wert besitzt. Bezeichnet nun Δ_0 eine positive Zahl, die kleiner als $|\Delta(C_1, C_2, \ldots, C_n)|$ ist, so lässt sich die positive Grösse h_0 so bestimmen, dass

$$(3)\qquad |\Delta(A_1, A_2, \ldots, A_n)| > \Delta_0$$

ist, sobald die Bedingungen

$$(4)\qquad |C_1 - A_1| < h_0,\quad |C_2 - A_2| < h_0,\quad \ldots,\quad |C_n - A_n| < h_0$$

erfüllt sind. Es seien nun $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestimmte Zahlgrössen, und es mögen die aus ihnen abgeleiteten Zahlen

$$(5)\qquad A_\nu = (a_1, a_2, \ldots, a_n)_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Bedingungen

$$(6)\qquad |C_1 - A_1| < d_0,\quad |C_2 - A_2| < d_0,\quad \ldots,\quad |C_n - A_n| < d_0$$

erfüllen, wo d_0 eine bestimmte positive aus Δ_0, h_0 und $C_1, \ldots, C_n$ abgeleitete Zahl bedeutet, die $\leqq h_0$ ist. Man setze nun

$$(7)\qquad a'_\nu = a_\nu + \xi_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und bestimme $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ nach der Massgabe, dass die Entwickelung der Differenz

$$(8)\qquad f(x) - \prod_{\nu=1}^{n}(x - a'_\nu) = f(x) - \Pi(x - a_\nu - \xi_\nu)$$

nach Potenzen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mit den Gliedern zweiter Dimension beginnt.

Leitet man dann aus $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ die Zahlen $(a''_1, a''_2, \ldots, a''_n)$ in derselben Weise her, wie aus $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ die Zahlen $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ abgeleitet wurden, sodann in derselben Weise aus $(a''_1, \ldots, a''_n)$ die Zahlen $(a'''_1, \ldots, a'''_n)$ u. s. f., so findet man, dass $\lim\limits_{\lambda=\infty} a_\nu^{(\lambda)} = x_\nu$ eine bestimmte endliche Zahl ist, und dass die so gewonnenen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Gleichungen (1) befriedigen. Es handelt sich nun noch darum, das Zahlensystem $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ den Bedingungen (6) entsprechend zu bestimmen. Zu dem Ende nehme man n von einander verschiedene Zahlen $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$ willkürlich an und setze

$$(9)\qquad f_0(x) = \prod_\nu (x - a_\nu^{(0)}) = x^n + \sum_\nu C_\nu^{(0)} x^{n-\nu},$$

ferner

$$(10)\qquad f(x, \tau) = x^n + \sum_\nu C_\nu^{(\tau)} x^{n-\nu},$$

wobei

$$(11) \qquad C_\nu^{(\tau)} = \frac{(1-\tau)C_\nu^{(0)} + (1+ki)\tau C_\nu}{1+k\tau i}$$

ist. Dabei bedeutet k eine reelle Zahl, die so bestimmt ist, dass die Discriminante von $f(x, \tau)$ für jeden dem Intervalle $0 \ldots 1$ angehörenden Wert von τ nicht verschwindet und also, absolut genommen, grösser als eine angebbare positive Zahl bleibt. Indem man nun τ die Werte $0, \frac{1}{g}, \frac{2}{g}, \ldots, \frac{g-1}{g}, 1$ beilegt, unter g eine genügend grosse ganze Zahl verstanden, erhält man die Zahlensysteme

$$(12) \qquad \left(C_1^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)}, C_2^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)}, \ldots, C_n^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)}\right) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, g).$$

Kennt man nun für einen zwischen 0 und g liegenden Wert von λ ein den Bedingungen

$$(13) \qquad \left|C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} - (a_{\lambda 1}, \ldots, a_{\lambda n})_\nu\right| < d_0 \quad (\nu = 1, \ldots, n)$$

genügendes System von Grössen $a_{\lambda 1}, \ldots, a_{\lambda n}$, so kann man aus demselben ein den Bedingungen

$$(14) \qquad \left|C_\nu^{\left(\frac{\lambda+1}{g}\right)} - (a_{\lambda+1,1}, \ldots, a_{\lambda+1,n})_\nu\right| < d_0 \quad (\nu = 1, \ldots, n)$$

genügendes System von Grössen $a_{\lambda+1,1}, \ldots, a_{\lambda+1,n}$ ableiten. Da aber für $\lambda = 1$ das System

$$a_{11} = a_1^{(0)}, \quad a_{12} = a_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad a_{1n} = a_n^{(0)}$$

den Bedingungen (13) genügt (sobald g genügend gross gewählt ist), so erhält man schliesslich ein System

$$a_{g1} = a_1, \quad a_{g2} = a_2, \quad \ldots, \quad a_{gn} = a_n,$$

welches den Bedingungen (6) genügt. Die Bestimmung der Grössensysteme $a_{\lambda 1}, \ldots, a_{\lambda n}$ wird wesentlich erleichtert, wenn man die Grössen $a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$ als rationale Zahlen annimmt und zugleich $C_1, C_2, \ldots, C_n$ als rational voraussetzt. Von diesem Falle, wo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ rational sind, geht man dann leicht zu dem allgemeinen Falle über. Hz.

E. Phragmén. Ein elementarer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Stockh. Öfv. 113-129.

Die Recursionsformeln

$$G_0(u) = 1, \quad G_1(u) = 2u,$$
$$G_k(u) = 2uG_{k-1}(u) - G_{k-2}(u)$$

bestimmen eine ganze rationale Function k^{ten} Grades, für welche nach dem Modul $x^2 - ux + 1$ die Congruenz

$$x^k \equiv G_{k-1}(u)x - G_{k-2}(u) \qquad (\text{mod. } x^2 - 2ux + 1)$$

besteht. Es sei nun eine Gleichung n^{ten} Grades mit reellen Coefficienten vorgelegt, etwa

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1}x + A_n.$$

Mit Hülfe der obigen Formel erhält man dann die Congruenz

$$f(x) \equiv F(w, r)x + G(w, r) \qquad (\text{mod. } x^2 - 2wx + r^2),$$

wo G und F ganze rationale Functionen von w und r sind, nämlich

$$F(w, r) = r^{n-1}G_{n-1}\left(\frac{w}{r}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k r^{n-1-k} G_{n-1-k}\left(\frac{w}{r}\right),$$

$$G(w, r) = A_n - r^2\left[r^{n-2}G_{n-2}\left(\frac{w}{r}\right) + \sum_{k=1}^{n-2} A_k r^{n-2-k} G_{n-2-k}\left(\frac{w}{r}\right)\right].$$

Durch elementare Betrachtungen zeigt nun der Verfasser, dass eine Zahl $r = \varrho$ gefunden werden kann, für welche die beiden Gleichungen $F(w, \varrho) = 0$ und $G(w, \varrho) = 0$ eine gemeinsame Wurzel $w = \omega$ besitzen. Offenbar besitzt dann $f(x)$ den quadratischen Teiler $x^2 - 2\omega x + \varrho^2$, womit der gewünschte Nachweis geführt ist. Ht.

E. Amigues. Démonstration purement algébrique du théorème fondamental de la théorie des équations. C. R. CXII. 212-214.

Eine Modification des Cauchy'schen Beweises, deren Interesse darin besteht, rein algebraisch zu sein und trigonometrische Functionen zu vermeiden. Im Princip ist die Methode nicht wesentlich verschieden von der, welche Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen zu benutzen pflegte. (Vergl. auch F. d. M. XXII. 1890. 107.) F.

E. Carvallo. Démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations. Nouv. Ann. (3) X. 109-110.

Der Verfasser beabsichtigt, dem Cauchy'schen Beweise eine möglichst einfache, für den Unterricht geeignete Form zu geben. Dass der absolute Betrag jeder ganzen rationalen Function $f(z)$ ein Minimum besitzt, wird ohne Beweis vorausgesetzt. Um zu zeigen, dass dieses Minimum den Wert Null hat, fasst man das Quadrat des absoluten Betrages von $f(z)$ als ganze Function $F(z, z_1)$ von z und der zu z conjugirten Grösse z_1 auf und zeigt, dass, wenn $F(z, z_1)$ für ein bestimmtes Wertsystem (z, z_1) nicht verschwindet, sich stets zwei kleine Zahlen ζ, ζ_1 so wählen lassen, dass

$$F(z+\zeta,\ z_1+\zeta_1) < F(z, z_1).$$

F.

É. Picard. Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées. C. R. CXIII. 356-358.

Sind n Gleichungen von der Gestalt

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben, deren linke Seiten reelle und in einem gewissen n-dimensionalen Gebiete D stetige Functionen von $x_1, \ldots, x_n$ darstellen, so lässt sich die Anzahl derjenigen in diesem Gebiete D gelegenen Lösungen jenes Gleichungssystems, für welche die Functionaldeterminante der Functionen $f_1, \ldots, f_n$ positiv ist, vermindert um die Anzahl der Lösungen, für welche diese Functionaldeterminante negativ ist, durch ein $(n-1)$-faches, über die das Gebiet D begrenzende Fläche zu erstreckendes Integral ausdrücken. Um zu zeigen, wie man mit Hülfe dieses Resultates auch die genaue Anzahl der Lösungen eines Gleichungssystems darstellen kann, legt der Verfasser die zwei Gleichungen $f(x, y) = 0$ und $\varphi(x, y) = 0$ zu Grunde und leitet aus diesen das System der vier Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \qquad z\frac{\partial f}{\partial x} + t\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z\frac{\partial \varphi}{\partial x} + t\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

mit den vier Unbekannten x, y, z, t ab. Da die Functionaldeterminante der vier linker Hand stehenden Functionen in Bezug auf x, y, z, t gleich dem Quadrat des Ausdrucks

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

wird und daher stets positiv ist, so liefert das in geeigneter Weise nach Kronecker gebildete dreifache Integral die gesuchte Zahl der gemeinsamen Wurzeln von $f=0$, $\varphi=0$ in dem gegebenen Gebiete D der xy-Ebene. Ht.

E. Picard. Sur la recherche du nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées. C. R. CXIII. 669-672.

L. Kronecker. Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées. C. R. CXIII. 1006-1012.

E. Picard. Du nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées. C. R. CXIII. 1012-1014.

In der ersten der drei Arbeiten bestimmt Herr Picard die Anzahl der Wertsysteme von n Grössen $(x_1, \dots, x_n)$, welche n algebraischen Gleichungen $f_1=0, \dots, f_n=0$ genügen und in einem Gebiete Δ der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $(x_1, \dots, x_n)$ enthalten sind. Die durch den möglichen Wechsel des Vorzeichens der Functionaldeterminante von $f_1, \dots, f_n$ bedingte Schwierigkeit überwindet er durch Ersatz des Systems von n Gleichungen mit n Unbekannten durch ein passendes System von $n+1$ Gleichungen mit $n+1$ Unbekannten, dessen Functionaldeterminante beständig positiv ist. Für den Fall $n=2$ werden die Integrale, welche die Anzahl der Wertsysteme darstellen, vollständig angegeben.

In der zweiten Note macht Kronecker darauf aufmerksam, dass die von Hrn. Picard gesuchte Zahl schon von ihm in seinen Mitteilungen an die Berliner Akademie vom 4. März 1869 und und 21. Februar 1878 bestimmt worden sei, und zeigt ausführlich, dass die Picard'schen Formeln sich aus den seinigen ableiten lassen.

Darauf erwidert Herr Picard, dass es ihm fern liege, die Wichtigkeit der Kronecker'schen Arbeiten über diesen Gegenstand zu unterschätzen, dass aber die letzteren noch eine Lücke enthielten, insofern als Kronecker den Bereich Δ zuerst in mehrere Gebiete teilen müsse, in deren jedem die Functionaldeterminante ihr Vorzeichen nicht wechsle, was für die numerische Berechnung jedenfalls unbequem sei, und dass er glaube, diese Lücke durch seine jetzige Arbeit ausgefüllt zu haben.

F.

H. A. Sayre. On the depression of an algebraic equation when a pair of its roots are connected by a given linear relation. Annals of Math. VI. 45-46.

Notiz über die Graderniedrigung einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$, wenn zwischen zwei Wurzeln a, a' derselben eine gegebene lineare Relation $a' = la + m$ besteht: man bringe $f(x)$ vermittelst des quadratischen Ausdruckes $x^2 - \{(l+1)a+m\}x + a(la+m)$ auf die Gestalt $\varphi(x) + \Theta$ und bestimme die gemeinsamen Wurzeln von $\varphi = 0$, $\Theta = 0$.

Ht.

Ivar Bendixson. Bestämning af de algebraiskt upplösbara likheter, i hvilka hvarje rot kan uttryckas som en rationel funktion af en af rötterna. Stockh. Öfv. 131-147.

Die Bedingungen für die algebraische Auflösbarkeit einer Gleichung, bei der jede Wurzel als rationale Function von einer unter ihnen darstellbar ist, drückt der Verfasser in folgender Form aus:

„Wenn $F(x) = 0$ eine irreducible Gleichung ist, für welche jede Wurzel x_ν eine rationale Function $\Theta_\nu(x_1)$ einer Wurzel x_1 ist, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung, damit die Gleichung algebraisch auflösbar sei, dass unter den Functionen Θ_ν ein System Θ, Θ_1, ..., Θ_q sich befinden muss, so beschaffen, dass jede Function Θ_ν sich in der Form

$$\Theta_\nu(x_1) = \Theta^{\alpha^\nu} \Theta_1^{\beta^\nu} \dots \Theta^{\varkappa^\nu}(x_1)$$

ausdrücken lässt, und zwischen den Functionen Θ, $\Theta_1, \dots, \Theta_q$ folgende Relationen bestehen:

$$\Theta_1\Theta(x_1) = \Theta^{\alpha_1}\Theta_1(x_1),$$
$$\Theta_2\Theta(x_1) = \Theta^{\alpha_2}\Theta_1^{\beta_2}\Theta_2(x_1) = \Theta^{\alpha_2'}\Theta_1^{\beta_2'}\Theta_2(x_1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Theta_q\Theta(x_1) = \Theta^{\alpha_q}\Theta_1^{\beta_q}\dots\Theta_{q-1}^{\varkappa_q}\Theta_q(x_1)$$
$$= \Theta^{\alpha_q'}\Theta_1^{\beta_q'}\dots\Theta_{q-1}^{\varkappa_q'}\Theta_q(x_1)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$= \Theta^{\alpha_q^{q-1}}\Theta_1^{\beta_q^{q-1}}\dots\Theta_{q-1}^{\varkappa_q^{q-1}}\Theta_q(x_1)\text{“.}$$

Der Verfasser giebt für diesen Satz einen Beweis, welcher an den von Abel in der Abhandlung: „Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement“ dargestellten Gedankengang anknüpft. Die algebraische Auflösbarkeit ist in der That gleichbedeutend mit der Möglichkeit, die gegebene Gleichung nach gewissen Regeln auf ein System von „einfachen Abel'schen Gleichungen“ zu reduciren. Bdn.

A. Pellet. Sur les équations abéliennes. C. R. CXII. 1196-1197, 1249-1253.

Ist Δ die Discriminante einer Abel'schen Gleichung $f = 0$ vom geraden Grade $2m$, so zerfällt f bei Adjunction von $\sqrt{\Delta}$ in 2 Factoren vom gleichen Grade m. Bildet man die Discriminanten δ, δ_1 dieser beiden Factoren, so ist $\Delta = d^2\delta\delta_1$, wo d eine rationale Grösse bedeutet. Beispielsweise ist im Falle der Gleichung $\frac{x^p-1}{x-1} = 0$ die Discriminante $p^{p-2} = d^2\delta\delta_1$, und hieraus folgt, dass δ die Gestalt

$$\pm(bp - a\sqrt{p})p^k(a - b\sqrt{p})^{2k_1}$$

haben muss, wo a und b die kleinsten Lösungen der Gleichung $a^2 - b^2p = -1$ sind, und wo k eine ganze positive, k_1 irgend eine ganze Zahl bedeutet.

Die zweite Note verallgemeinert diese Betrachtung; statt der Wurzel aus der Discriminante wird ein gewisses Product

gebildet, dessen q^{te} Potenz eine rationale Grösse ist, und bei dessen Adjunction die linke Seite f der Abel'schen Gleichung in q Factoren gleichen Grades zerfällt. Ht.

F. Mertens. Ueber die Irreductibilität der Function $x^p - A$. Monatsh. f. Math. II. 291-292.

Sehr einfacher, rein arithmetischer Beweis des von Abel herrührenden Satzes, dass die Function $x^p - A$, in welcher p eine Primzahl bezeichnet, in einem gegebenen Rationalitätsbereiche nur dann reductibel ist, wenn A in demselben eine p^{te} Potenz ist.

Wenn

$$x^p - A = g(x).h(x),$$

so lassen sich für die Resultante von $g(x)$ einerseits und

$$x^p = A + g(x).h(x)$$

andererseits zwei Ausdrücke angeben, aus deren Gleichsetzung man schliesst, dass A eine p^{te} Potenz ist. F.

U. Scarpis. Il problema della divisione della circonferenza esposto elementarmente. Savona. Bertolotto. 72 S.

Eine möglichst elementare, sehr sorgfältig durchgeführte Darstellung der Theorie der Kreisteilung. Nur einen Zweifel hegen wir über die Stichhaltigkeit des Beweises des Theor. II S. 48, welches wohl eher auf die Irreductibilität der Kreisteilungsgleichung gegründet werden dürfte. Vi.

Ch. Biehler. Sur la division des arcs en trigonométrie. Sur les équations binômes. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Vergl. F. d. M. XXI. 1889. 91, XXII. 1890. 108.

S. Gatti. Delle equazioni aventi le radici in progressione geometrica. Bari. Avellino. IV u. 63 S. 8°.

Es werden notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingungen

dafür aufgestellt, dass die Wurzeln einer Gleichung eine geometrische Progression bilden. Vi.

FR. MEYER. Ueber ein Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen. Gött. Nachr. 1891. 279-286.

Der Verfasser beweist zunächt den folgenden Satz: Ist

$$f_0 = a_0 + \binom{n}{1} a_1 \lambda + \binom{n}{2} a_2 \lambda^2 + \cdots + a_n \lambda^n$$

eine binäre Form ungerader Ordnung $n = 2\nu + 1$, und bildet man die Reihe der Ueberschiebungen:

$$f_1 = (f, f)^2, \quad f_2 = (f_1, f)^4, \quad f_3 = (f_2, f)^6, \quad \ldots, \quad f_\nu = (f_{\nu-1}, f)^{2\nu},$$

so erfüllen die Discriminanten der $\nu+1$ Formen f_i die Kette von Beziehungen

$$D(f) = D_0, \quad D(f_1) = D_0 D_1, \quad D(f_2) = D_1 D_2, \quad \ldots,$$
$$D(f_{\nu-1}) = D_{\nu-2} D_{\nu-1}, \quad D(f_\nu) = D_{\nu-1},$$

wo sämtliche D irreducible Invarianten der Form f_0 sind. Zum Beweise denke man sich die auftretende Doppelwurzel $f_i = 0$ durch lineare Transformation nach 0 verlegt und berücksichtige die Thatsache, dass die beiden ersten Coefficienten j_i, j'_i der Covariante f_i sich als Determinanten von der Gestalt

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots, & a_{i-1}, & a_i \\ a_1, & a_2, & \ldots, & a_i, & a_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_i, & a_{i+1}, & \ldots, & a_{2i-1}, & a_{2i} \end{vmatrix} \quad \text{bez.} \quad \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots, & a_{i-1}, & a_{i+1} \\ a_1, & a_2, & \ldots, & a_i, & a_{i+2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_i, & a_{i+1}, & \ldots, & a_{2i-1}, & a_{2i+1} \end{vmatrix}$$

darstellen lassen. Das gleichzeitige Verschwinden dieser beiden Determinanten findet nach einem bekannten Determinantensatze nur dann statt, wenn entweder die beiden ersten Coefficienten j_{i-1}, j'_{i-1} von f_{i-1}, oder wenn die beiden ersten Coefficienten j_{i+1}, j'_{i+1} von f_{i+1} gleich Null sind, und damit ist die obige Zerlegung der Discriminanten bewiesen. Um die Irreducibilität der Invarianten D zu zeigen, wird eine neue Darstellung derselben als Resultante einer gewissen Anzahl von Gleichungen benutzt; die Abzählung der Grade in den Coefficienten a der Grundform liefert

dann das gewünschte Resultat. Nunmehr gilt das weitere bemerkenswerte Theorem, dass die $\nu+1$ Gleichungen $f_0=0, f_1=0, f_2=0, \ldots, f_\nu=0$ eine unveränderliche, d. h. von der Wahl der Coefficienten a unabhängige Gesamtanzahl von reellen Wurzeln besitzen. Zum Beweise beachte man, dass die Bedingung $D_{i-1}=0$ sowohl in $f_{i-1}=0$ als auch in $f_i=0$ das Zusammenfallen zweier Wurzeln nach sich zieht. Der Verfasser lässt dann die Invariante D_{i-1} vermöge Variation der Coefficienten a durch 0 hindurchgehen und führt den Nachweis, dass von jenen beiden Wurzelpaaren stets eines reell, das andere imaginär bleibt.

Für Gleichungen vom geraden Grade n giebt es ein entsprechend einfaches Theorem nicht, da in diesem Falle die letzte zu benutzende Form, nämlich $f_{\frac{n}{2}}$, eine Invariante ist und somit, wenn diese Invariante durch 0 geht, die durch Nullsetzen der vorletzten Form entstehende Gleichung $f_{\frac{n}{2}-1}=0$ reelle Wurzeln verlieren oder gewinnen kann, ohne dass ein Ausgleich stattfindet. Ht.

A. E. Pellet. Sur la réduction des fonctions entières algébriques. S. M. F. Bull. XIX. 48-52.

Der Verfasser beweist in der vorliegenden Note die folgenden Sätze: 1) Der Grad der Galois'schen Resolvente einer Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten ist ein Multiplum der Grade der irreducibeln Factoren, in welche sich die linke Seite der Gleichung nach irgend einem Primzahlmodul zerlegt. 2) Die Discriminante einer ganzzahligen Function $f(x)$ ist quadratischer Rest oder Nichtrest der Primzahl p, je nachdem die Anzahl der irreducibeln Factoren geraden Grades von $f(x)$ (mod. p) ungerade oder gerade ist. Die Sätze werden an einigen Beispielen erläutert. Hz.

H. Willotte. Le théorème de Sturm déduit des imaginaires de Cauchy (Note extraite des manuscrits de M. Despeyrous). Toulouse Mém. (9) III. 44-57.

Es sei $f(z) = 0$ eine Gleichung mit reellen Coefficienten; um die zwischen zwei reellen Grössen $z = a$ und $z = b$ gelegenen reellen Wurzeln dieser Gleichung ihrer Zahl nach zu bestimmen, setzt der Verfasser $f(x+iy) = M+iN$ und wendet dann den Cauchy'schen Satz, dem zufolge das Verhalten des Quotienten $\frac{N}{M}$ längs der Begrenzung eines Gebietes der complexen z-Ebene über die Anzahl der in diesem Gebiete gelegenen Wurzeln Aufschluss giebt, auf ein schmales Rechteck an, welches das zwischen $z = a$ und $z = b$ gelegene Stück der reellen Axe zur Mittellinie hat, und in welchem keine imaginäre Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ gelegen ist. Schrumpft das Rechteck auf die Mittellinie zusammen, so ergiebt sich die gesuchte Anzahl der reellen Wurzeln gleich der Differenz zwischen der Anzahl von Malen, für welche $\frac{f'(x)}{f(x)}$ beim Unendlichwerden von einem negativen zu einem positiven Werte übergeht, und der Anzahl von Malen, für welche das Umgekehrte zutrifft. Dieses Resultat des Verfassers ist jedoch direct einzusehen, da nach dem Satze von Budan der letztere Fall überhaupt nicht möglich ist. Schliesslich zeigt der Verfasser, dass die erhaltene Differenz mit der Zahl der Zeichenwechsel übereinstimmt, welche die bekannte Sturm'sche Reihe zwischen $z = a$ und $z = b$ verliert.

Ht.

W. A. Steklow. Ueber obere und untere Grenzen der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen und deren Absonderung. Charkow Ges. (2) III. 103-125. (Russisch.)

Ist die gegebene Gleichung

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

so muss man nach Herrn Steklow für eine gegebene Grösse k_1 folgende Ausdrücke nach einander ausrechnen:

$$k_2 = k_1(A_1 + k_1),\quad k_3 = k_1(A_2 + k_2),\quad \ldots,\quad k_{n-1} = k_1(A_{n-2} + k_{n-2}).$$

Ist k_1 grösser als die grösste positive Wurzel, dann haben wir

$$A_n > -k_1(A_{n-1} + k_{n-1}).$$

Ist zwischen zwei Grössen k'_1 und k''_1 eine gerade Anzahl von Wurzeln oder gar keine enthalten, so wird

$$A_n \gtreqless -k'_1(A_{n-1}+k'_{n-1}), \quad A_n \gtreqless -k''_1(A_{n-1}+k''_{n-1}).$$

Giebt es aber eine ungerade Anzahl von Wurzeln zwischen k'_1 und k''_1, so wird

$$A_n \gtreqless -k'_1(A_{n-1}+k'_{n-1}), \quad A_n \gtreqless -k''_1(A_{n-1}+k''_{n-1}).$$

Der Algorithmus ist also auch zum Absondern der Wurzeln anwendbar.

Zur Erläuterung werden einige Beispiele hinzugefügt.

Si.

Ch. Méray. Méthode directe fondée sur l'emploi des séries pour trouver l'existence des racines des équations entières à une inconnue par la simple exécution de leur calcul numérique. Darboux Bull. (2) XV. 236-252.

Es sei $f(u)$ eine ganze rationale Function m^{ten} Grades von u, und es mögen die von einander verschiedenen Nullstellen der ersten Ableitung $f'(u)$ mit $b_1, b_2, \ldots, b_q$ bezeichnet werden. Wird dann $f(u_i) = x_i$ gesetzt, wo u_i ein von $b_1, b_2, \ldots, b_q$ verschiedener Wert ist, so giebt es bekanntlich eine nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_i$ fortschreitende Reihe $u = \mathfrak{P}_i(x - x_i)$ mit dem constanten Gliede u_i, welche die Gleichung $f(u) = x$ identisch erfüllt. Durch Abschätzen der absoluten Beträge der Glieder dieser Potenzreihe beweist nun der Verfasser, dass dieselbe sicher in einem Kreise convergirt, dessen Radius $R_i = \delta_i^m$ ist, wo δ_i die kleinste Entfernung des Punktes u_i von den Punkten $b_1, \ldots, b_q$ bedeutet. Mit Hülfe dieses Satzes wird der Beweis für die Wurzelexistenz, wie folgt, geführt: Man setze $f(b_1) = a_1, \ldots, f(b_q) = a_q$ und bestimme dann u_0 derart, dass $f(u_0) = x_0$ keinem der Werte $a_1, \ldots, a_q$ gleich wird. Ferner sei ϑ eine Grösse, welche kleiner ist als die halbe kleinste gegenseitige Entfernung der Punkte $a_1, \ldots, a_q, x_0$ und 0 in der complexen x-Ebene, und ε sei eine Grösse, welche kleiner ist als die kleinste gegenseitige Entfernung der Punkte $b_1, \ldots, b_q, u_0$ in der complexen u-Ebene, und welche ausserdem so klein bestimmt ist, dass für

alle den Ungleichungen $|u-b|<\varepsilon$ genügenden Werte von u die bezüglichen Ausdrücke $|f(u)-a|$ kleiner als ϑ ausfallen. Nun schlage man in der complexen x-Ebene um die Punkte $a_1, \ldots, a_q$ Kreise mit dem Radius ϑ, und in der complexen u-Ebene schlage man um die Punkte $b_1, \ldots, b_q$ Kreise mit dem Radius ε. Wenn dann x_i in der complexen x-Ebene ausserhalb der eben geschlagenen Kreise liegt, so liegt u_i ausserhalb der in der complexen u-Ebene geschlagenen Kreise, und folglich ist nach dem vorhin genannten Satze der Convergenzkreis der Potenzreihe $\mathfrak{P}_i(x-x_i)$ mindestens gleich $\varrho=\varepsilon^m$. Man schalte nun in der complexen x-Ebene zwischen den Punkten x_0 und 0 eine gewisse Zahl n von Punkten $x_1, \ldots, x_n$ ein, derart, dass die Entfernungen x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, $\ldots$, x_n0 die Grösse ϱ nicht überschreiten, und dass der gebrochene Linienzug $x_0x_1x_2\ldots0$ ganz ausserhalb der in der x-Ebene geschlagenen Kreise liegt. Die nach einander folgende Berechnung der Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$, $\ldots$ führt schliesslich auf die Berechnung der Grösse $\mathfrak{P}_n(-x_n)$, welche, für u eingesetzt, die Gleichung $f(u)=0$ befriedigt. Ht.

E. Kobald. Notiz, betreffend die Berechnung der Wurzeln numerischer Gleichungen. Monatsh. f. Math. II. 331-332.

a sei ein Näherungswert einer Wurzel der algebraischen Gleichung $f(x)=0$. Kürzt man die Entwickelung von $f(x)$ nach Potenzen von $(x-a)$ in der folgenden Weise ab:

$$f(x) = f(a)+\frac{(x-a).f'(a)}{1-(x-a)\cdot\dfrac{f''(a)}{2.f'(a)}},$$

so findet man für die gesuchte Wurzel x eine weitere Annäherung durch die Gleichung

$$x = a-\frac{1}{\dfrac{f'(a)}{f(a)}-\dfrac{\frac{1}{2}f''(a)}{f'(a)}},$$

welche in vielen Fällen weit genauer ist als die nach der gewöhnlichen Newton'schen Methode berechnete. F.

Th. Lohnstein. Eine Methode zur numerischen Auflösung einer algebraischen Gleichung. Schlömilch Z. XXXVI. 383-384.

Durch eine lineare Transformation kann man jede algebraische Gleichung in eine andere umwandeln, deren sämtliche reelle Wurzeln positiv sind. Ist dann ξ die grösste reelle Wurzel von $f(x)=0$, ξ_0 eine obere Grenze von ξ, und bezeichnet $P(x)$ die Summe der positiven Glieder von $f(x)$, so ergiebt sich aus einer einfachen Integralbetrachtung, dass

$$\xi_1 = \xi_0 - \frac{f(\xi_0)}{P'(\xi_0)}$$

zwischen ξ und ξ_0 liegt, also eine der Wurzel ξ näher liegende obere Grenze ist.

Setzt man demnach

$$\xi_2 = \xi_1 - \frac{f(\xi_1)}{P'(\xi_1)}, \quad \xi_3 = \xi_2 - \frac{f(\xi_2)}{P'(\xi_2)}, \quad \text{u. s. w.},$$

so nähern sich die Zahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 u. s. w. beständig der gesuchten Wurzel ξ, indem sie aber stets grösser als diese bleiben.

F.

G. Fouret. Sur la méthode d'approximation de Newton. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Vergl. F. d. M. XXII. 1890. 116.

R. Mehmke. Praktische Methode zur Berechnung der reellen Wurzeln reeller algebraischer oder transcendenter numerischer Gleichungen mit einer Unbekannten. Schlömilch Z. XXXVI. 158-187.

Die Arbeit hat nicht den Zweck, in theoretischer Hinsicht wesentlich Neues zu bieten; sie soll vielmehr dem praktischen Rechner eine Methode geben, durch welche er mit geringstem Zeitaufwande die Wurzeln einer vorgelegten Gleichung numerisch bestimmen kann. Vorausgesetzt wird hierbei die Kenntnis eines auf irgend eine Art gefundenen Näherungswertes (cf. Civilingenieur XXXV. 617, F. d. M. XXI. 1889. 93, 882). Die benutzte Nähe-

rungsmethode ist im wesentlichen die Newton'sche. Während aber nach dieser die einem kleinen Zuwachse δ des Näherungswertes x_0 entsprechende Aenderung der Function $F(x_0)$ berechnet wird, indem man nach den Regeln der Differentialrechnung $F'(x)$ bildet und dann den Wert x_0 einsetzt, benutzt Herr Mehmke zu diesem Zwecke die Einrichtung der üblichen numerischen Tafeln (Logarithmentabellen, Tafeln für Quadrat- u. Kubikzahlen u. s. w.), nach welcher zwischen zwei benachbarten Tafelwerten der Zuwachs der Function dem Zuwachse des Argumentes proportional gesetzt werden kann. Wächst also x_0 um δ, so kann man durch Interpolation Schritt für Schritt die Aenderung berechnen, welche infolge dessen jedes einzelne Glied von $F(x_0)$ und damit auch $F(x_0)$ selbst erfährt, und zwar sind alle diese Aenderungen δ proportional. Bezeichnet $S.\delta$ die Aenderung von $F(x_0)$, so findet man aus

$$F(x_0)+\delta.S = 0$$

die Correction

$$\delta = -\frac{F(x_0)}{S}.$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man successive genauere Werte von x. S braucht in den meisten Fällen nicht wiederholt berechnet zu werden.

Der Verf. giebt nun noch eine Reihe von Vorschriften und Beispielen, welche den Rechner in den Stand setzen sollen, die Auflösung in den einzelnen Fällen möglichst vorteilhaft zu gestalten. F.

E. Carvallo. Théorème fondamental pour la résolution numérique des équations. Nouv. Ann. (3) X. 429-433.

Das in der Ueberschrift gemeinte Theorem ist in einer früher erschienenen Abhandlung des Verf. ausführlich entwickelt (cf. F. d. M. XXI. 1889. 91). Die vorliegende Note enthält hierzu nur einige Ergänzungen, die sich auf die Fehlergrenze der berechneten Wurzeln beziehen. F.

D. E. MAYER. Sur les équations algébriques. Nouv. Ann. (3) X. 111-124.

Durch Betrachtungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird der Satz bewiesen: „Wenn in einer algebraischen Gleichung mit reellen oder imaginären Coefficienten der Coefficient der k^{ten} Potenz der Unbekannten dem absoluten Betrage nach grösser ist als die Summe der absoluten Werte der anderen Coefficienten, so besitzt die Gleichung $m-k$ Wurzeln, deren absoluter Betrag grösser als 1, und k Wurzeln, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist."

Ausserdem giebt der Verf. eine Methode zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

F.

M. MARTONE. Sulla risoluzione delle equazioni numeriche. Catanzaro. Maccarone. (1889.) 39 S. 8°.

Angabe einer Methode, welche zur Trennung der reellen Wurzeln der Gleichungen in vielen Fällen dient. Ob diese Methode praktisch nützlich sich erweist, bleibe dahingestellt.

Vi.

A. ADLER. Graphische Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade. Z. Oestr. Ing. u. Arch. XLII. 146-157.

Das Verfahren beruht darauf, dass die Wurzeln der Gleichung

$$z^4+pz^2+qz+r=0$$

gefunden werden können, indem man y aus den Gleichungen

$$y^2+x=0,\quad (x-m)^2+(y-n)^2=\varrho^2,$$

wo

$$m=\frac{p-1}{2},\quad n=-\frac{q}{2},\quad \varrho=\sqrt{m^2+n^2-r^2}$$

ist, bestimmt. Dann kann also y als die Ordinate der Schnittpunkte einer Parabel und eines Kreises angesehen werden.

F. K.

O. HÖLDER. Ueber den Casus irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades. Math. Ann. XXXVIII. 307-312.

Der Aufsatz giebt einen strengen Beweis dafür, dass keine kubische Gleichung, welche in einem reellen Rationalitätsbereiche irreductibel ist und eine positive Discriminante besitzt, durch einen irgendwie aus Wurzelzeichen combinirten, ohne Hülfe imaginärer Grössen zu berechnenden Ausdruck befriedigt werden kann. Die gegenteilige Annahme führt nämlich zu dem Schlusse, dass eine in einem reellen Rationalitätsbereiche irreductible Gleichung dritten Grades, bei welcher jede Wurzel reell und in jeder andern rational ist, reductibel würde bei der Adjunction eines reellen Radicals mit Primzahlexponenten aus einer Grösse des Rationalitätsbereiches. Die Unmöglichkeit des letzteren ergiebt sich dann aus dem folgenden allgemeineren Satze: „Eine in einem reellen Rationalitätsbereiche irreductible Gleichung n^{ten} Grades mit einer reellen Wurzel und von der Eigenschaft, dass jede ihrer Wurzeln in jeder anderen rational ist, kann nicht durch die Adjunction eines reellen Radicals mit Primzahlexponenten reductibel werden, es sei denn der Exponent gleich 2, in welchem Falle auch n durch 2 teilbar sein müsste."

Die Anwendung der Galois'schen Theorie führt den Verf. noch zu einer Verallgemeinerung des für kubische Gleichungen geltenden Satzes, nämlich zu folgendem Theorem: „Unter den in einem reellen Rationalitätsbereiche irreductiblen Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln sind die durch Quadratwurzeln auflösbaren die einzigen, bei denen eine Wurzel durch reelle Radicale dargestellt werden kann." F.

W. Burnside. Algebraical notes. Mess. (2) XXI. 26-28.

I. Ueber die Jacobi'sche Determinante zweier quadratischen Formen. Sind u und v quadratische Functionen von x, so ist bekanntlich

$$\left(u\frac{dv}{dx}-v\frac{du}{dx}\right)^2 = Au^2+Buv+Cv^2,$$

wo A, B, C Constanten sind. Beweis hierfür und Bestimmung von A, B, C.

II. Ueber das System simultaner Gleichungen:

$$\frac{ax+by+cz}{x} = \frac{bx+cy+az}{y} = \frac{cx+ay+bz}{z},$$

sowie das entsprechende für n Unbekannte. Lp.

J. H. Hamilton Dickson. The solution of the equation $\{(x-a)(x-b)\}^{\frac{1}{2}} + \{(x-c)(x-d)\}^{\frac{1}{2}} = e$. Edinb. M. S. Proc. IX. 13-23.

Setzt man $a+b-c-d = P$, $cd-ab = K$, so findet man x aus $(P^2-4e^2)x^2+2\{P(K-e^2)+2e^2(a+b)\}x+(K-e^2)^2-4e^2ab = 0.$ Die Lösung der Gleichung wird bis ins einzelnste erörtert, und interessante geometrische Erläuterungen werden angeschlossen.

Gbs. (Lp.)

Barisien. Concours d'admission à l'École Normale supérieure en 1889. Solution de la question d'Algèbre. Nouv. Ann. (3) X. 212-215.

Die gestellte Aufgabe lautet:

„Eine ganze rationale Function $f(x)$ vom siebenten Grade zu bestimmen, so dass $f(x)+1$ durch $(x-1)^4$ und $f(x)-1$ durch $(x+1)^4$ teilbar ist, und die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zu finden". Dieselbe wird auf drei verschiedene Arten gelöst (ausser von Herrn Barisien von dem Redacteur und von Herrn Brisse). Das Resultat ist:

$$f(x) = \frac{x}{16}(5x^6-21x^4+35x^2-35).$$

F.

G. Heppel. Quartic equations interpreted by the parabola. Lond. M. S. Proc. XXII. 416-423.

Im Anschluss an Arbeiten von Hoppe (Arch. d. Math. LXIX, F. d. M. XV. 1883. 58) und Hoffmann (Nouv. Ann. (3) VII, F. d. M. XX. 1888. 80) giebt der Verfasser eine Lösung der biquadratischen Gleichungen. Um eine kubische Gleichung zu lösen, hat sie Hr. Hoppe in einfacher Weise zu einer Gleichung vierten

Grades erweitert und dann gezeigt, dass die Wurzeln der letzteren die Ordinaten der Schnittpunkte einer festen Parabel und eines Kreises sind, dessen Mittelpunkt und Radius sich aus dem Parameter der Parabel und den Coefficienten der Gleichung leicht bestimmen lassen. — Die Wurzeln einer beliebigen biquadratischen Gleichung kann man nun betrachten als Ordinaten der Schnittpunkte eines Systems zweier Geraden, welche mit der Abscissen-Axe Winkel von 45° resp. 135° bilden, und einer Parabel, deren Parameter aber nicht mehr willkürlich, sondern Wurzel einer kubischen Gleichung ist. Man löst nun zunächst diese nach der Hoppe'schen Methode auf, d. h. man misst die Ordinaten der Schnittpunkte einer festen Parabel und eines aus den Coefficienten zu bestimmenden Kreises, ändert sodann in passender Weise die Längeneinheit, um dieselbe feste Parabel weiter benutzen zu können, und construirt das System der beiden sich schneidenden Geraden, deren Schnittpunkte mit der Parabel die gesuchten Wurzeln liefern. F.

M. d'Ocagne. Sur la représentation plane des équations à quatre variables. C. R. CXII. 421-423.

Die Gebilde, welche durch Gleichungen zwischen vier Variabeln $F(x, y, z, t) = 0$ von einer bestimmten, näher angegebenen Form definirt werden, lassen sich durch zwei Curven (X und Y) und durch zwei Curvensysteme (Z und T) in einer Ebene darstellen, in der Art, dass, wenn (x_0, y_0, z_0, t_0) eine Lösung der Gleichung $F = 0$ ist, die Verbindungslinie des bestimmten Punktes (x_0) der Curve X und des bestimmten Punktes (y_0) der Curve Y durch den Schnittpunkt der Curve (z_0) des Systems Z und der Curve (t_0) des Systems T hindurchgeht.

Als sehr einfache Anwendung wird die graphische Lösung der vollständigen Gleichung dritten Grades

$$t^3 + xt^2 + yt + z = 0$$

gegeben. F.

T. H. Miller. On the numerical values of the roots of the equation $\cos x = x$. Edinb. M. S. Proc. IX. 80-83.

Gbs.

E. Lampe, Bussell, Zerr. Solution of questions 10721, 10753. Ed. Times LV. 82-83.

Auflösung der Gleichungen

$$2^{\frac{1}{2}(n-1)}.\cos x.\cos 2x.\cos 3x \dots \cos\tfrac{1}{2}(n-1)x = 1,$$

$$2^{\frac{1}{2}(n-1)}.\sin x.\sin 2x.\sin 3x \dots \sin\tfrac{1}{2}(n-1)x = \sqrt{n}$$

für die Fälle $n = 7$, $n = 9$, $n = 11$.

Lp.

A. Seydler. Bemerkung über die Hamilton'sche Zahlenreihe. Casop. XX. 18. (Böhmisch.)

Enthält eine kritisirende Besprechung des in diesem Jahrb. XIX. 1887. 80 gelieferten Referates über J. J. Sylvester's und Hammond's diesbezügliche Abhandlung, wobei das dort erwähnte Paradoxon auf eine ganz reguläre Erscheinung reducirt wird.

Std.

Capitel 2.

Theorie der Formen (Invariantentheorie).

C. Platts. On certain classes of invariants, associated with linear differential equations. Quart. J. XXV. 300-335.

Die Abhandlung beschäftigt sich mit der formalen Untersuchung der „Seminvarianten" derjenigen Differentialform, welche von der linken Seite einer allgemeinen linearen Differentialgleichung mit einer unabhängigen Variable gebildet wird. Dem Inhalte nach ist die vorliegende Arbeit eng verwandt mit einigen von Hrn. Forsyth gelieferten (F. d. M. XX. 1888. 95, 98; XXI. 1889. 95), während das zu Grunde gelegte Princip einem von Halphen

an Sylvester gerichteten Briefe entnommen ist (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 91).

Die in Rede stehende Differentialform (Grundform) sei vorgelegt in der Gestalt:

$$X_n \frac{d^n u}{dx^n} + nX_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}X_{n-2}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + nX_1\frac{du}{dx} + X_0 u,$$

wo die X Functionen der unabhängigen Variable x bedeuten.

Es werden zwei bekannte Transformationen in Betracht gezogen:

$$\text{I.}\quad u = vf(x), \qquad \text{II.}\quad y = \int F(x)dx,$$

wo $f(x)$, $F(x)$ in eine Taylor'sche Reihe entwickelbare, im übrigen jedoch willkürliche Functionen sind. Die zugehörigen Invarianten der Grundform heissen Seminvarianten, da immer nur eine Variable transformirt wird, während die andere ungeändert bleibt. Beschränken wir uns hier etwa auf den ersten Fall, so geht die Grundform vermöge I. bis auf den Factor $f(x)$ in eine völlig analoge Gestalt über, deren Coefficienten mit T_n, T_{n-1}, ..., T_0 bezeichnet seien.

Die T drücken sich als lineare Formen der X aus, so dass:

$$T_{n-i} = X_{n-i} + \binom{i}{1}\lambda_1 X_{n-i+1} + \binom{i}{2}\lambda_2 X_{n-i+2} + \cdots + \lambda_i X_n,$$

wo λ_r die durch $f(x)$ dividirte r^{te} Ableitung von $f(x)$ nach x bedeutet.

Diese Relationen führen nun nach dem Halphen'schen Princip unmittelbar zu den gesuchten Invarianten. Man führe eine zweite Transformation vom Typus I. aus, $u = w\varphi(x)$, so treten an Stelle der „Parameter" λ neue Parameter μ. Jetzt setze man beide Transformationen zu der dritten $vf(x) = w\varphi F(x)$, oder $v = wF(x)$ zusammen, wodurch abermals neue Parameter ν entstehen. Dann sind die ν einfache (nämlich ganze) Functionen der λ, μ, und die Relationen zwischen den T und X besitzen die Gruppeneigenschaft. Eliminirt man aus diesen Relationen, sowie aus denjenigen, welche durch Erweiterung, d. i. Ableitung nach x bis zu einer gewissen Ordnung entstehen, die Parameter λ, so erhält man ein vollständiges System von $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ abso-

luten Invarianten der Grundform, welches wirklich aufgestellt wird. Es ist zweckmässig, über die Function $f(x)$ so zu verfügen, dass T_{n-1} verschwindet; dann hängen die λ nur noch von X_{n-1}, X_n und deren Ableitungen ab.

Der Verf. ermittelt ferner nach der Methode der infinitesimalen Transformationen die charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichungen für die Invarianten, welche hier eine besonders einfache Form annehmen.

Aehnlich gestalten sich die Verhältnisse bei der Transformation II., nur dass jetzt in die Ausdrücke der ν durch die λ und μ noch je ein Factor eingeht, welcher selbst eine Function von x ist.

Als ein besonderer Fall ordnen sich hier die Sylvester'schen Reciprocanten ein.

Der Verf. scheint von der im Jahre 1887 erschienenen Erwiderung Lie's auf den Halphen'schen Brief (F. d. M. XIX. 356), in der Lie die Ansprüche Halphen's zurückweist, keine Kenntnis gehabt zu haben; immerhin ist es eine auffallende Erscheinung, dass in den zahlreichen englischen Arbeiten über Differentialinvarianten der Name Lie's nie erwähnt wird, trotzdem derselbe doch die Theorie der Differentialinvarianten zuerst allgemein begründet hat. My.

F. Brioschi. Les invariants des équations différentielles linéaires. Acta Math. XII. 233-248.

Unter Invariante einer linearen Differentialgleichung ist hier eine Function der Coefficienten und ihrer Ableitungen verstanden, welche bei Einführung neuer Variabeln bis auf einen Factor in die gleiche Function der Coefficienten der transformirten Gleichung übergeht. Die Abhandlung hat die Berechnung solcher Invarianten zum Gegenstand. Bdt.

A. Fischer. Ueber die Invarianten der linearen, homogenen Differentialgleichungen sechster Ordnung. Diss. Halle. 8°.

J. Deruyts. **Essai d'une théorie générale des formes algébriques.** Bruxelles, Hayez. Paris, Hermann. VI + 157 S. 8°.

Diese Schrift enthält die Hauptergebnisse der Untersuchungen, welche der Verf. über die Theorie der Formen mit verschiedenen Reihen von n Veränderlichen veröffentlicht hat.

Die benutzten Variabelnreihen werden dargestellt durch

$$x1_1,\ x1_2,\ \ldots,\ x1_n,$$
$$x2_1,\ x2_2,\ \ldots,\ x2_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots;$$

sie sind alle von derselben Art (espèce) und entsprechen den Punktcoordinaten des Raumes von $n-1$ Dimensionen. Die Grössen, welche gewöhnlich als Veränderliche von verschiedenen Arten betrachtet werden, sind wegen ihrer Reduction auf die Variabeln x nicht besonders eingeführt worden. Unter diesen Bedingungen hängen die invarianten Functionen allein von $(x1)$, $(x2)$, ... und von den Coefficienten eines beliebigen Systems algebraischer Formen ab.

Wenn man an allen Variabeln die lineare Substitution S mit dem Modul $\delta = (\pm\, a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn})$ vollzieht, so werden die Variabeln $(x1)$, $(x2)$, ... durch andere $(X1)$, $(X2)$, ... ersetzt; die Coefficienten a, b, ... der Formen werden lineare Functionen A, B, ... von a, b, ... Wenn $p = p(x1, x2, \ldots, a, b, \ldots)$ eine ganze und homogene Form ist, so ist $p(X1, X2, \ldots, A, B, \ldots)$ die „Transformirte" von p durch die Substitution S.

Der Verlauf der Arbeit beruht auf der directen Erforschung der Transformirten, die mit der Theorie der invarianten Functionen in Wechselbeziehung gesetzt wird. Unter anderem führt die Analyse der Transformirten zur Reduction der invarianten Functionen auf gewisse von ihnen, die „primäre Covarianten" genannt werden. Diese Urfunctionen enthalten $n-1$ Reihen von Variabeln $(x1)$, $(x2)$, ..., $(x, \overline{n-1})$ und werden durch die Polargleichungen charakterisirt:

$$x1 \frac{d}{dx2} = 0, \quad x2 \frac{d}{dx3} = 0, \quad \ldots, \quad x\overline{n-2} \frac{d}{dx\overline{n-1}} = 0.$$

Die Eigenschaften der primären Covarianten sowie ihr regel-

mässiges Bildungsgesetz machen den Gegenstand eingehender Forschungen aus. Für den Fall $n = 2$ findet man die Ergebnisse wieder, welche die Herren Cayley, Sylvester, Clebsch und Gordan als Grundlagen der Theorie der binären Formen festgestellt haben.

Die Einleitung umfasst zunächst die Definitionen und die Auseinandersetzung eines einheitlichen, der Allgemeinheit des Gegenstandes angepassten Bezeichnungssystems. Die symbolische Darstellung wird an die Bestimmung der Transformirten angeknüpft.

Capitel I. „Beziehungen zwischen den invarianten Functionen und den transformablen Systemen" (S. 15-31). Lässt man die gewöhnlichen Definitionen der cogredienten und der contragredienten Systeme gelten, so ergiebt sich:

1. Jede invariante Function ist die Summe der Producte der entsprechenden Glieder zweier contragredienten Systeme, und umgekehrt.

2. Wenn eine invariante Function φ, und zwar auf eine einzige Art, als ganze Function verschiedener Grössen (p'), (p''), ... ausdrückbar ist, so ändert man die Invarianz nicht, indem man in φ die Grössen (p'), (p''), ... durch cogrediente Grössen ersetzt.

Diese Eigenschaften liefern als Anwendungen Verfahrungsarten zur Bildung der Invarianten, teils direct, teils vermittelst schon bekannter invarianter Functionen.

Capitel II. „Untersuchung der linearen Substitutionen" (S. 32-46).

Die allgemeinste lineare Substitution S ist auf die Substitutionen S_h, S_{hl} zurückführbar, die durch die Gleichungen:

$$(S_h) \qquad x_h = \varepsilon X_h, \quad x_k = X_k \qquad (k \gtrless h),$$
$$(S_{hl}) \qquad x_l = X_l + \lambda X_h, \quad x_i = X_i \qquad (i \gtrless l)$$

definirt sind, und in denen h, l alle in der Folge 1, 2, ..., n enthaltenen, verschiedenen Werte erhalten. Die isobarischen Functionen vom Gewichte π_1, π_2, ..., π_n für die Indices 1, 2, ..., n werden durch die Eigenschaft charakterisirt, nach der Substitution S_h mit ε^{π_h} multiplicirt wieder zu erscheinen.

Die Substitution S_{hl} leitet zur Einführung eines Differentialoperators (h, l), vermöge dessen die Transformirte durch S_{hl} sich schreiben lässt:

$$p + \frac{h}{1}(h, l)p + \frac{\lambda^2}{1.2}(h, l)^2 p + \cdots.$$

Die Operatoren (h, l) haben verschiedene für die Folge nützliche Eigenschaften.

Capitel III. „Eigenschaften der invarianten und der seminvarianten Functionen.“ (46-47).

1) Die „invarianten“ Functionen werden durch ihre Eigenschaften gekennzeichnet, dass sie isobarisch, von gleichem Gewichte für alle Indices 1, 2, ..., n und Lösungen der $n-1$ Gleichungen $(i+1, i) = 0$ sind. Verschiedene Eigenschaften.

2) Die „seminvarianten“ Functionen werden durch die Bedingungen definirt, dass sie isobarisch und Lösungen der Gleichungen $(i+1, i) = 0$ sind. Sie können durch die Eigenschaft gekennzeichnet werden, dass sie nach der durch die Formeln

$$x_i = \alpha_{ii} X_i + \alpha_{i\,i+1} X_{i+1} + \cdots + \alpha_{in} X_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

definirten Substitution mit Potenzen von $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$ multiplicirt wieder erscheinen. Die von den Variabeln unabhängigen seminvarianten Functionen heissen „Seminvarianten“.

3) Die seminvarianten Functionen sind symbolisch durch Aggregate linearer Formen und gewisser Determinanten von den Ordnungen 1, 2, ..., n darstellbar. Als besonderen Fall erhält man den symbolischen Ausdruck der invarianten Functionen. Ebenso findet man manche in der Folge benutzten Eigenschaften der Seminvarianten.

4) Die „Quelle“ (source) einer invarianten Function ist der Coefficient der höchsten Potenzen von $x1_1, x2_2, \ldots, xn_n$. — Jede homogene und isobare Function ist die Quelle einer invarianten Function. — Jede invariante Function ergiebt sich aus der Transformirten ihrer Quelle, in welcher man die Parameter α_{ij} der Substitution S durch die Variabeln xj_i ersetzt hat. — Anwendungen.

5) Die „primären Covarianten“ werden als diejenigen invarianten Functionen mit den Variabeln $x1, x2, \ldots, \overline{xn-1}$ erklärt,

welche die Seminvarianten zu Quellen haben. — Einige Eigenschaften.

Capitel IV. „Reduction der invarianten Functionen". (75-97).

1) Jede invariante Function ist eine Summe identischer Covarianten, multiplicirt mit Polaren primärer Covarianten bezüglich der Variabeln.

2) Die primären Covarianten sind auf ganze Functionen einer begrenzten Zahl von ihnen zurückführbar.

Capitel V. „Erforschung der primären Covarianten". (98-118).

1) Charakteristische partielle Differentialgleichungen.

2) u. 3) Eigenschaften der Coefficienten und der Polaren.

4) Die primären Covarianten, welche für den Ausdruck einer invarianten Function φ dienen, sind Quotienten aus Polaren von φ durch Potenzen von $(\pm x1_1, x2_2, \ldots, xn_n)$. Eine invariante Function ist nur auf eine einzige Art mittels primärer Covarianten ausdrückbar.

5) Aus einer seminvarianten Function leitet man Seminvarianten und daher primäre Covarianten ab. Diese Eigenschaft rechtfertigt die Betrachtung beliebiger seminvarianter Functionen. Verschiedene Verfahrungsarten der Umwandlung werden angedeutet.

Capitel VI. „Bildungsgesetz der invarianten Functionen". (119-130).

Der erste Teil des Capitels umfasst die Erforschung gewisser primärer Covarianten, die „abgeleitete Covarianten" benannt werden und aus einer invarianten Function φ und einer Form f entspringen. Der zweite Teil umfasst den Beweis des folgenden Satzes: Die primären Covarianten des Grades t in Bezug auf f sind Summen aus abgeleiteten Covarianten von f und aus primären Covarianten φ vom Grade $t-1$ in Bezug auf f. Daraus leitet man ein allgemeines Verfahren zur Bildung aller invarianten Functionen ab.

Capitel VII. „Bestimmung der Anzahl der linear unabhängigen primären Covarianten von gegebenen Graden." (131-147).

1) Zurückführung auf den Fall von Formen mit $n-1$ Variabelnreihen.

2) Anzahl primärer Covarianten, ausgedrückt vermittelst der Partitions-Zahlen.

Capitel VIII. „Wesentliche Besonderheiten der Formen." (148-156).

Formen f, f', ... haben eine wesentliche Besonderheit, wenn zwischen ihren Coefficienten ganze algebraische Beziehungen $g = 0$, ..., unabhängig von der Substitution S, bestehen. Jede wesentliche Besonderheit wird durch das identische Verschwinden gewisser primärer Covarianten gekennzeichnet. Eine ganze algebraische Function ist eine „invariante Function der Besonderheit", wenn sie von ihrer Transformirten sich nur um eine Potenz des Moduls δ der Substitution S unterscheidet. Unter diesen Bedingungen könnte die Eigenschaft der Invarianz aus den Gleichungen $g = 0$, ... hervorgehen. Der Verfasser stellt fest, dass die wesentlichen Besonderheiten zu keiner speciellen invarianten Function Anlass geben; das nämliche Resultat wird für die primären Covarianten angezeigt (vgl. das folgende Referat).

Mn. (Lp.)

J. Deruyts. Essai d'une théorie générale des formes algébriques. Bruxelles, F. Hayez. Paris, Hermann. 1891. VI + 156 S. 8°.

Ein fundamentales Problem der Invariantentheorie besteht darin, die Theorie der Formen mit einer oder mehreren Reihen von n Variabeln zurückzuführen auf Formen mit Reihen von $n-1$ Variabeln, so zwar, dass die letzteren „abgeleiteten" Formen mit der (resp. den) gegebenen („Urformen") invariant verknüpft sind und sie in projectivem Sinne völlig vertreten können. Clebsch hat zuerst in einer bekannten Arbeit das Problem in der Weise gelöst, dass die abgeleiteten Formen von den sogenannten „Zwischenvariabeln" abhängen, d. i. von den Coordinaten der im Raume von n Dimensionen möglichen linearen Mannigfaltigkeiten. Während die Ergebnisse von Clebsch sich mehr für geometrische Anwendungen eignen, hat Hr. Capelli eine andere Methode entwickelt, welche die gegebene Form, als abhängig von n Reihen von n Variabeln gedacht, in eine Reihe nach Potenzen von deren Determinante entwickelt, mit Coefficienten, welche selbst Polar-

bildungen sind von invarianten Formen mit Reihen von nur $n-1$ Variabeln. Bei Hrn. Capelli treten also nur Variabeln von einerlei Art auf, wodurch eine grössere Beweglichkeit in algebraischer Richtung gewährleistet wird.

Der Verf. giebt nun — in Zusammenfassung einer Anzahl voraufgegangener Abhandlungen — eine neue sehr bemerkenswerte Lösung des Problems, die zwar äusserlich manche Aehnlichkeit mit der von Hrn. Capelli gelieferten besitzt, andererseits aber auch wieder wesentlich von derselben abweicht. Es lässt sich wohl sagen, dass nicht nur die Bildungsgesetze seiner abgeleiteten Formen erheblich einfacher sind, sondern auch infolge dessen die Leistungsfähigkeit des ganzen Verfahrens eine grössere ist. Der Verf. ist im Stande, Aufgaben zu lösen, wie die Bestimmung (vgl. das folgende Referat) der Anzahl der linear unabhängigen Invarianten von gegebenen Ordnungen, Gewichten u. s. f., welche Capelli's Scharfsinn unüberwindliche Schwierigkeiten bereiteten.

Das Fruchtbare in der Richtung des Verf. beruht auf zwei Gesichtspunkten: einmal ist es die geeignete Verallgemeinerung der Theorie der Seminvarianten, andererseits die Durchdringung der symbolischen Methode mit derjenigen der charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichungen. Die allgemeine lineare Substitution von n Variabeln x lässt sich aus zwei Reihen einfacherer zusammensetzen (vgl. auch Kronecker F. d. M. XXI. 1889. 149), nämlich:

$$(S_h) \qquad x_h = \varepsilon X_h, \quad x_k = X_k, \qquad (k \gtrless h)$$
$$(S_{h,l}) \qquad x_l = X_l + \eta X_h, \quad x_k = X_k \qquad (k \gtrless l)$$

mit der Substitutionsdeterminante ε resp. 1.

Soll sich nun eine Form F (der Coefficienten und Variabelnreihen) nach Ausübung von S_h nur um eine Potenz ε^{π_h} der Substitutionsdeterminante ε ändern, wobei π_h das „Gewicht" von F bez. des Index h ist, so heisst das, dass F „hinsichtlich des Index h isobar" wird; die Homogeneität von F ist eine Folge davon.

Soll F andererseits gegenüber $S_{h,l}$ invariant sein, so hat F einer charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichung

$(h, l) = 0$ zu genügen. Es genügt, die Zahlen h, l auf die $n-1$ Wertepaare $(1, 2)$, $(2, 3)$, ..., $(n-1, n)$ einzuschränken.

Jede isobare Form F, wie z. B. die Clebsch'schen Zwischenvariabeln, welche die $n-1$ Gleichungen $(i, i+1)F = 0$ erfüllt, wird eine „seminvariante" Form genannt. Speciell gehen hieraus die gewöhnlichen invarianten Formen hervor, wenn sämtliche Gewichte π_k einander gleich werden. Hängt F nur von den Coefficienten ab, so wird F zur „Seminvariante". Die Clebsch-Aronhold'sche Symbolik lässt sich auf die seminvarianten Formen übertragen, sodass man sich auf lineare Urformen beschränken darf.

Der symbolische Ausdruck einer seminvarianten Form lässt sich darstellen als eine Summe von Producten der symbolischen Linearformen und gewissen „Unterdeterminanten" des Schemas der symbolischen Coefficienten. Eine invariante Form, welche die n Variabelnreihen zu den Ordnungen π_1, π_2, ..., π_n enthält, besitzt als „Leitglied" eine Seminvariante von den Gewichten π_1, π_2, ..., π_n, und umgekehrt.

Auf Grund seiner Symbolik gelangt nun der Verf. dazu, als diejenigen Fundamentalformen χ, durch welche sich alle übrigen ausdrücken lassen, die „primären Covarianten" einzuführen, d. h. allseitig isobare Formen von $n-1$ Variabelnreihen, welche den $n-2$ linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$D_{12} = 0, \quad D_{23} = 0, \quad \ldots, \quad D_{n-2,n-1} = 0$$

genügen, wo D_{ik} die Summe der Producte ist, welche man erhält, wenn man immer je eine Variable der k^{ten} Reihe mit der Ableitung von χ nach der entsprechenden Variable der i^{ten} Reihe multiplicirt. Referent hat die Aufstellung dieser primären Covarianten in seinem Invariantenberichte (Jahresbericht I der Deutschen Math.-Vereinigung) irrtümlicherweise Hrn. Capelli zugeschrieben (durch eine unrichtige Bemerkung des Letzteren veranlasst).

Die Formen χ bilden einen Integritätsbereich mit endlicher Basis, wie nach Anleitung einer Hilbert'schen Methode nachgewiesen wird. Sie lassen sich mit Hülfe eines verallgemeinerten Ω-Processes auf gewisse einfachste Typen zurückführen.

Mittels dieser Formen χ gelingt es auch, solche Urformen,

deren Coefficienten gewissen (selbst invariantiven) algebraischen Bedingungen genügen, der Behandlung zugänglich zu machen (vgl. das vorangehende Referat). My.

J. Deruyts. Sur le nombre des fonctions invariantes. Belg. Bull. (3) XXI. 437-451.

Vgl. das vorangehende Referat.

Die Frage der Anzahl der linear unabhängigen Invarianten gegebener Urformen von gegebenen „Gradordnungen" wird hier vollständig gelöst.

Als wesentliches Hülfsmittel dienen dazu die vom Verf. eingeführten „primären Covarianten" χ. Es kam vor allem darauf an, die Anzahl der linear unabhängigen χ von gegebenen Graden in den Coefficienten der Urformen und von gegebenen Ordnungen in den einzelnen Variabelnreihen zu ermitteln.

Der Verf. führt diese Aufgabe einen weiteren Schritt zurück auf die Anzahl der linear unabhängigen „Leitglieder". Da sich die letzteren bei symbolischer Schreibweise als Seminvarianten linearer Urformen darstellen lassen, so genügt hier die Untersuchung eines Systems linearer diophantischer Gleichungen, deren Lösungen als linear unabhängig nachgewiesen werden. Während diese Hülfsaufgabe bereits in der oben besprochenen Monographie erledigt wird, zeigt der Verf. nunmehr zur Ergänzung, wie durch geeignete Combination der Lösungen einer gewissen Anzahl von Systemen diophantischer Gleichungen die ursprüngliche Aufgabe nach Massgabe einer verhältnismässig einfachen arithmetischen Regel lösbar ist. My.

D. Hilbert. Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. Gött. Nachr. 1891. 232-242.

Der Verf. zeigt in der vorliegenden Note, dass den von ihm früher (cf. F. d. M. XXII. 1890. 133) aufgestellten Endlichkeitstheoremen über algebraische Formen nicht nur eine principielle Bedeutung zukommt, sondern dass bei geeigneter Erweiterung mit ihrer Hülfe und mit Benutzung Kronecker'scher Methoden

die genaue Erledigung einer Reihe besonderer Fragen über die „Aufstellung und Structur“ voller Invariantensysteme möglich ist.

Daran knüpfen sich Methoden zur Behandlung der bekannten Aufgabe, Formen zu bestimmen, deren Invarianten gegebene Werte besitzen.

Sei etwa eine einzelne binäre Grundform f der n^{ten} Ordnung vorgelegt; die endliche Basis ihres Invariantensystems bestehe aus m Invarianten i. Erhebt man diese auf geeignete Potenzen, so ergeben sich m neue Invarianten i' vom nämlichen Grade in den Coefficienten von f. Unterwirft man jetzt die i' einer passenden linearen Substitution, wodurch sie in i'' übergehen mögen, so kann man es erreichen, dass alle Invarianten von f „ganze“ algebraische Functionen von $m-1$ der Invarianten i'' werden. Durch Wiederholung des Verfahrens lässt sich die Anzahl $m-1$ auf $n-2$ herunterdrücken. Verschwinden also für eine besondere Grundform f diese $n-2$ Invarianten, so verschwinden auch alle übrigen. Aber auch die noch wichtigere Umkehrung gilt, sodass, wenn ganz allgemein μ Invarianten J eines Formensystems so beschaffen sind, dass ihr Verschwinden das aller übrigen Invarianten des Systems nach sich zieht, alle Invarianten ganze algebraische Functionen der J sind.

Der Beweis stützt sich wesentlich einmal auf die Endlichkeit der Invariantensysteme, sodann auf ein neues Endlichkeitstheorem. Verschwindet nämlich eine Reihe F, F', F'', ... von Formen der n Variabeln x_1, x_2, ..., x_n immer dann, wenn m vorgelegte Formen f_1, ..., f_m der x verschwinden, so giebt es immer eine Zahl r, sodass jedes Product P von irgend r Formen F eine lineare Combination der f ist, d. h. dass

$$P = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m,$$

wo die a wiederum Formen der x bedeuten.

Der Verf. wendet sich nunmehr zur Aufgabe der wirklichen Aufstellung eines vollen Invariantensystems, vermöge Heranziehung eines Kronecker'schen Satzes aus der arithmetischen Theorie der algebraischen Functionen. Daraus ergiebt sich, dass, sobald erst einmal ein System von Invarianten J (wie es oben erwähnt wurde) bekannt ist, die Aufstellung des „vollen“ Inva-

riantensystems nur noch die Lösung einer elementaren Aufgabe erfordert, nämlich die Berechnung der Discriminante einer einen gewissen Rationalitätsbereich bestimmenden Gleichung. Zum Schlusse verbindet der Verf. die skizzirten Methoden mit den früher von ihm für allgemeine Moduln entwickelten. Danach geht z. B. die Aufgabe, die (vom Referenten zuerst angegebene) Anzahl der binären Formenbüschel zu finden, deren Functionaldeterminante einer gegebenen Form gleich wird, über in die verhältnismässig einfache der Aufsuchung der „charakteristischen Function" eines gewissen Moduls. My.

D. Hilbert. Ueber volle Invariantensysteme. Naturf. Ges. Halle LXIV. 11-12.

A. Schoenflies. Bemerkung zu Hilbert's Theorie der algebraischen Formen. Gött. Nachr. 1891. 339-344.

Vgl. das Referat über Hilbert F. d. M. XXII. 1890. 133. Der Verf. zeigt, wie sich für den einfachsten Modul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die vollständige Kette der abgeleiteten (linearen) Gleichungssysteme in expliciter Form direct angeben lässt. Die aufgestellten Gleichungssysteme zeichnen sich hier formell dadurch aus, dass in ihnen die Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — wie es durch die Natur der Aufgabe gefordert wird — überall symmetrisch eingehen.

My.

J. Petersen. Die Theorie der regulären Graphs. Acta Math. XV. 193-220.

Die vorliegende Arbeit ist bemerkenswert, insofern sie mit Erfolg versucht, neuere Principien der Invariantentheorie, die sich an die Theorie der diophantischen Gleichungen anlehnen, auf rein anschaulichem Wege klarzulegen und weiterzuführen. Der Verf. ist dabei nach eigener Angabe durch einen regen Briefwechsel mit Hrn. Sylvester sehr gefördert worden.

Hr. Hilbert stützt sich bei seinem ersten „Endlichkeitsbeweise" (cf. F. d. M. XX. 1888. 110) auf einen Gordan'schen Satz, wo-

nach sich bei gegebenem n eine endliche Anzahl von „Grundproducten“

$$(x_1-x_2)^\alpha (x_1-x_3)^\beta (x_2-x_3)^\gamma \ldots (x_{n-1}-x_n)^\varepsilon$$

bilden lässt, sodass alle anderen Producte derselben Form aus jenen durch Multiplication zusammensetzbar sind. Der Verf. stellt sich die Aufgabe, diese Grundproducte für verschiedene Werte von n wirklich zu bilden.

Man repräsentire jedes x durch einen Punkt der Ebene, jeden Factor x_i-x_k durch eine beliebige Verbindungslinie zwischen x_i und x_k; beispielsweise entspricht dann dem Producte

$$(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2(x_1-x_3)(x_2-x_4)(x_1-x_4)(x_2-x_3)$$

ein Viereck mit seinen Diagonalen, von dem aber zwei Gegenseiten doppelt ausgezogen sind.

Da die in Rede stehenden Ausdrücke in jedem x von gleichem Grade α (nämlich dem Grade der entsprechenden Invariante) sind, so laufen in jedem Punkte unserer n-Ecke gleichviel Linien zusammen, daher die Bezeichnung: „Regulärer Graph G_x^n“.

Es kommt des weiteren wesentlich darauf an, ob ein Graph primitiv ist oder nicht; im letzteren Falle kann er durch Ueberlagerung mehrerer Graphs derselben Ordnung, aber von niedrigerem Grade entstanden gedacht werden.

Die Hauptaufgabe ist demnach die Bestimmung aller primitiven Graphs.

Hier zeigt sich nun ein merkwürdiger Unterschied, je nachdem der Grad gerade oder ungerade ist.

Bei geradem Grade giebt es nur Grundfactoren ersten oder zweiten Grades. Bei ungeradem Grade dagegen können die Grundfactoren für ein genügend grosses n bis zu einem beliebigen Grade ansteigen; der einfachste ist hier vom dritten Grade für $n=10$.

Zur Ableitung solcher Sätze bedarf es jedoch einer grossen Reihe von Hülfssätzen: es ist zu untersuchen, falls ein Graph auf verschiedene Weisen zerlegbar ist, wie diese Zerlegungen mit einander verknüpft sind, wie sie sich in einander überführen lassen, u. s. f. Eine besondere Bedeutung hat der Begriff zweier

gepaarten Graphs (gerader Ordnung). Von diesen entsteht der eine aus dem anderen, indem zwei Linien *ab* und *cd* entfernt und dafür durch zwei andere *ac* und *bd* (resp. *ad* und *bc*) ersetzt werden.

Die Natur der benutzten Methoden bringt es mit sich, dass eine weitere Auseinandersetzung hier zwecklos sein würde; es sei nochmals auf die geistreiche Arbeit selbst verwiesen.

My.

A. Capelli. Sopra un'estensione dello sviluppo per polari delle forme algebriche a più serie di variabili. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII_1. 161-167.

Der Verfasser hatte früher den der Reihenentwickelung der Formen zu Grunde liegenden Satz bewiesen (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 137): „Eine Form $F(x, y, \dots, v)$ der n Variabelnreihen $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\dots$, $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ lässt sich stets und auf nur eine Weise in die Gestalt

$$F = H.\Delta F + \sum_i \Delta_i . \Delta_i' F$$

setzen, wo Δ, Δ_i, Δ_i' Polarenprocesse bedeuten, welche sich auf die x, y, $\dots$, v beziehen, H das mit der Determinante der Variabeln multiplicirte Cayley'sche Differentiationssymbol

$$\Sigma \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial v_n},$$

und wo die covarianten Formen $\Delta_i' F$ nur noch von $n-1$ der Variabelnreihen abhängen".

Der Satz wird hier dahin ausgedehnt, dass an die Stelle von H irgend eine andere Polaroperation K tritt, welche, abgesehen von gewissen arithmetischen Einschränkungen, nur der Forderung zu genügen hat, mit jeder anderen (auf die x, y, $\dots$, v bezüglichen) Polaroperation vertauschbar zu sein.

Der Beweis, welcher übrigens den oben citirten Satz nicht voraussetzt, beruht auf gewissen Sätzen über die Zusammensetzbarkeit von Polaroperationen. My.

G. KOHN. Zur Theorie der associirten Formen. Wien. Ber. C. 865-893.

G. KOHN. Ueber die Resultante einer Covariante und einer Grundform. Wien. Ber. C. 1013-1017.

Der Verf. weist nach, wie zweckmässig es ist, insbesondere für die Untersuchung der Resultanten und Discriminanten von Covarianten und ihren (binären) Grundformen, statt des rationalen Systems von associirten Formen (welches Hr. Hermite eingeführt hat) ein aequivalentes System „irrationaler" Formen einzuführen. Eine binäre Form $f(y)$ vom Grade n geht bekanntlich durch die Substitution:

$$y_1 = \frac{1}{f(x)}\left(x_1 \xi - \frac{1}{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\eta\right), \quad y_2 = \frac{1}{f(x)}\left(x_2 \xi + \frac{1}{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\eta\right),$$

wo ξ, η die neuen Variabeln und x_1, x_2 Parameter bedeuten, nach Division durch $f(x)$ über in die Gestalt ($v_0 = 1$, $v_1 = 0$):

$$f(x) = \frac{1}{f(x)^{n-1}}\varphi(\xi, \eta),$$

$$\varphi(\xi,\eta) = v_0\xi^n + \binom{n}{1}v_1\xi^{n-1}\eta + \binom{n}{2}v_2\xi^{n-2}\eta^2 + \cdots + v_n\eta^n.$$

Hier sind die v die Hermite'schen „associirten" oder (nach Gordan) „Schwesterformen" von $f(x)$. Statt ihrer operirt der Verf. mit den n Wurzelwerten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ von $\frac{\xi}{\eta}$ der Gleichung $\varphi = 0$. Durch die Wurzelwerte der Gleichung $f(x) = 0$ drücken sich die z in einer sehr übersichtlichen Weise aus; eben diese Ausdrücke bilden das Fundament der weiteren Ueberlegungen.

Zunächst ist leicht zu ersehen, wie sich die Ausdrücke der z modificiren, falls von den Wurzeln von $f(x) = 0$ einige gleich werden.

Hieraus fliesst sofort der Satz, dass jede k-fache Wurzel von f für eine Covariante vom Grade g und Index i ($gk > i$) eine mindestens $(gk - i)$-fache Wurzel ist.

Im besonderen folgt daraus, dass die Resultante einer Form und einer solchen Covariante, für welche $k = i$ ist, bis auf einen Zahlenfactor mit der i^{ten} Potenz der Discriminante von f übereinstimmt.

Diese und ähnliche Ergebnisse lassen sich ohne principielle Schwierigkeit auf eine Reihe von Grundformen f_1, f_2, ... ausdehnen. Durch Specialisirung gelangt man zu Sätzen zurück, welche Hr. Gordan früher aufgestellt hatte.

Eine sehr fruchtbare geometrische Deutung der fraglichen Verhältnisse wird gewonnen, wenn man die z als homogene Punktcoordinaten in einem Raume von $n-2$ Dimensionen auffasst.

Diese geometrische Theorie deckt sich mit der unten auf S. 131 besprochenen von Hrn. Waelsch; Herr Kohn hat seine Arbeit etwas später der Wiener Akademie eingereicht als Herr Waelsch, ist aber ohne Kenntnis der letzteren zu seinen Resultaten gelangt. My.

K. P. Manning. A note on linear transformation. American J. XIV. 95-96.

Auf Grund einer Cayley'schen Methode wird gezeigt, wie sich bei alleiniger Anwendung von Polaroperationen eine beliebige algebraische Form möglichst einfach linear transformiren lässt. My.

R. Alagna. Condizioni perchè due forme biquadratiche siano in involuzione. Palermo Rend. V. 301-307.

Der Verfasser stellt die invariantiven Bedingungen dafür auf, dass die beiden Covarianten sechster Ordnung zweier biquadratischen Binärformen einen quadratischen Factor gemein haben. Hierauf gestützt, zeigt er, wie man in besonderen Fällen biquadratische Gleichungen ohne Zuhülfenahme einer kubischen Resolvente auflösen kann. My.

Berzolari. Sulle condizioni invariantive perchè due quintiche binarie abbiano quattro radici comuni. Annali di Mat. (2) XIX. 269-288.

Hr. Gordan hat ein Verfahren angegeben, welches späterhin von Hrn. Pascal weitergeführt worden ist, um das Kriterium für die Existenz mehrerer gemeinsamer Linearfactoren von zwei Binär-

formen in invarianter Form aufzustellen. Insbesondere tritt eine Vereinfachung ein, wenn die beiden Binärformen von gleicher Ordnung sind.

Mittels geeigneter Modification des Verfahrens ist der Verfasser im Stande, den im Titel genannten Fall explicite durchzuführen. My.

W. E. Heal. The bitangential of the quintic. Annals of Math. VI. 64-68.

W. E. Heal. The equation of the bitangential of the quintic. Lond. M. S. Proc. XXII. 179-180.

Der Verfasser hatte in einer früheren Arbeit (cf. F. d. M. XXI. 1889. 740) eine Covariante angegeben, welche durch ihr Verschwinden die Gleichung der Curve darstellt, die durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Curve fünfter Ordnung hindurchgeht.

Die gemeinte Covariante enthielt jedoch noch implicite einen überflüssigen Factor, von dem sie nunmehr befreit wird.

My.

R. H. Harris. On the invariant criteria for the reality of the roots of the quintic. [With an historical introduction by J. McMahon.] Annals of Math. V. 217-228.

Hr. Hermite hat zuerst (1854) die Sturm'schen Realitätskriterien, insbesondere für eine Gleichung fünften Grades, in eine invariante Form gebracht, indem er zuvor die linke Seite der Gleichung in eine typische Gestalt umsetzte, mit linearen Covarianten als neuen Variabeln und Invarianten als neuen Coefficienten. Die Hermite'schen Kriterien wurden von Hrn. Sylvester (1864) auf Grund eigentümlicher geometrischer Conceptionen erweitert, namentlich insofern, als in die Kriterien noch ein (zwischen gewissen Grenzen) veränderlicher Parameter eingeführt wurde. Der Verfasser bringt die Sylvester'schen Beweise in eine mehr algebraische Form, und vermag auch für gewisse Fälle den Spielraum des Parameters weiter auszudehnen. My.

G. Maisano. L'Hessiano della sestica binaria e il discriminante della forma dell'ottavo ordine. Nota III[a]. Palermo Rend. V. 152-154.

Vgl. F. d. M. XXI. 1889. 111 und XXII. 1890. 146. Zwischen den neun Invarianten der Hesse'schen Covariante einer binären Form f sechster Ordnung bestehen fünf algebraische Relationen. Man erhält dieselben durch Elimination der vier Fundamentalinvarianten (der Form f) aus den neun Relationen, welche beiderlei Invarianten mit einander verknüpfen. Die gemeinte Elimination wird hier durchgeführt. My.

A. H. Sawin. Lagrange's Sextic. Annals of Math. VI. 1-4.

Es wird gezeigt, wie die Lagrange'sche Reduction einer Gleichung fünften Grades ohne Zuhülfenahme der Resolvente sechsten Grades durchgeführt werden kann, indem direct eine Resolvente fünften Grades der letzteren Gleichung aufgestellt wird. Der Weg, auf dem das (nicht neue) Resultat gewonnen wird, ist ein einfacher. My.

W. E. Brunyate. The associated concomitants of ternary forms. Quart. J. XXV. 155-181.

Diese Arbeit steht im engsten Zusammenhange mit einer von Hrn. Forsyth veröffentlichten (cf. F. d. M. XXI. 1889. 118). Hr. Brioschi hatte bald nach Hrn. Hermite die von Letzterem (1854) für binäre Formen aufgestellte Theorie der „associirten Formen" (durch welche sich alle übrigen invarianten Bildungen rational ausdrücken lassen) auf Formen von n Variabeln ausgedehnt (mit Beschränkung auf Punktvariabeln). Die von ihm erhaltenen associirten Formen waren aber nicht unabhängig von einander, sondern es bestehen Identitäten (Syzygien) zwischen denselben.

Der Verfasser erhebt die Frage, wann überhaupt ein System von einander unabhängiger associirter Formen auf dem Hermite-Brioschi'schen Wege möglich ist, und stellt vor allem

fest, dass dies im allgemeinen nur noch für ternäre Grundformen statt hat, bei Mitberücksichtigung der contragredienten Variabeln.

Eine ternäre Form $f(x_1, x_2, x_3) = f(x)$ werde einer linearen Transformation der x unterworfen, deren erste Coefficientencolonne durch die x selbst gebildet wird, deren zweite und dritte Coefficientencolonne dagegen mit den x cogrediente Grössenreihen y, z sind. Dadurch geht $f(x)$ über in eine Form $F(X)$, deren Coefficienten A, im Verein mit den Coefficienten U der identischen Zwischenform $U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3$, ein System von associirten Formen liefert. Die Anzahl derselben übersteigt die Anzahl N der Coefficienten von f um drei. Es folgt daraus, dass zwischen diesen $N+3$ associirten Formen noch drei Relationen herrschen, und es kommt nunmehr darauf an, die y und z als Formen der x so zu bestimmen, dass die gemeinten Relationen die einfachste Gestalt annehmen, sodass sich geradezu die $N+3$ abhängigen Formen auf N unabhängige reduciren.

Der Verfasser löst die Aufgabe, abweichend von Hrn. Forsyth, derart, dass von den $N+3$ Formen zwei identisch verschwinden, während zwei weitere einander identisch gleich werden.

Die y werden dabei gleich $u_i \dfrac{\partial f}{\partial x_k} - u_k \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i, k = 1, 2, 3)$, die z gleich $x_i W - \frac{1}{2} u_k \dfrac{\partial W}{\partial u_i}$, wo unter W die Zwischenform $(abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}$ zu verstehen ist.

Es werden Anwendungen auf eine Reihe von einzelnen Fällen gemacht, und dabei durchgehends die Resultate mit den Forsyth'schen verglichen.

Referent bedauert, dass ihm die vorliegende Abhandlung bei Abfassung seines „Invariantenberichtes" unbekannt gewesen ist. My.

L. Sauvage. Théorie des diviseurs élémentaires et applications. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VIII. 285-340.

Der Verfasser entwickelt die Theorie der Weierstrass'schen Elementarteiler auf einem von Hrn. Darboux eingeschlagenen Wege

und behandelt die bekannten Probleme der simultanen Transformation zweier bilinearen und zweier quadratischen Formen von n Veränderlichen. Es folgt dann die Anwendung der Elementarteiler auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung. Sind $x_1, \ldots, x_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer solchen Differentialgleichung, und sind $Y_1, \ldots, Y_n$ die Werte, welche diese Integrale nach einem Umgange der unabhängigen Veränderlichen um eine singuläre Stelle der Differentialgleichung annehmen, so sind die Elementarteiler einer linearen Combination der bilinearen Formen

$$P = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \quad Q = x_1 Y_1 + \cdots + x_n Y_n$$

von der besonderen Wahl des Fundamentalsystems unabhängig und bestimmen zugleich die Gestalt der bekannten Fuchs'schen Entwickelungen der Fundamentalintegrale in der Umgebung der singulären Stelle. Ht.

E. Study. Recurrirende Reihen und bilineare Formen.
Monatsh. f. Math. II. 23-54.

Es wird ein gewisses fundamentales System von irrationalen Covarianten untersucht, das zu einer ganz beliebigen (auch irgendwie ausgearteten) bilinearen Form T und contragredienten Veränderlichen gehört.

Die gemeinten Covarianten sind linear unabhängig, und durch sie lässt sich die vorgelegte Form in bestimmter Weise linear ausdrücken. Mit ihrer Hülfe wird die gegebene Form als Summe einfacherer bilinearer Formen dargestellt; eine noch weiter gehende Zerlegung in demselben Sinne kann durch invariante Processe nicht geleistet werden; die gemeinte Zerlegung ist insofern die einfachste invariante Zerlegung einer bilinearen Form, die es giebt. Der Grundgedanke des Verfahrens entwickelt sich aus einem in der Gruppentheorie üblichen Ansatze. Liegt eine bilineare Form T von N Variabelnpaaren x_i, u_i vor, so giebt es sicher eine kleinste, n^{te} $(n \leq N)$ Potenz von T, sodass

$$T^n = \alpha_1 T^{n-1} + \cdots + \alpha_n T^0 \qquad (T^0 = \Sigma x_i u_i)$$

die Gleichung niedrigsten Grades ist, der die Form T genügt. Multiplicirt man successive mit T, T^2, T^3, ..., so geht daraus

eine recurrirende Reihe hervor, welche mit den Wurzeln der „charakteristischen Gleichung von T“:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1 \lambda^{n-1} - \cdots - \alpha_n = 0,$$

ferner mit den Lösungen der linearen Differentialgleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + \alpha_n y,$$

endlich mit der Partialbruchzerlegung eines Bruches von der Form

$$\frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{b_0 \lambda^{n-1} + b_1 \lambda^{n-2} + \cdots + b_n}{\lambda^n - \alpha_1 \lambda^{n-1} - \cdots - \alpha_n}$$

in engstem Zusammenhange steht.

Der Verf. entwickelt daher vorweg eine systematische Darlegung dieses Zusammenhanges, die vielfach über Bekanntes hinausgeht, und deren Fruchtbarkeit vor allem von einer eleganten, symbolischen Auflösung gewisser linearer Gleichungssysteme abhängt.

Zunächst wird der allgemeine Fall behandelt, wenn die Wurzeln von $\varphi(\lambda) = 0$ ungleich sind; erst dann werden die schwierigen Modificationen hinzugefügt, die bei irgend welcher Coincidenz der Wurzeln einzutreten haben. Die Anwendung des hiermit angedeuteten Zusammenhanges auf die vorliegende Aufgabe liefert fast unmittelbar ein System der gesuchten Covarianten $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Dieselben lassen sich (im allgemeinen Falle) sehr einfach durch die (symbolischen) Gleichungen

$$T_i^2 = T_i, \quad T_i T_k = 0 \qquad (i \gtrless k;\ i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

charakterisiren.

Die hieraus sich ergebenden analytischen Ausdrücke der T_i lassen ihre Covarianteneigenschaft sofort erkennen. Die Formen T_i sind übrigens nicht nur Covarianten der Grundform F, sondern auch Combinanten in dem Sinne, dass sie sich nicht ändern, wenn man T durch irgend eine Form der linearen Schar

$$K_0 T^0 + K_1 T^1 + \cdots + K_n T^n$$

ersetzt, sobald nur diese neue Form die Eigenschaft besitzt, dass ihre n ersten Potenzen gleichfalls linear unabhängig sind.

Der behandelte Gegenstand steht in enger Verknüpfung mit den bekannten Untersuchungen von Weierstrass und Kronecker; er bildet aber insofern ein in sich abgeschlossenes Ganzes, als

er gerade den Teil herausgreift, welcher durch die elementare Theorie der recurrirenden Reihen ausschliesslich beherrscht wird.

My.

H. Rosenow. Ueber Invariantensysteme, welche zur Charakterisirung der verschiedenen Klassen bilinearer Formen dienen. J. für Math. CVIII. 1-24.

H. Rosenow. Ueber die Anzahl der Klassen bilinearer Formen. Pr. (Nr. 111) 4. Höh. Bürgersch. Berlin. 18 S. 4°.

H. Rosenow. Die Normalformen für die 472 verschiedenen Typen eigentlicher bilinearer Formen von 10 Variabelnpaaren bei congruenter Transformation der Variabeln. Pr. (Nr. 111) 4. Höh. Bürgersch. Berlin. (1892.) 21 S. 4°.

Zwischen den von Weierstrass und insbesondere von Kronecker entwickelten arithmetischen Methoden zur Untersuchung der bilinearen Formen einerseits und den von den Invariantentheoretikern benutzten „litteralen" Principien befand sich bisher eine Kluft. Der Verf. greift hier in der zuerst genannten Abhandlung ein, indem er zur Lösung der Aufgabe, eine erschöpfende Klassificirung der bilinearen Formen einer bestimmten Anzahl von Variabelnpaaren herzustellen, einmal die Kronecker'schen Invarianten, gewisse ganzzahlige Charaktere einer bilinearen Form, zu Grunde legt, sodann aber mit Hülfe Christoffel'scher Ergebnisse die Individuen des zur Form in algebraischem Sinne gehörenden „vollständigen" Invariantensystems; jene sind die Anzahlen der Variabelnpaare der einzelnen „reducirten" Formen, als deren Summe die gegebene Form darstellbar ist, während bei der algebraischen Behandlung eine bestimmte Zahl zugehöriger Formen (Invarianten, Covarianten, Contravarianten, Zwischenformen) anzugeben ist, welche identisch verschwinden müssen, damit die geforderte Darstellung möglich wird.

Zwei Darstellungen sind dabei als verschieden anzusehen, wenn sie nicht durch identische (congruente) Transformationen

der beiden Variabelnsysteme in einander übergeführt werden können.

Beide Darstellungen, die arithmetische wie die algebraische, werden für 1, 2, 3, 4 Variabelnpaare erschöpfend durchgeführt. Die Anordnung ist dabei eine derartige, dass man erkennt, wie sich jede folgende Gruppe aus den vorhergehenden aufbaut.

In der zweitgenannten Arbeit wird die arithmetische Klassification der bilinearen Formen auf fünf, und in der drittgenannten sogar auf 6, 7, 8, 9, 10 Variabelnpaare ausgedehnt.

My.

M. Lerch. Ueber eine charakteristische Eigenschaft der Gattungen vom Geschlechte Null. Monatsh. f. Math. II. 465-468.

Herr Frobenius hat (J. für Math. LXXXVI. 151 ff.) den Satz bewiesen, dass eine bilineare Form, deren Coefficienten ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, durch passende Bestimmung der Variabeln den Wert 1 erhalten kann. Herr Lerch erweitert diesen Satz auf primitive Formen von Gattungsbereichen des Geschlechtes Null (deren Primdivisoren sämtlich der Hauptklasse angehören), und zeigt, dass auch umgekehrt nur in Bereichen vom Geschlechte Null alle bilinearen primitiven Formen die erwiesene Eigenschaft haben.

Lsg.

A. Voss. Ueber die cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst. Münch. Abh. XVII. 235-356.

Siehe die Besprechung im vorigen Jahrgang der „Fortschritte" (S. 161).

My.

A. del Re. Sulle coppie di forme bilineari ternarie. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII_2. 88-94.

Man vergleiche eine voraufgehende Note desselben Verfassers F. d. M. XXII. 1890. 147. Hier werden Paare von bi-

linearen ternären symmetrischen Formen in cogredienten Variabeln als Paare von Polarsystemen mit den Mitteln der Geometrie der Lage untersucht.

Insbesondere wird die Frage erledigt, wann zwei solche Paare durch reelle Transformationen in einander übergeführt werden können. My.

J. DERUYTS. Sur une extension de la loi de réciprocité de M. Hermite. Belg. Bull. (3) XXII. 11-23.

Der Verfasser weist nach, dass das bekannte, von Hrn. Hermite (1854) für binäre Formen aufgestellte Reciprocitätsgesetz ein Analogon für höhere Formen dann und nur dann besitzt, wenn die letzteren in lineare Factoren zerlegbar sind.

Der Gedankengang ist im wesentlichen der Hermite'sche. Dass das Reciprocitätsgesetz schon bei einer (nicht zerfallenden) quadratischen ternären Form versagt, liegt auf der Hand: denn einer solchen kommt eine Invariante dritten Grades (ihre Discriminante) zu, während doch eine allgemeine kubische ternäre Form keine Invariante zweiten Grades besitzt. My.

J. E. CAMPBELL. Note on the simultaneous transformation of two quadric functions. Mess. (2) XXI. 78-83.

Bemerkungen über das Verschwinden der Unterdeterminanten für den Fall gleicher Wurzeln in der „Lagrange'schen Gleichung"; allgemein: „Wenn r Wurzeln der Lagrange'schen Determinante gleich sind, so ist die Reduction der quadratischen Formen auf Normalformen unmöglich, es sei denn, dass alle $(r-1)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten für jene gleiche Wurzel verschwinden; aber falls sie dies thun, ist die Reduction mit $\frac{1}{2}r(r-1)$ Graden der Freiheit möglich". Lp.

G. HUMBERT. Sur la transformation d'une forme quadratique de n variables en une somme de carrés au moyen d'une substitution orthogonale. J. de Math. spéc. (3) V. 73-76.

„Ich bezwecke in dieser Note eine kurze und einfache Discussion der Gleichung in s für den Fall, in welchem die Coefficienten der quadratischen Form reell sind. . . . Es hat mir geschienen, dass die Aufsuchung der Bedingungen dafür, dass eine Wurzel vielfach von der Ordnung p ist, etwas zu künstlich und schwer zu fassen sei.“ Lp.

H. Laurent. Sur les formes quadratiques et sur l'équation dite en s. Nouv. Ann. (3) X. 503-507.

Der Verf. discutirt die zu einer quadratischen Form gehörige charakteristische Gleichung mit elementaren Mitteln. Die Multiplication von Determinanten wird nicht benutzt. My.

L. Kronecker. Algebraische Reduction der Scharen quadratischer Formen. Berl. Ber. 1890. 1375-1388; 1891. 9-17, 33-44.

Die gleiche Methode, welche in einer früheren Abhandlung (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 169ff.) zur algebraischen Reduction der Scharen bilinearer Formen dargelegt wurde, führt auch für Scharen quadratischer Formen zum Ziel. Ist die Determinante einer Schar quadratischer Formen gleich Null, so bestehen zwischen den Ableitungen der Schar nach den Variabeln lineare Relationen, welche auf eine kleinste Anzahl und auf möglichst niedrige Grade reducirt angenommen werden können. So viele unter diesen Relationen den Grad Null besitzen, so viele Variabeln können durch lineare Transformation entfernt werden; wenn von den restirenden Relationen m (>0) die niedrigste unter den auftretenden Grundzahlen ist, so kann von der Schar eine Elementarschar mit verschwindender Determinante:

$$\sum_{h=1}^{h=m}(u\mathfrak{x}_{h-1}+v\mathfrak{x}_h)\mathfrak{x}_{m+h}$$

so losgelöst werden, dass die übrig bleibende Schar $2m+1$ Variabeln weniger enthält. Durch Fortsetzung des Verfahrens kommt man schliesslich auf eine Schar mit nicht verschwinden-

der Determinante, welche nach der Methode des Herrn Weierstrass reducirt werden kann, und hieraus ergiebt sich das Resultat, dass sich eine beliebige Schar quadratischer Formen $\Sigma(ua_{ik}+vb_{ik})x_ix_k$ stets in eine „reducirte" Schar

$$\sum_\nu \sum_\mu \{(U+Vw^{(\nu)})\Phi_\mu^{(\nu)}+V\Psi_\mu^{(\nu)}\} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots)$$

transformiren lässt, in welcher:

$$\Phi_\mu^{(\nu)} = \Sigma X_{\varkappa\mu}^{(\nu)} X_{\lambda\mu}^{(\nu)} - \delta_{0\nu}(X_{\gamma\mu}^{(\nu)})^2, \qquad \Psi_\mu^{(\nu)} = \Sigma X_{\varkappa\mu}^{(\nu)} X_{\lambda\mu}^{(\nu)}$$

$$(\varkappa+\lambda = n_\mu^{(\nu)}-1;\ \gamma = \tfrac{1}{2}(n_\mu^{(\nu)}-1)) \qquad (\varkappa+\lambda = n_\mu^{(\nu)}-2)$$

ist und die Summation nur dann auch über den Wert $\nu = 0$ zu erstrecken ist, wenn die Determinante der Schar verschwindet. Die verschiedenen Transformationsmethoden, welche man bei Ablösung der Elementarscharen mit verschwindender Determinante einzuschlagen hat, je nachdem man bloss die algebraische oder die arithmetische, im ursprünglichen Rationalitätsbereiche verbleibende Reduction im Auge hat, finden in der Abhandlung ihre ausführliche Erörterung.

Die in der reducirten Schar zu Tage tretenden Anzahlen und Grössen bilden ein vollständiges System von Invarianten für die betrachtete Schar. Es sind nämlich die Grössen $w^{(\nu)}$ die Wurzeln der grössten gemeinsamen Teiler der sämtlichen Subdeterminanten $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung ($\varkappa = 1, 2, \ldots, n$), derart dass den identisch verschwindenden Subdeterminanten „Unbestimmte" $w^{(0)}$ entsprechen, und es stehen ferner die Zahlen $n_\mu^{(\nu)}$ in einem einfachen Zusammenhange einerseits mit den Gradzahlen m der identischen linearen Relationen, andererseits mit den Gradzahlen der Elementarteiler. Jene linearen Relationen liefern aber ausser ihren Gradzahlen noch durch ihre Coefficienten Elemente zur Bildung von Invarianten, indem gewisse mit ihnen zusammenhängende Linearformen Covarianten für jede lineare Transformation der Schar sind. Lsg.

M. PASCH. Ueber bilineare Formen und deren geometrische Anwendung. Math. Ann. XXXVIII. 24-49.

Schon in zwei früheren Arbeiten (F. d. M. XVI. 1884. 728,

XVII. 1885. 692) hatte sich der Verf. damit beschäftigt, die Invarianten, welche in der Determinante und der Adjungirten eines Büschels von ternären bilinearen Formen auftreten, innerhalb der Theorie der projectiven ebenen Systeme geometrisch zu deuten. Diese Dinge werden jetzt im Zusammenhange dargelegt und vor allem auch die Ausartungen der wichtigsten Gebilde systematisch verfolgt; gerade um dieses Ziel zu erreichen, bedarf es wiederholt des Zurückgreifens auf die Theorie der binären bilinearen Formen (d. i. auf gewisse hierselbst herrschende Identitäten). Man kann sagen, dass hiermit ein neues eigentümliches Uebertragungsprincip gewonnen ist. Um einige Ergebnisse herauszugreifen, so sei $f(xu)$ eine ternäre bilineare Form mit contragredienten Variabeln, u_x die identische Covariante, dann hat die Adjungirte der linearen Verbindung $\varrho f + \sigma u_x$ entwickelt die Gestalt:

$$\varrho^2 \varphi(xu) + \varrho\sigma\psi(xu) + \sigma^2 u_x.$$

Um die Projectivität $\psi(xu) = 0$ zu deuten, sei a ein beliebiger Punkt der Ebene, sodann wähle man ein Punktepaar b, c so, dass, wenn die den Punkten b, c vermöge $f(xu) = 0$ entsprechenden Punkte mit b', c' bezeichnet werden, die Geraden bc' und cb' durch a laufen. Alle solche Geraden bc vereinigen sich in dem sogenannten „Gegenpunkte" A von a. Die Punktepaare aA sind nun eben die gesuchten Punktepaare der Projectivität $\psi(xu) = 0$. Hieraus fliesst fast unmittelbar der elegante Satz:

Wenn durch eine ebene Projectivität ein Dreieck abc in $a'b'c'$, dieses in $a''b''c''$ übergeht, und es liegen zwei von den Dreiecken perspectiv, so liegen sie auch perspectiv zu dem dritten.

In ähnlicher Weise werden ternäre bilineare Formen mit cogredienten Variabeln untersucht, insbesondere der Fall der symmetrischen, d. i. der quadratischen Formen. Verlegt man die Ebene der Figur in's Unendliche und nimmt den einen der beiden Kegelschnitte als Kugelkreis an, so ergeben sich interessante Zusammenhänge mit dem „Kegel des Pappus" und dem „orthogonalen Kegel". Zum Schluss wird eine bekannte fundamentale Identität zwischen Covarianten einer ternären bilinearen Form auf eine beliebige bilineare Form ausgedehnt. My.

E. Waelsch. Ueber eine geometrische Darstellung in der Theorie der binären Formen. Wien. Ber. C. 574-585.

Die Covarianten von n Punkten eines Raumes von $n-2$ Dimensionen hat zuerst Hr. Klein zu der Theorie der Resolventen einer Gleichung n^{ter} Ordnung in Beziehung gesetzt.

Diese Covarianten werden hier mit der binären Invariantentheorie in Zusammenhang gebracht vermöge geometrischer Constructionen, die nicht nur an und für sich fruchtbar sind, sondern auch zu dem merkwürdigen Endergebnis führen, dass sich die ganze Theorie inhaltlich mit der Hermite'schen Theorie der associirten Formen deckt.

Der Deutlichkeit halber mögen wir uns auf den Fall $n = 5$ beschränken, also auf den Fall eines Fünfecks im gewöhnlichen Raume. Durch fünf Raumpunkte geht eine ∞^2 Schar von kubischen Raumcurven φ. Greift man irgend eine derselben heraus, so sind die fünf Punkte auf ihr durch eine binäre Form fünfter Ordnung f repräsentirt. Sei C irgend eine Covariante von f, so beschreiben die Wurzelpunkte von f auf der Curve, sobald die letztere ihre ∞^2 Lagen passirt, eine Fläche, „die zugehörige Covariantenfläche". Anstatt nun diese Fläche auf das gegebene Fünfeck zu beziehen, bezieht man sie besser auf ein mit dem Fünfeck selbst covariant verknüpftes Fünfflach als Coordinatenfünfflach. Das gemeinte Fünfflach wird einfach gebildet durch die fünf Ebenen, welche aus einer Curve φ (und damit zugleich aus allen übrigen) immer die erste Polargruppe eines Wurzelpunktes von f bezw. der vier übrigen Wurzelpunkte ausschneiden.

Damit hat man ein covariantes Normalsystem von fünf homogenen Punktcoordinaten x_i, die noch an eine lineare Relation, etwa $\Sigma x_i = 0$, gebunden sind. Hieran schliesst sich unmittelbar eine wiederum mit f covariant verknüpfte Parameterdarstellung auf der Curve φ.

Jede Covariante des ursprünglichen Fünfecks ist jetzt eine symmetrische Function der x_i; gleich Null gesetzt, stellt sie eine

Covariantenfläche dar, welche zugleich aus φ eine binäre Covariante von f ausschneidet.

Aehnlich werden die Invarianten behandelt. Ist J eine Invariante von f, dann erfüllen die ∞^1 Curven φ, auf denen die fünf gegebenen Punkte eine Form f mit $J = 0$ darstellen, eine Fläche, „die zugehörige Invariantenfläche“.

Die elementar-symmetrischen Functionen der x erweisen sich geradezu identisch mit den Hermite'schen associirten Formen (oder präciser mit den Schwesterformen).

Von hier aus gelangt der Verfasser auch ungezwungen zu der bekannten Darstellung der invarianten Gebilde von f mittels der einseitigen Derivirten von f.

(Vgl. auch das Referat über Kohn auf S. 118.) My.

L. Berzolari. Intorno alla rappresentazione delle forme binarie cubiche e biquadratiche sulla cubica gobba. I. II. Palermo Rend. V. 9-50.

Die innige Verknüpfung der Invariantentheorie der binären Formen mit projectiven Eigenschaften der kubischen Raumcurve (auf der jene Formen geometrisch interpretirt werden) ist bereits von verschiedenen Autoren (Voss, Sturm, d'Ovidio, Pittarelli, O. Schlesinger, Fr. Meyer, Lindemann u. a.) verfolgt worden. Der Verfasser geht in dieser Richtung weiter; indem er sich der symbolischen Rechnung bedient, vermag er nicht nur für eine Reihe binärer Bildungen einfache geometrische Interpretationen anzugeben, sondern auch umgekehrt für geometrische Gebilde, welche in der Theorie der kubischen Raumcurve von Wichtigkeit sind, elegante algebraische Ausdrücke aufzustellen. Im ersten Teile der Arbeit wird in dieser Hinsicht insbesondere das simultane System einer quadratischen und kubischen Form, sowie dasjenige einer kubischen und biquadratischen untersucht; im zweiten Teile die Form sechster Ordnung. My.

P. A. MacMahon. Yoke-chains and multipartite compositions in connexion with the analytical forms called „trees“. Lond. M. S. Proc. XXII. 330-346.

Ein „yoke-chain“ (nach Cayley) ist eine kettenförmige Anordnung einfacher Curvenzweige, von denen in jedem „Knotenpunkt“ eine beliebige Anzahl zusammenstossen können.

Zunächst wird gefragt nach Anzahl und Aussehen der verschiedenen yoke-chains, die man mittels einer vorgegebenen Anzahl von Zweigen bilden kann. Nach successiver Erledigung der einfachsten Fälle wird eine allgemeine Formel gegeben, indem die Frage zurückgeführt wird auf die vom Verfasser schon früher untersuchten „nicht unitären“ Zerlegungen einer ganzen Zahl n in ganzzahlige Teile 2, 3, 4, ..., n.

In ähnlicher Weise kann man die yoke-chains nach der Anzahl ihrer Knotenpunkte einteilen.

Die yoke-chains treten in der Physik auf als Diagramme für die Combinationen von Widerständen linearer elektrischer Conductoren resp. von Capacitäten elektrischer Condensatoren.

My.

F. Morley. On the covariant geometry of the triangle. Quart. J. XXV. 186-197.

Der Verfasser knüpft an eine bekannte Arbeit von Hrn. Beltrami (1870) an, welche die Invariantentheorie einer kubischen (und biquadratischen) binären Form mit complexen Coefficienten geometrisch interpretirt. Die drei Wurzeln der gleich Null gesetzten Form bilden die Ecken eines Dreiecks der Ebene.

Die Covariante zweiter und dritter Ordnung der Form wird hier noch weiter in Beziehung gesetzt zu den aus der Elementargeometrie bekannten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks.

My.

C. Le Paige. Rapport sur un mémoire de M. J. Deruyts intitulé: Sur le développement de certaines fonctions algébriques. Belg. Bull. (3) XXII. 441-442.

Die Abhandlung soll in einer der akademischen Sammlungen erscheinen.

Mn. (Lp.)

K. ZORAWSKI. Ueber Biegungsinvarianten. Eine Anwendung der Lie'schen Gruppentheorie. Diss. Leipzig.

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

O. BIERMANN. Ueber die Resultante ganzer Functionen. Monatsh. f. Math. II. 143-146.

Setzt man

$$f = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m,$$
$$\varphi = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n,$$
$$\psi = c_0 x^q + c_1 x^{q-1} + \cdots + c_q,$$

und bedeutet $R_{f,\varphi}$ die Resultante der ganzen Functionen f und φ, $R_{f+\varphi\psi,\varphi}$ die Resultante der Functionen $f+\varphi.\psi$ und φ, so ergiebt sich unter der Voraussetzung $m < n$ durch Determinanten-Umformungen die Gleichung

$$R_{f+\varphi\psi,\varphi} = (-1)^{n(n+q-m)} . b_0^{n+q-m} R_{f\varphi}.$$

F.

M. MARTONE. Sulle radici comuni a più equazioni. Catanzaro. Maccarone. 24 S. 8°.

Das Hauptresultat dieser Arbeit besteht in folgendem Satze: Besitzen die Gleichungen:

$$a_{10} + a_{11} x + a_{12} x^2 + \cdots + a_{1n} x^n = 0,$$
$$a_{20} + a_{21} x + a_{22} x^2 + \cdots + a_{2n} x^n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m0} + a_{m1} x + a_{m2} x^2 + \cdots + a_{mn} x^n = 0,$$

wo $n \geqq m$, wenigstens $n-m+2$ gemeinschaftliche Wurzeln, so ist:

$$\begin{vmatrix} a_{1,n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{1,n-m+1} \\ a_{2,n} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{2,n-m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m,n} & a_{m,n-1} & \cdots & a_{m,n-m+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Vi.

E. Waelsch. Ein Satz über die Resultante algebraischer Gleichungen und seine geometrische Anwendung. Monatsh. f. Math. II. 421-428.

R sei die Resultante der Gleichungen

$$\varphi(\lambda) \equiv \alpha_0 \lambda_1^n + \alpha_1 \lambda_1^{n-1} \lambda_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_2^n = 0,$$
$$\psi(\lambda) \equiv \beta_0 \lambda_1^n + \beta_1 \lambda_1^{n-1} \lambda_2 + \cdots + \beta_n \lambda_2^n = 0.$$

Um nachzuweisen, dass

$$R_{ik} = \frac{\partial R}{\partial \alpha_i} \frac{\partial R}{\partial \beta_k} - \frac{\partial R}{\partial \beta_i} \frac{\partial R}{\partial \alpha_k}$$

durch R teilbar ist, und um gleichzeitig das Resultat der Division zu finden, wird der Quotient

$$\frac{\varphi(\lambda)_\mu \cdot \psi(\mu) - \psi(\lambda)_\mu \cdot \varphi(\mu)}{(\lambda \mu)}$$

aufgestellt, worin $\varphi(\lambda)_\mu$ die Polare

$$\varphi(\lambda)_\mu = \frac{1}{n} \left[\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda_1} \mu_1 + \frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda_2} \mu_2 \right]$$

bedeutet. Die Coefficienten dieses Quotienten bilden eine Matrize von $n-1$ Zeilen und $n+1$ Columnen. Streicht man in der Matrize die i^{te} und k^{te} Columne weg, so bleibt eine Determinante P_{ik} übrig; und es ergiebt sich dann die abzuleitende Formel:

$$\frac{R_{ik}}{R} = (-1)^{i+k-1} n^2 P_{ik}.$$

Die geometrische Anwendung führt zu dem Satze: „Legt man durch eine Gerade g eine Ebene E und bestimmt die Schnittpunkte mit einer Curve dritter Ordnung C_3, ferner den Pol $\mathfrak{p}$ der Geraden g bezüglich des Dreieckes dieser Punkte, so variirt $\mathfrak{p}$ auf einer Geraden γ, wenn sich E um g dreht. Die vier Punkte (α) von C_3, deren Curventangenten die Gerade γ schneiden, bilden die Hesse'sche Covariante der vier Punkte (α), deren Tangenten die Gerade g treffen." F.

Fr. Meyer. Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen. IV. Gött. Nachr. 1891. 14-26.

Fortsetzung der Arbeiten, über welche F. d. M. XXII. 1890.

175 referirt worden ist. In demselben Sinne wie in den früheren Arbeiten die Hyperosculationsebenen, die Schmiegungsberührebenen und die Trefftangenten untersucht worden sind, werden in der vorliegenden Mitteilung die beiden noch übrigen Elementarsingularitäten einer Raumcurve, nämlich die Tritangentialebenen und die Quadrisecanten in ihren Beziehungen zu einander wie zu den drei ersterwähnten Singularitäten behandelt, indem die Discriminanten und Resultanten der Singularitätenformen in Elementarfactoren aufgelöst werden. Um die Grade der letzteren zu bestimmen, wird ausser den bisher verwendeten Hülfsmitteln noch das Chasles'sche Correspondenzprincip benutzt. Die Methoden gestatten die Verallgemeinerung auf Curven in Räumen von beliebig vielen Dimensionen; die Zerlegung zweier hierauf bezüglichen Determinanten ist am Schlusse angegeben. F.

Th. Muir. Note on a problem of elimination connected with the glissettes of an ellipse or hyperbola. Edinb. Proc. XIX. 25-31.

Die Aufgabe kommt in dem Aufsatze von Hrn. Tait vor: „Glissettes of an ellipse and of a hyperbola" (Edinb. Proc. XVII 24, F. d. M. XXI. 1889. 742). Die Coordinaten x, y werden ohne Mühe mittels eines Parameters Θ durch die Gleichungen gefunden:

$$x = \sqrt{a^2\cos^2\Theta + b^2\sin^2\Theta} + p\cos\Theta - q\sin\Theta,$$
$$y = \sqrt{a^2\sin^2\Theta + b^2\cos^2\Theta} + p\sin\Theta - q\cos\Theta,$$

und aus ihnen wird Θ eliminirt. Das Ergebnis wird eine complicirte Gleichung achten Grades in den Coordinaten x und y.

Cly. (Lp.)

R. Harley. On the interchange of two differential resolvents. Manchester Proc. (4) V. 79-89.

Der Zweck dieser Abhandlung ist der Nachweis des Satzes: Wenn zwei algebraische Gleichungen so mit einander verknüpft sind, dass jede von ihnen in die andere dadurch umgewandelt

werden kann, dass man ohne Einbusse der Allgemeinheit gewisse Beziehungen zwischen den verfügbaren Grössen annimmt, so bestehen gewisse Fälle, in denen die beiden Differentialresolventen ebenfalls mittels derselben Substitutionen in einander umgewandelt werden können. Gbs. (Lp.)

L. Kronecker. Ueber eine Stelle in Jacobi's Aufsatz „Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes". J. für Math. CVII. 349-352.

In der betreffenden Stelle charakterisirt Jacobi eine ganze rationale Function von 5 Elementen als unveränderlich bei zwei Substitutionen, die beide bei derselben Anordnung der Elemente cyklisch sind, von denen also eine überflüssig ist. In der That ist im dritten Bande der gesammelten Werke die zweite Substitution fortgelassen worden. Nun bemerkt aber Hr. Cayley in einem Briefe an Kronecker, dass, wie aus den Entwickelungen hervorgehe, Jacobi gar nicht eine cyklische Function gemeint haben könne, sondern vielmehr eine halbmetacyklische, dass demnach die zweite Substitution nicht fortzulassen, sondern durch eine andere zu ersetzen sei. Kronecker stimmt dieser Ansicht zu, ist aber der Meinung, dass die Correctur noch einfacher durch Einschiebung zweier Worte erreicht werden könne.

Im übrigen erweitert Kronecker die Jacobi'sche Deduction auf den Fall, dass die Anzahl der Elemente eine beliebige ungerade Primzahl ist. F.

A. Cayley. On the substitution groups for two, three, four, five, six, seven, and eight letters. Quart. J. XXV. 137-156.

Letzter Teil der Arbeit, über welche bereits (F. d. M. XXII. 1890. 176) referirt worden ist. Es werden die sämtlichen Gruppen von Substitutionen aus acht Elementen mitgeteilt und die Abweichungen von der Tabelle des Herrn Askwith (cf. F. d. M. XXII. 1890. 176) im einzelnen angegeben. F.

L. J. ROGERS. On the analytical representation of heptagrams. Lond. M. S. Proc. XXII. 37-52.

Die Arbeit enthält in der Hauptsache eine geometrische Deutung der Hermite'schen Untersuchungen über die Substitutionen von sieben Buchstaben, bezw. die analytischen Functionen, welche diese Substitutionen darstellen. (Vergl. Serret, Algebra, §§ 474—488.) Wbg.

TH. P. KIRKMAN. The 143 six-letter functions given by the first transitive maximum groups of six letters, with full exhibition of the values of the functions. Manchester Proc. (4) V. 23-53.

M. D'OCAGNE. Sur les substitutions linéaires d'une seule variable à coefficients périodiques. S. M. F. Bull. XIX. 37-39.

Hat man

$$x_1 = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x_2 = \frac{ax_1+b}{cx_1+d}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{ax_{n-1}+b}{cx_{n-1}+d}$$

und

$$x_n = \frac{A_n x + B_n}{C_n x + D_n},$$

so werden A_n, B_n, C_n, D_n als Functionen von a, b, c, d dargestellt.

Wenn die Coefficienten der auf einander folgenden Substitutionen nicht dieselben sind, sondern sich periodisch wiederholen, so lassen sich die A, B, C, D gleichfalls durch die Coefficienten der einzelnen Substitutionen ausdrücken. F.

R. FRICKE. Ueber eine besondere Klasse discontinuirlicher Gruppen reeller linearer Substitutionen. I. II. Math. Ann. XXXVIII. 50-81, 461-476.

R. Fricke. Weitere Untersuchungen über automorphe Gruppen solcher linearen Substitutionen einer Variabeln, deren Coefficienten Quadratwurzeln ganzer Zahlen enthalten. Math. Ann. XXXIX. 62-106.

Die erste Abhandlung führt das von Herrn Poincaré angegebene Princip zur Bildung unendlicher Gruppen linear gebrochener Substitutionen einer Veränderlichen im speciellen durch. Der Verf. legt die ternäre quadratische Form $f = qx^2 - y^2 - z^2$ zu Grunde, wo q eine Primzahl ist, und stellt dann das System aller ternären Substitutionen auf, welche die Form f in sich überführen. Um aus diesem allgemeinen Systeme ternärer Substitutionen die ganzzahligen Substitutionen auszusondern, bedarf es der Unterscheidung zweier Fälle, je nachdem q von der Gestalt $4h-1$ oder $4h+1$ ist. Nunmehr wird vermittelst der Substitution $\omega = \frac{z + i\sqrt{f(x, y, z)}}{x\sqrt{q} - y}$, wo i die imaginäre Einheit und ω eine complexe Veränderliche bedeutet, das Innere der Ellipse $f = 0$ auf die positive ω-Halbebene abgebildet. Hierbei gehen die Secanten der Ellipse in die zur reellen ω-Axe orthogonalen Halbkreise über; einer jeden linearen ternären Transformation der Form f in sich entspricht eine linear gebrochene Substitution der complexen Veränderlichen ω, und umgekehrt Aus der vorhin erhaltenen unendlichen Gruppe ternärer Substitutionen ergiebt sich somit die gesuchte Gruppe $\Gamma^{(q)}$ von Substitutionen der Veränderlichen ω. Die durch Spiegelung an der Axe der imaginären Zahlen, d. h. durch die Substitution $\omega' = -\bar{\omega}$ erweiterte Gruppe wird mit $\bar{\Gamma}^{(q)}$ bezeichnet. Der Verfasser stellt nun der Reihe nach für die Fälle $q = 1, 3, 5, 7, 11$ die Fundamentalbereiche auf, und zwar indem er nicht sogleich innerhalb der ω-Halbebene, sondern vielmehr zunächst im Innern der Ellipse $f = 0$ operirt, und daselbst vor allem die sogenannten harmonischen Perspectivitäten studirt, d. h. die Operationen von der Periode 2, die in der ω-Halbebene Spiegelungen an gewissen Symmetriekreisen bedeuten. So bildet beispielsweise das Dreieck mit den Ecken $\omega = i,\ 1 + i\sqrt{2},\ i\infty$ einen Fundamentalraum für $\bar{\Gamma}^{(1)}$, und nehmen

wir etwa das rechts daneben liegende congruente Dreieck hinzu, so erhalten wir einen Fundamentalbereich für $\Gamma^{(1)}$; als erzeugende Substitution der letzteren Gruppe ergeben sich daraus die beiden folgenden

$$\omega' = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega - \frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \omega' = \omega + 2.$$

Im letzten Teile der Abhandlung werden einige allgemeine Bemerkungen über die Gruppe $\Gamma^{(q)}$ gemacht. Von arithmetischem Standpunkte aus erscheint besonders der folgende Satz von Interesse: Es giebt in der Gruppe $\Gamma^{(q)}$ eine ausgezeichnete Untergruppe des endlichen Index μ, welche aus den Substitutionen der Determinante 1 von der Gestalt

$$\omega' = \frac{\frac{a+b\sqrt{q}}{2}\cdot\omega + \frac{c+d\sqrt{q}}{2}}{\frac{-c+d\sqrt{q}}{2}\cdot\omega + \frac{a-b\sqrt{q}}{2}}$$

besteht, wo a, b, c, d ganze Zahlen sind.

In der zweiten Abhandlung zeigt der Verfasser, dass für die Erkenntnis des Charakters der betrachteten Gruppen die ternäre Gestalt derselben keineswegs das einzig durchsichtige Mittel abgiebt; die fraglichen Substitutionen gestatten vielmehr folgende directe Definition: Versteht man unter A, B irgend 2 Zahlen von der Gestalt $\frac{a+b\sqrt{q}}{2}$, wo a, b ganze rationale Zahlen sind und q eine Primzahl von der Form $4h-1$ ist; bedeuten ferner $\bar{A}$, $\bar{B}$ die zu A, B conjugirten Zahlen, so bildet die Gesamtheit der Substitutionen von der Gestalt

$$\omega' = \frac{A\omega + B}{-\bar{B}\omega + \bar{A}}, \quad A\bar{A} + B\bar{B} = 1$$

eine Gruppe, welche mit Γ_4 bezeichnet wird. Durch Erweiterung dieser Gruppe mittels der Substitution $\omega' = -\omega$ gelangt der Verfasser zu der Gruppe Γ_2, innerhalb welcher Γ_4 eine ausge-

zeichnete Untergruppe des Index 2 ist. Ferner zeigt sich, dass die Gruppe Γ_4 mittels Transformation mit der Substitution

$$\omega' = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

in sich übergeht; durch Erweiterung der Gruppe Γ_2 mittels dieser Substitution entsteht eine Gruppe Γ, innerhalb welcher Γ_2 und Γ_4 ausgezeichnete Untergruppen vom Index 2 bezüglich 4 sind. Wird jetzt noch die Gruppe Γ mittels der Spiegelung an der imaginären Axe erweitert, so entsteht eine Gruppe $\bar{\Gamma}$, von welcher Γ eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 2 ist, und welche ihrerseits, wie die vom Verfasser berechneten speciellen Fälle lehren, in keiner umfassenderen Gruppe ausgezeichnet ist. Zur Construction von Fundamentalräumen für die aufgestellten Gruppen wird nach den in den Gruppen vorkommenden parabolischen und elliptischen Substitutionen mittels bekannter Methoden geforscht. Das Resultat ist: Es giebt parabolische Substitutionen überhaupt nicht und elliptische nur von den Perioden 2, 3 und 4, betreffs deren Auftreten in den verschiedenen Typen von Substitutionen 4 Fälle zu unterscheiden sind, je nachdem die Primzahl q, durch 24 geteilt, die Reste 7, 11, 19, 23 lässt. Hieran schliesst der Verfasser die Aufstellung der Fundamentalräume für die weiteren Fälle $q = 19$ und $q = 23$.

Die dritte Arbeit behandelt zunächst eine Verallgemeinerung der in den beiden ersten Arbeiten untersuchten Gruppen. Statt der oben definirten Substitutionen der Gruppe Γ_4 werden die Substitutionen von der allgemeineren Gestalt

$$\begin{pmatrix} \frac{a+b\sqrt{q}}{2}, & \frac{c\sqrt{r}+d\sqrt{rq}}{2} \\ \frac{-c\sqrt{r}+d\sqrt{rq}}{2}, & \frac{a-b\sqrt{q}}{2} \end{pmatrix}, \quad a^2 - qb^2 + rc^2 - qrd^2 = 4$$

zu Grunde gelegt, wo a, b, c, d irgend welche ganzen Zahlen, q und r Primzahlen bezüglich von der Gestalt $4h-1$ und $4h+1$ sind. Die durch die Gesamtheit dieser Substitutionen

bestimmte Gruppe wird mit Γ_8 bezeichnet. Von dieser Gruppe aus steigt der Verfasser durch ein ähnliches Verfahren wie vorhin der Reihe nach zu den Gruppen Γ_4, Γ_2, Γ, $\overline{\Gamma}$ auf, von denen jede spätere Gruppe alle früheren als ausgezeichnete Untergruppe enthält. Nach Ermittelung der elliptischen Substitutionen der aufgestellten Gruppen wendet sich der Verfasser zur Herstellung von Fundamentalpolygonen und bemerkt unter anderem, dass allgemein der zur Gruppe Γ gehörige Fundamentalbereich das Geschlecht $p = 0$ besitzt.

Die durch die Substitutionen der Gruppe bestimmte Polygoneinteilung in der ω-Halbebene giebt, genau wie die bekannte Dreieckseinteilung in der Theorie der Modulfunctionen, eine einfache Handhabe für die arithmetische Theorie gewisser binärer quadratischer Formen von der Gestalt

$$(\varkappa, \lambda, \mu) = (\varkappa + \lambda\sqrt{q})x^2 + 2\mu\sqrt{r}xy - (\varkappa - \lambda\sqrt{q})y^2,$$

wo $\varkappa$, λ, μ irgend drei ganze rationale Zahlen sind. Die Zugehörigkeit dieser Formen zur Gruppe Γ wird offenbar, wenn man nach denjenigen Substitutionen der binären Veränderlichen x, y mit der Determinante 1 fragt, welche die Form $(\varkappa, \lambda, \mu)$ in eine Form von der nämlichen Gestalt überführt. Diese Substitutionen stimmen nämlich, wie der Verfasser zeigt, genau mit den sämtlichen Substitutionen der Gruppe Γ überein. Nunmehr übertragen sich die Begriffsbestimmungen der Theorie der ganzzahligen binären quadratischen Formen unmittelbar auf die Theorie der Formen $(\varkappa, \lambda, \mu)$: zwei Formen heissen (eigentlich) äquivalent, wenn die eine in die andere durch eine Substitution der Gruppe Γ übergeführt werden kann. Nach Unterscheidung der Formen mit positiver und negativer Determinante $D = \varkappa^2 - q\lambda^2 + r\mu^2$ folgt die Definition der reducirten Form vermöge der Begriffe des repräsentirenden Punktes beziehungsweise Halbkreises. In den letzten Abschnitten der Abhandlung stellt sich der Verfasser die Aufgabe, auch die auf die Modulargleichungen bezüglichen Entwickelungen in der Theorie der elliptischen Functionen auf das neue Untersuchungsfeld auszudehnen. Zunächst werden die Congruenzbedingungen aufgestellt, mittels

derer sich aus der Gesamtheit aller Substitutionen eine gewisse ausgezeichnete Untergruppe Γ_n, die sogenannte Congruenzgruppe n^{ter} Stufe, aussondern lässt, wobei n eine nicht durch 2, q, r teilbare Zahl bedeutet. Was den Index dieser Hauptcongruenzgruppe betrifft, so zeigt der Verfasser, dass derselbe im Falle $\left(\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{q}{n}\right)=\left(\frac{r}{n}\right)=1$ identisch mit der Anzahl modulo n congruenter Substitutionen ist, in den übrigen sieben Fällen dagegen das Doppelte dieser Anzahl. Hieraus lässt sich leicht (wenigstens in gewissen zwei besonderen Fällen) der merkwürdige Satz beweisen, dass die Gesamtgruppe Γ sich bezüglich ihrer ausgezeichneten Untergruppe Γ_n auf eine endliche Gruppe $G_{\frac{1}{2}n(n^2-1)}$ reducirt, welche mit der wohlbekannten Gruppe dieser Ordnung in der Theorie der Modulfunctionen holoedrisch isomorph ist. Da der Fundamentalbereich der Gruppe Γ vom Geschlechte Null ist, so sind alle zur Gruppe Γ gehörigen automorphen Functionen der Veränderlichen ω durch eine von ihnen rational ausdrückbar; diese (der sogenannte Hypermodul) wird mit J bezeichnet. Die $n+1$, durch eine Transformation n^{ter} Ordnung aus J entspringenden Hypermoduln J' sind mit J durch eine irreducible algebraische Relation $f(J', J)=0$ (die sogenannte Hypermodulargleichung) verknüpft, in welcher J' und J bis auf den Grad $n+1$ ansteigen. Auch die Entwickelungen über die sogenannten Smith'schen Curven, d. h. die Curven $f(X-iY, X+iY)=0$ in der XY-Ebene, sowie die wichtigsten Sätze über die singulären Moduln und insbesondere auch das Problem der Klassenanzahlrelationen überträgt sich unmittelbar auf die Theorie der Hypermoduln. Ht.

H. Taber. On certain properties of symmetric, skew symmetric, and orthogonal matrices. Lond. M. S. Proc. XXII. 449-469.

Bezeichnet φ die Determinante des Systems:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\omega} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\omega} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\omega 1} & a_{\omega 2} & \dots & a_{\omega\omega}, \end{matrix}$$

$\varphi - g$ diejenige Determinante, welche aus φ dadurch entsteht, dass man alle Elemente der Hauptdiagonale von φ um g vermindert, so heissen die Wurzeln g der Gleichung

$$\text{Det}\,|\varphi - g| = 0$$

nach Sylvester die „latent roots" von φ; wenn ferner alle Unterdeterminanten $(\omega - i + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Determinante φ verschwinden, aber nicht alle Unterdeterminanten $(\omega - i)^{\text{ter}}$ Ordnung, so ist — ebenfalls nach Sylvester (American J. VI) — die „nullity" der Determinante φ von der Ordnung i; wenn endlich i Wurzeln der Gleichung

$$\text{Det}\,|\varphi - g| = 0$$

gleich Null sind, so ist die „vacuity" der Determinante φ von der Ordnung i. Der Verfasser benutzt nun ein Beweisverfahren, welches A. Buchheim (Mess. (2) XIV) zum Beweise der Realität der „latent roots" einer symmetrischen Determinante eingeschlagen hat, und welches eine Erweiterung der von Tait in seinen „Elementen der Quaternionen" (Cap. V) angewandten Methode zum Beweise der Realität der „latent roots" einer symmetrischen Determinante dritter Ordnung bildet, um folgende Sätze zu beweisen: Für eine vielfache „latent root" g einer reellen symmetrischen Determinante φ besitzt die Determinante $\varphi - g$ eine „nullity", welche gleich ihrer „vacuity" ist (und zwar ist die letztere gleich der Vielfachheit der Wurzel g); dies gilt auch für reelle „schief symmetrische" (alternirende) und für reelle orthogonale Determinanten; die von Null verschiedenen „latent roots" einer reellen, schief symmetrischen Determinante sind rein imaginär. Wbg.

A. Kneser. Ueber eine Methode zur Darstellung der Determinantentheorie. Dorpat. Naturf.-Ges. IX. 13 S.

Die Darstellung geht von den Determinanten zweiter Ordnung aus, welche zur Auflösung eines Systems von 2 homogenen linearen Gleichungen mit 3 Unbekannten benutzt werden können. Die Untersuchung eines Systems von 3 homogenen linearen Gleichungen mit vier Unbekannten führt auf Aggregate, in denen jedes Glied das Product aus einem Elemente und einer Determinante zweiter Ordnung ist. Solche Aggregate werden als Determinanten dritter Ordnung definirt, und allgemein wird entsprechend die Determinante n^{ter} Ordnung erklärt als ein Aggregat von n Gliedern, deren jedes das Product aus einem Elemente und einer Determinante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Die Fundamentaleigenschaften der Determinanten, dass nämlich 1) die Vertauschung zweier Horizontalreihen nur das Vorzeichen, nicht den absoluten Wert der Determinante ändert, und 2) das System der Horizontalreihen durch das System der Verticalreihen ersetzt werden kann ohne Aenderung des Wertes der Determinante, welche für Determinanten zweiter und dritter Ordnung evident sind, werden durch den Schluss von $n-1$ auf n allgemein bewiesen; ebenso das Multiplications-Theorem. F.

E. Carvallo. Théorie des déterminants. Nouv. Ann. (3) X. 219-224.

Der Verf. giebt im Anschluss an eine Arbeit von Hrn. Caspary „Sur une méthode générale de la géométrie qui forme le lien entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique" (Darboux Bull. (2) XIII. 202—240, Sept. 1889; vergl. F. d. M. XXI. 685—687), die ihrerseits auf Cauchy'schen und Grassmann'schen Principien beruht, die Grundzüge einer neuen Theorie der Determinanten, und zwar mit Hülfe der von Grassmann eingeführten „äusseren Multiplication", welche sich von der gewöhnlichen „algebraischen Multiplication" dadurch unterscheidet, dass das Product bei Vertauschung der Factoren sein Zeichen wechselt. Auf dieser Grundlage ergeben sich in ungezwungener Weise die bekanntesten Determinantensätze, insbesondere auch die Zerlegung der Determinante in Producte von Unterdeterminanten. Das

Multiplicationsgesetz der Determinanten leitet der Verf. mittels seiner Methode nicht ab, sondern beschränkt sich auf den Hinweis der Möglichkeit. Wbg.

E. Carvallo. Multiplication des déterminants. Nouv. Ann. (3) X. 341-345.

Auf Grund einer besonderen Definition der Determinanten, welche der Verf. in einer früheren Arbeit (Nouv. Ann. (3) X, vergl. das vorangehende Referat) gegeben hat, werden die Aufgaben gelöst:

Das Product zweier Determinanten von den Ordnungen m und n durch eine Determinante der Ordnung $m+n$ darzustellen.

Das Product zweier Determinanten gleicher Ordnung durch eine Determinante derselben Ordnung darzustellen.

Die Reciproke einer gegebenen Determinante durch letztere auszudrücken. F.

F. Niemöller. Anwendung der linealen Ausdehnungslehre von Grassmann auf die Theorie der Determinanten. Pr. (No. 309) Gymn. Osnabrück. 22 S. 4°.

Eine der schönsten Anwendungen der Ausdehnungslehre, die auch besonders zahlreiche und eingehende Bearbeitungen gefunden hat, ist die auf die Determinantentheorie bezügliche. In der That ist die Leichtigkeit und Eleganz, mit der auch entlegenere Sätze dieser Theorie durch jenes Hülfsmittel geliefert werden, eine so hervorragende, dass man dem Satze Carvallo's, die Determinantentheorie in ihrer bisherigen Gestalt sei im Lichte der Grassmann'schen Methoden ein überwundener Standpunkt, nicht widersprechen kann. Diesen Eindruck hinterlässt denn auch die Arbeit des Herrn Niemöller, die auf Grund der wenigen vorausgeschickten Erklärungen über die äussere Multiplication in geschickter Auswahl eine Menge von Sätzen und Anwendungen der Determinanten entwickelt, teils selbständig, teils unter Benutzung vorhandenen Materials. Auf die einleitenden Sätze folgt das Multiplicationstheorem, Subdeterminanten, Auflösung eines Systems linearer Gleichungen mit speciellen Anwendungen, Sub-

stitution, Resultanten, zum Schluss die Reduction der binären Form vom Grade $2n-1$ auf die kanonische Form. Bemerkenswert ist, dass die von Weierstrass und Kronecker in die Determinantentheorie eingeführten abgekürzten Bezeichnungen als Vorstufen zu den Grassmann'schen erscheinen. Schg.

A. P. Grusintzew. Zur Theorie der adjungirten Determinanten. Charkow Ges. (2) III. 94-102.

Werden die Minoren der Determinante

$$D = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

mit $D_{j,p}$ und die entsprechenden Minoren der adjungirten Determinante m^{ten} Ranges (d. h. der adjungirten Determinante der adjungirten Determinanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Ranges; adjungirte Determinante 0ten Ranges ist D selbst) mit $D_{j,p}^{(m)}$ bezeichnet, so ist

$$D_{j,p}^{(2m)} = D^{\frac{(n-1)^{2m}-1}{n}} \times D_{j,p},$$

$$D_{j,p}^{(2m+1)} = D^{\frac{(n-1)^{2m+1}+1}{n}} \times D_{n-j,p}.$$

Hieraus folgt unter anderem

$$\Sigma_p D_{j,p}^{(2m)} D_{j,p}^{(2m-1)} = [D^{(2m)} D^{(2m+1)}]^{\frac{j}{n}}.$$

Si.

L. Kronecker. Anwendung der Modulsysteme auf Fragen der Determinantentheorie. J. für Math. CVII. 254-261.

Der Satz der Determinantentheorie, dass das reciproke System eines reciproken das ursprüngliche System ist, findet in der Theorie der Modulsysteme seinen prägnanten Ausdruck in der Aequivalenz der sechs Modulsysteme:

$$(\sum_i u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh}), \quad (\sum_i v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh}),$$

$$(UV-1,\ v_{gh} - VU_{gh}),\ (UV-1,\ u_{gh} - UV_{gh}),\quad (g, h, i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(UV-1,\ U_{gh} - v_{gh}U),\ (UV-1,\ V_{gh} - u_{gh}V),$$

in welchen u_{gi} und v_{ih} je n^2 beliebige Elemente, U und V ihre Determinanten und U_{gh}, V_{gh} die Adjuncten von u_{hg}, resp. v_{hg} be-

deuten. Dem Nachweis der diese Aequivalenzen begründenden Congruenzen und den daraus entspringenden Folgerungen ist die Arbeit gewidmet. Lsg.

E. Netto. Anwendung der Modulsysteme auf eine Frage der Determinantentheorie. J. für Math. CVIII. 144-146.

Herr Netto bringt an einer Kronecker'schen Formel (s. das vorangehende Referat), durch welche die Aequivalenz der Modulsysteme

$$(\sum_h u_{gh}v_{hi}-\delta_{gi}),\quad (\sum_h v_{gh}u_{hi}-\delta_{gi})\qquad (g,h,i=1,2,\dots,n)$$

bewiesen wird, eine Reduction durch Graderniedrigung an.

Lsg.

K. Hensel. Ueber die Darstellung der Determinante eines Systems, welches aus zwei andern componirt ist. Acta Math. XIV. 317-319.

Bildet man aus den beiden Systemen variabler Elemente

$$(a_{h,i}),\quad (b_{k,l})\qquad \begin{pmatrix} h,\ i=1,2,\dots,m\\ k,\ l=1,2,\dots,n\end{pmatrix}$$

ein neues System von $(m.n)^2$ Elementen

$$(a_{h,i}.b_{k,l})$$

derart, dass den verschiedenen Wertcombinationen von h, k die Horizontalreihen, denen von i, l die Verticalreihen entsprechen, so hängt die Determinante des componirten Systems mit den Determinanten der beiden ursprünglichen Systeme durch die Gleichung zusammen:

$$|a_{h,i}.b_{k,l}| = |a_{h,i}|^n.|b_{k,l}|^m.$$

Die Richtigkeit dieser Formel wird in elementarer Weise, mit Benutzung der bekannten Eigenschaften homogener linearer Gleichungen, nachgewiesen. F.

K. Weihrauch. Ueber eine algebraische Determinante mit eigentümlichem Bildungsgesetz der Elemente. Schlömilch Z. XXXVI. 34-40.

Es handelt sich um die Auswertung einer Determinante $G_{n,m}$

vom Grade $n(m+1)$, welche aus n Systemen von je $m+1$ Zeilen besteht: die erste Zeile des k^{ten} Systems enthält die Potenzen a_k^h von $h=0$ bis $h=n(m+1)-1$; die folgenden m Zeilen bestehen aus den Differentialquotienten der ersten Zeile nach a_k vom ersten bis zum m^{ten}. Es ergiebt sich:

$$G_{n,m} = (m!(m-1)!\dots 2!1!0!)^n \cdot (\Delta(a_1, a_2, \dots, a_n))^{(m+1)^2},$$

worin Δ die bekannte Differenzendeterminante $|a_k^h|$ bedeutet. — Auf diese Determinante werden sodann zwei goniometrische Determinanten zurückgeführt. Den Schluss bildet die Berechnung der allgemeineren Determinante

$$V_{n,m} = |v_{k,p}^{(h)}|, \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \dots, n \\ h = 0, 1, \dots, n(m+1)-1 \\ p = 0, 1, \dots, m \end{pmatrix}$$

wenn

$$v_k^{(h)} = \sum_{q=0}^{q=h} a_{h,q} z_k^q$$

und

$$v_{k,p}^{(h)} = \frac{d^p(v_k^{(h)})}{(dz_k)^p}$$

gesetzt wird. Es ist:

$$V_{n,m} = a_{0,0}\, a_{1,1} \dots a_{n(m+1)-1, n(m+1)-1} \cdot (m!(m-1)!\dots 2!1!0!)^n \times (\Delta(z_1, z_2, \dots, z_n))^{(m+1)^2}.$$

Wbg.

H. W. Segar. A theorem in determinants. Mess. (2) XX. 141-142.

Ist $f(t)$ ein ganzer rationaler Ausdruck n^{ten} Grades, so ist

$$\begin{vmatrix} D\frac{1}{f(t)} & D\frac{t}{f(t)} & D\frac{t^2}{f(t)} & \dots \\ D^2\frac{1}{f(t)} & D^2\frac{t}{f(t)} & D^2\frac{t^2}{f(t)} & \dots \\ D^3\frac{1}{f(t)} & D^3\frac{t}{f(t)} & D^3\frac{t^2}{f(t)} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix} = \frac{n!(n-1)!(n-2)!\dots}{\{f(t)\}^{n+1}},$$

wobei die Determinante n Zeilen und Columnen hat. Lp.

G. DE LONGCHAMPS. Sur les déterminants troués.
J. de Math. spéc. (3) V. 9-12, 29-32, 54-56, 85-87.

Unter einer „durchlöcherten“ (troué) Determinante versteht der Verfasser eine solche, bei welcher einzelne Elemente Null sind, und er wirft die Frage auf, wie gross die Anzahl der nicht verschwindenden Glieder in der Entwickelung einer durchlöcherten Determinante ist. Beschränkt man sich zunächst auf solche Determinanten, bei denen die ersten p Diagonalglieder allein verschwinden (also $a_{kk}=0$ für $k=1, 2, 3, \dots, p$), während alle übrigen Elemente von Null verschieden sind, so beweist man durch den Schluss von p auf $p+1$ leicht, dass die gesuchte, mit $\varrho_{n,p}$ bezeichnete Zahl durch die elegante Formel gegeben wird, in der v_n für $1.2.3\dots n = n!$ gesetzt ist:

$$\varrho_{n,p} = v_n - \binom{p}{1} v_{n-1} + \binom{p}{2} v_{n-2} - \cdots + (-1)^p v_{n-p}.$$

Sind also alle Diagonalelemente Null oder $p=n$, so erhält man

$$\varrho_{n,n} = n!\left\{\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right\}.$$

Danach geht der Verf. zu solchen Determinanten über, in denen ausser den Diagonalgliedern noch andere Elemente verschwinden. Es gelingt ihm aber nur in wenigen Fällen noch, übersichtliche Resultate zu erhalten, und er stellt die weitere Untersuchung den Forschern anheim. Lp.

TH. MUIR. Note on a peculiar determinant of the sixth order. Phil. Mag. (5) XXXI. 429-430.

In Phil. Mag. März 1856 gab Herr Cayley als ein beiläufiges Ergebnis eines Eliminationsverfahrens die merkwürdige Identität:

$$\begin{vmatrix} 0 & C & B & -2A' & 0 & 0 \\ C & 0 & A & 0 & -2B' & 0 \\ B & A & 0 & 0 & 0 & -2C' \\ A' & 0 & 0 & A & -C' & -B' \\ 0 & B' & 0 & -C' & B & -A' \\ 0 & 0 & C' & -B' & -A' & C \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} A & C' & B' \\ C' & B & A' \\ B' & A' & C \end{vmatrix}^2,$$

oder nach seiner Schreibart $\square = -2K^2$; er bemerkte dazu, dass

es interessant sein würde, a priori zu zeigen, dass □ als einen Factor K^2 enthielte. In der vorliegenden Note wird dieser Beweis geführt. Gbs. (Lp.)

W. J. C. SHARP, G. HEPPEL, S. J. CURTIS, H. W. CURJEL. Solution of questions 10977, 10934. Ed. Times LV. 116, 123.

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

$$= x_1 x_2 \dots x_n \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} \right).$$

Fügt man in der Determinante eine $(n+1)^{te}$, aus lauter Einheiten bestehende Horizontalreihe und Verticalreihe hinzu, so ist ihr Wert gleich $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$. Lp.

L. SCHENDEL. Mathematische Miscellen. Schlömilch Z. XXXVI. 302-308.

Die Arbeit enthält Mitteilungen aus einem von dem Verfasser angekündigten Werke „Die Division in der Theorie der ganzen Functionen einer Variabeln. Bekanntes und Neues in neuer Form". — Durch Einführung geeigneter Bezeichnungen gelingt es ihm, eine independente Darstellung 1) der bei der Division zweier ganzen Functionen auftretenden Quotienten und Reste durch deren Coefficienten, 2) der Partialzähler bei der Zerlegung einer gebrochenen Function in Partialbrüche mit Hülfe eleganter Determinantenausdrücke zu liefern. Wbg.

K. WEIHRAUCH. Ueber gewisse goniometrische Determinanten und damit zusammenhängende Systeme von linearen Gleichungen. Schlömilch Z. XXXVI. 71-77.

Zusammenstellung der Resultate, welche der Verfasser in

seiner Abhandlung „Neue Untersuchungen über die Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie“ (Schriften, herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Dorpat, IV. Dorpat 1888) gefunden hat. Vergl. F. d. M., XX. 1270—1271, sowie auch 148. Wbg.

A. Cayley. Note on the involutant of two binary matrices. Mess. (2) XX. 136-137.

Man betrachte die beiden Matrizen

$$M = \begin{matrix}(a, & b)\\ |c, & d|\end{matrix}, \quad M' = \begin{matrix}(a', & b')\\ |c', & d'|\end{matrix},$$

sowie ihr Product in der einen oder anderen Folge:

$$MM' = \begin{matrix}(A, & B)\\ |C, & D|\end{matrix}, \quad M'M = \begin{matrix}(A_1, & B_1)\\ |C_1, & D_1|\end{matrix},$$

so ist die Involutante, nach ihrer Definition, gleich jeder der beiden Determinanten:

$$I = \begin{vmatrix} 1 & a & a' & A \\ 0 & b & b' & B \\ 0 & c & c' & C \\ 1 & d & d' & D \end{vmatrix}, \quad I_1 = \begin{vmatrix} 1 & a' & a & A_1 \\ 0 & b' & b & B_1 \\ 0 & c' & c & C_1 \\ 1 & d' & d & D_1 \end{vmatrix},$$

und daher, wie bewiesen wird, $I = I_1$. Lp.

A. Cayley. On an algebraical identity relating to the six coordinates of a line. Mess. (2) XX. 138-140.

Die Identität lautet:

$$\begin{aligned} 0 = & \begin{vmatrix} B & C & F \\ b & c & f \\ b' & c' & f' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \\ & -(bc'-b'c)^2(AF+BG+CH) \\ & +(bc'-b'c)\ (bC-cB)\ (Af'+Bg'+Ch'+Fa'+Gb'+Hc') \\ & -(bc'-b'c)\ (b'C-c'B)(Af+Bg+Ch+Fa+Gb+Hc) \\ & -(bC-cB)^2 \qquad (a'f'+b'g'+c'h') \\ & +(bC-cB)\ (b'C-c'B)(af'+a'f+bg'+b'g+ch'+c'h) \\ & -(b'C-c'B)^2 \qquad (af+bg+ch), \end{aligned}$$

wo alle Buchstaben beliebige Werte bedeuten. Setzt man die letzten Factoren der letzten sechs Zeilen gleich Null, so lassen sich diese Gleichungen als zwischen Coordinaten von Linien deuten: (a, b, c, f, g, h), (a', b', c', f', g', h') und (A, B, C, F, G, H), so dass die dritte die beiden ersten schneidet, welche sich ebenfalls schneiden. Lp.

M. Martone. La funzione alef di Hoëné Wronski. Catanzaro. Maccarone. 20 S. 8°.

Die Wronski'sche Aleph - Function $\aleph(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^m$ oder $\aleph(N_n)^m$ ist derjenige Ausdruck, den man erhält, wenn man in der Entwickelung von $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^m = N_n^m$ die Polynomialcoefficienten durch die Einheit ersetzt. Es ist z. B.:

$$\aleph(a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2.$$

Eine wichtige Eigenschaft der Aleph-Function ist die folgende:

$$\aleph(N_n - a_i)^m - \aleph(N_n - a_h)^m = (a_h - a_i)\aleph(N_n)^{m-1}.$$

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^n - P_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n P_n = 0$$

(nicht $x^n + P_1 x^{n-1} + \cdots + P_n = 0$, wie der Text angiebt), so erhält man:

$$\aleph(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^m = \begin{vmatrix} (-1)^{n-1}P_n & -P_1 & P_2 \ldots (-1)^{n-1}P_{n-1} \\ (-1)^{n-2}P_{n-1} & 1 & -P_1 \ldots (-1)^{n-2}P_{n-2} \\ (-1)^{n-3}P_{n-2} & 0 & 1 \ldots (-1)^{n-3}P_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -P_2 & 0 & 0 \quad 0 \qquad -P_1 \\ -P_1 & 0 & 0 \quad 0 \qquad 1 \end{vmatrix}.$$

Auf andere Eigenschaften der Aleph-Function können wir nicht eingehen; es möge nur erinnert werden, dass diese Function mit der Theorie der Kettenbrüche eng zusammenhängt.

Vi.

H. W. Tyler. Beziehungen zwischen der Sylvester'schen und der Bézout'schen Determinante. Diss. Erlangen. 8°.

F. Mertens. Ueber ganze und symmetrische Functionen.
Abh. der Krakauer Akademie. (2) I. 1891. 333-352. (Polnisch.)

Der Zweck dieser Schrift ist eine neue Ableitung der Haupteigenschaften der ganzen symmetrischen Functionen von n Veränderlichen und von n Gruppen, deren jede aus einer gleichen Anzahl von Veränderlichen besteht. Der Verfasser beweist auf elementare Weise mehrere Sätze, deren erster (welcher die Grundlage der Untersuchung bildet) folgendermassen lautet:

Satz I. „Ist eine ganze Function F der Veränderlichen $x, y, u, v, w, \dots$ mit ganzen Coefficienten homogen in Bezug auf x, y, sowie in Bezug auf u, v und verschwindet identisch für $x=u$, $y=v$, so ist sie algebraisch durch $xv-yu$ teilbar, und der Quotient hat ganze Coefficienten".

Aus diesem Satze folgt einfach die Lagrange'sche Interpolationsformel.

Von den weiteren Sätzen heben wir die folgenden hervor:

Satz III. „Hat ein ganzer von den Veränderlichen

$$a_0, a_1, \dots, a_n,$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

abhängiger Ausdruck Φ, dessen Ordnung in Bezug auf jede der Veränderlichen x die Zahl $n-1$ nicht übersteigt, die Form

$$\Phi = M_1 F(x_1, y_1) + M_2 F(x_2, y_2) + \cdots + M_n F(x_n, y_n),$$

wo $M_1, M_2, \dots, M_n$ ganze Functionen derselben Veränderlichen bezeichnen, und

$$F(x, y) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 - \cdots \pm a_n y^n$$

ist, so ist identisch $\Phi = 0$".

Satz VI. (Hauptsatz der Theorie.) Ist S eine ganze Function der Veränderlichen

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

mit ganzen Coefficienten, symmetrisch und homogen in Bezug auf jedes der Paare

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \dots, \quad (x_n, y_n),$$

so kann man eine ganze und homogene Function von

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

mit ganzen Coefficienten aufstellen, die für

$$a_0 = \Gamma_0, \; a_1 = \Gamma_1, \; \dots, \; a_n = \Gamma_n$$

in S übergeht. Es existirt nur eine einzige Function dieser Art".

$\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ sind hier die elementaren symmetrischen Functionen, nämlich

$$\Gamma_0 = y_1 y_2 \quad \cdots y_n,$$
$$\Gamma_1 = x_1 y_2 y_3 \cdots y_n + x_2 y_1 y_3 \quad \cdots y_n + \cdots + x_n \quad y_1 y_2 \quad \cdots y_{n-1},$$
$$\Gamma_2 = x_1 x_2 y_3 \cdots y_n + x_1 x_3 y_2 y_4 \cdots y_n + \cdots + x_{n-1} x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-2},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\Gamma_n = x_1 x_2 \quad \dots x_n.$$

Im Falle $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$ gelangt man zu der Berechnungsmethode der symmetrischen Functionen S von n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$.

In den letzten Paragraphen wird gezeigt, wie man eine ganze Function einer Reihe von aus derselben Anzahl Veränderlicher bestehenden Gruppen in eine Function verwandelt, die nur eine Reihe von Veränderlichen und gewisse symmetrische Ausdrücke enthält. Dn.

G. B. Mathews. On the classification of symmetric functions. Quart. J. XXV. 127-136.

Es handelt sich um die Einteilung der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung nach der niedrigsten in ihnen auftretenden Potenz der Wurzeln, und zwar werden zu einer Klasse zusammengefasst alle diejenigen, in denen keine niedrigere Potenz auftritt als die zweite, zu einer andern die, in denen keine niedrigere Potenz auftritt als die vierte, die achte u. s. w., wobei die Zahlen in geometrischer Reihe fortschreiten. Die symmetrischen Functionen jeder Klasse genügen bestimmten Differentialgleichungen. In jeder Klasse giebt es eine Reihe fundamentaler symmetrischer Functionen, durch welche alle anderen ganz und rational ausgedrückt werden können, und die ihrerseits sich als ganze Functionen der Fundamentalreihe der nächst vorhergehenden Klasse darstellen lassen. Die Einführung dieser Fundamentalreihen bezweckt eine wesentliche Vereinfachung der Tafeln symmetrischer Functionen. F.

P. A. MacMahon. Third and fourth memoir on a new theory of symmetric functions. American J. XIII. 193-234, XIV. 15-38.

Fortsetzung des „Second memoir" (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 155). Den Inhalt aller vier Denkschriften hat der Verfasser inzwischen in dem „Memoir on the symmetric functions of the roots of equations", Lond. Phil. Trans. CLXXXI. 481-536 in erweiterter Form veröffentlicht, worüber bereits im vorigen Jahrgang (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 187) referirt worden ist.

F.

F. Junker. Die Relationen, welche zwischen den elementaren symmetrischen Functionen bestehen. Math. Ann. XXXVIII. 91-114.

Hat man r Gruppen von je $n+1$ Elementen, welche derart auf einander bezogen sind, dass zu jedem Element einer Gruppe ein entsprechendes Element jeder andern Gruppe gehört, so ist eine ganze Function dieser Elemente, welche sich nicht ändert, wenn man die Elemente einer Gruppe mit den entsprechenden irgend einer andern vertauscht, eine symmetrische Function der Gruppen. Treten in den einzelnen Gliedern die Elemente jeder Gruppe höchstens im ersten Grade auf, so heisst die Function eine symmetrische Elementarfunction der Gruppen. Da die Anzahl der Elementarfunctionen erheblich grösser ist als die Anzahl der Elemente, so müssen zwischen den Elementarfunctionen identische Relationen bestehen. Die Aufsuchung dieser Relationen ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Der Verf. entwickelt zunächst eine allgemeine Methode zur Bildung der Relationen, benutzt dieselbe dann, um für die Fälle $n=2$ und $n=3$ die einfacheren Relationen wirklich aufzustellen, und zeigt schliesslich, wie man dieselben verwenden kann, um beliebige symmetrische Functionen durch die Elementarfunctionen auszudrücken.

F.

Worontzoff. Sur les fonctions symétriques. Nouv. Ann. (3) X. 325-329.

Bezeichnet u eine ganze rationale symmetrische Function der Wurzeln $x_1, \ldots, x_n$ einer algebraischen Gleichung mit den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$, so besteht bekanntlich die Relation

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial u}{\partial x_k} = -\sum_{r=1}^{r=n} (n-r+1) a_{r-1} \frac{\partial x}{\partial a_r}.$$

Der Verf. verallgemeinert diese Formel, indem er

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^m \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

als lineares Aggregat von $\frac{\partial u}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial a_n}$ darstellt. F.

D. Gambioli. Sopra alcune relazioni fra le funzioni simmetriche e sopra particolari loro caratteri invariantivi. Batt. G. XXIX. 41-60.

Die Arbeit behandelt die Beziehungen zwischen den Potenzsummen s_ν, den elementar-symmetrischen Functionen σ_ν und den Functionen $h_\nu = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \sigma_{\nu+1}}{\partial s_1}$ von n unabhängigen Grössen, und drückt insbesondere die einen dieser Functionen durch die anderen in Determinantenform aus. Den Schluss bilden einige geometrische Anwendungen. F.

D. F. Selivanow. Ueber die Functionen der Wurzeldifferenzen einer Gleichung. Mosk. Math. Samml. XVI.

Es wird die Methode von Cayley für die Berechnung der symmetrischen Functionen der Wurzeldifferenzen (Philosophical Transactions CXLVIII) auseinandergesetzt und auf die Berechnung der Discriminante der Gleichungen zweiten, dritten, vierten und fünften Grades und auf die Berechnung der Resolventen von Ferrari und Lagrange angewandt. Wi.

Dritter Abschnitt.

Niedere und höhere Arithmetik.

Capitel 1.

Niedere Arithmetik.

R. Grassmann. Die Zahlenlehre oder Arithmetik streng wissenschaftlich in strenger Formel-Entwickelung. Stettin. R. Grassmann. XII + 242 S. 8°.

Das vorliegende, von dem Bruder des Schöpfers der Ausdehnungslehre herrührende Werk bildet die Erweiterung einer bereits 20 Jahre früher erschienenen Schrift über denselben Gegenstand und gehört, wie diese, einer in zahlreiche Bände verteilten Encyklopädie an, in welcher der Verfasser ein vielseitiges, beständig wachsendes Material nicht nur klar und übersichtlich dargestellt, sondern auch überall auf Grund eigenen Nachdenkens selbständig verarbeitet und mit neuen, nicht immer einwandfreien, aber stets originellen und interessanten Ideen befruchtet hat. Am bekanntesten hiervon ist die bahnbrechende Darstellung der formalen Logik geworden. Die Grundsätze der vorliegenden Bearbeitung der Arithmetik sind bereits massgebend gewesen für den ersten Teil eines auf Grund gemeinsamer Studien der beiden Brüder von Hermann G. im Jahre 1860 herausgegebenen Lehrbuchs der Mathematik, von welchem später nur noch der trigonometrische Teil erschienen ist. Schon jenes Buch trat mit dem Anspruch auf, nicht nur die erste streng wissenschaftliche

sondern auch die einzig mögliche, naturgemässe Behandlung der Arithmetik zu geben. Dieser Anspruch wird hier wörtlich wiederholt, und nur zu Gunsten von Schröder's Lehrbuch wird eine Ausnahme gemacht. In der That muss zugestanden werden, dass das vorliegende Werk, was Schärfe in der Feststellung der Begriffe, Consequenz in der Entwickelung und Uebersichtlichkeit des systematischen Aufbaus betrifft, im ganzen schwerlich übertroffen werden kann. Wie alle sonstigen Schriften des Verfassers ist auch diese charakterisirt durch eine beispiellose Vorurteilslosigkeit gegenüber den überkommenen Lehren und Anschauungen, die vor keiner als notwendig erkannten Neuerung zurückschreckt, aber auch durch eine rücksichtslose Kritik, die sich nicht immer in ansprechenden Formen bewegt. Dazu kommen die in reclamirendem Tone gehaltenen, wenn auch historisch berechtigten Hervorhebungen der Fortschritte, welche man in diesem oder jenem Punkte den gemeinsamen Studien der Brüder Grassmann verdankt, die Ignorirung und Unterschätzung der zahlreichen Fortschritte, welche doch seit jener Zeit auch von anderer Seite gemacht worden sind, und des Strebens auf diesem Gebiete, für welches z. B. die Hoffmann'sche Zeitschrift, trotz mancher kläglichen Einzelheiten der Discussion, ein rühmliches Zeugnis ablegt, ferner die Verschwendung, die mit dem Ausdrucke „streng wissenschaftlich" getrieben wird, und andere, dem üblichen Stile wissenschaftlicher Werke zuwiderlaufende Eigenheiten der Vortragsweise. Je höher wir die sachlichen Verdienste des Verfassers schätzen, desto mehr fühlen wir uns verpflichtet, auf jene Mängel der Darstellung hinzuweisen, die nur zu sehr geeignet sind, den mit der Eigenart des Verfassers nicht vertrauten Leser missmutig zu machen. Ohnehin schon wird das Studium auch dieses Werkes, gleich dem der früheren, gestört durch das revolutionäre Streben, eine rein deutsche Terminologie zu schaffen, welche, so wohldurchdacht und trefflich sie auch ist, zunächst recht befremdlich wirkt, ein Eindruck, der durch Eigenheiten der Orthographie, welche die modernen Errungenschaften auf diesem Gebiete noch übertrumpfen, erhöht wird. Wir setzen es in erster Linie mit auf alle diese Aeusserlichkeiten, wenn des Verfassers verdienst-

liche Arbeiten sich nur langsam Bahn brechen, und würden z. B. eine in den gewohnten Ausdrücken sich bewegende Darstellung, begleitet von einem die neuen Vorschläge enthaltenden Wortverzeichnis, für wirksamer halten, als das vom Verf. befolgte Verfahren, Uebersetzungen der neuen Ausdrücke in die alte Form einzustreuen.

Der Lehrgang des Verfassers besteht darin, die Sätze der allgemeinen Grössenlehre voranzuschicken, sodann die allgemeine Arithmetik zu entwickeln, welche alle, der gewöhnlichen Arithmetik, Logik, Combinations- und Functionslehre gemeinsamen Gesetze enthält, worauf erst die eigentliche Arithmetik folgt. Indem bei dieser Stufenfolge gewisse Beweise und Betrachtungen, die sich sonst in ähnlicher Form in den drei Rechnungsstufen wiederholen, im allgemeinen Teile auf einmal absolvirt werden, wird eine Ersparnis erzielt. Diesem Vorteile steht aber pädagogisch der Uebelstand gegenüber, dass mit den abstractesten Operationen begonnen wird, während jene Wiederholungen gerade von Nutzen sind. Mit Recht verwirft der Verfasser die herkömmlichen, dogmatischen Beweisformen für die Gesetze der Arithmetik, er will aber nur den Schluss von n auf $n+1$ gelten lassen, was zutreffend erscheint, sobald es sich um abstracte oder allgemeine Einheiten handelt. Beginnt man aber die Betrachtungen der Arithmetik mit der „Eins“, so kann Ref. nicht die Ueberzeugung teilen, dass jenes schwerfällige, ohnehin auf ganze positive Zahlen beschränkte Beweisverfahren das allein wissenschaftliche sein soll, und verweist in dieser Hinsicht z. B. auf den in seinem eigenen Lehrbuch der Mathematik gemachten Versuch. Ueberhaupt nötigt die Voraussetzung allgemeiner Einheiten zu allerlei Cautelen und Festsetzungen, deren man für die eigentliche Arithmetik nicht bedarf. So richtig es also auch an sich ist, diese Wissenschaft als speciellen Zweig der allgemeinen Grössenlehre aufzufassen und zu behandeln, und so grosse Befriedigung und Belehrung es dem Verstande eines geschulten Fachmannes gewähren muss, dem Verfasser auf seinem streng vorgezeichneten Wege zu folgen, so dürfte doch der Anfänger auch künftig besser zunächst in die (hier erst auf S. 50 beginnende) Zahlenlehre ein-

zuführen sein. In dieser, die hier im allgemeinen den gewohnten Gang innehält, begegnet man einer Fülle beachtenswerter Hinweise auf meist übersehene Ungenauigkeiten oder Missstände, die in der allmählichen Entwickelung der Theorie ihren Ursprung haben, sowie einer Anzahl praktischer Neuerungen und präciserer Formulirungen bekannter Thatsachen. Die eingestreuten Angriffe auf bestehende Benennungen oder auf die Darstellungsart anderer Lehrbücher erscheinen freilich nicht immer stichhaltig; mitunter auch richtet sich die Polemik gegen Zustände, die heute nach dem Stande der Litteratur als überwunden gelten dürfen. Selbstverständliches wird urgirt; und wenn wir hier und da Lücken anderer Lehrgänge ausgefüllt, Folgesätze ausgesprochen finden, die gewöhnlich übergangen werden, Erweiterungen (von 2 auf mehr Zahlen) begründet, wo sonst nur eine Andeutung gegeben wird, so müssen wir uns oft sagen, dass es immer eine Frage des pädagogischen Taktes bleiben wird, wie weit der Lehrer bei jeder Durchnahme des Pensums in dieser Kleinarbeit gehen soll. — Besondere Aufmerksamkeit widmet der Verfasser dem Gebrauch und Missbrauch der Klammern, und vor allem der Unterscheidung mehrwertiger und einwertiger Grössen. So unterscheidet er bei Aufstellung der umgekehrten Rechnungsarten die (eindeutige) „Trennung“ von der (mehrdeutigen) „Lösung“. Die Irrationalzahl wird nur indirect definirt, die Lehre von den complexen Zahlen vollständig vorgetragen, auch mit ihren Anwendungen auf trigonometrische Functionen, Wurzeln, Logarithmen, Exponentialfunction und Gleichungen höheren Grades. Erläuternde Zahlenbeispiele sind in angemessener Auswahl beigefügt, auch einige Hülfstafeln fürs Rechnen. In den Anwendungen ist den üblichen Anforderungen des Unterrichts Rechnung getragen. Auf weitere Einzelnheiten hier einzugehen, verbietet der Raum. Bemerkt sei noch, dass an die Zahlenlehre als gleichstehende Zweige sich anschliessen sollen: die Ausdehnungslehre (vgl. Referat in diesem Bande), Combinationslehre und Functionslehre.

Schg.

Fr. Divić. Die sieben Rechnungsoperationen mit allgemeinen Zahlen. Wien und Leipzig. A. Pichler's Wittwe u. Sohn. 165 S. 8°.

Das Buch stellt einen Versuch dar, die Lehre von den sieben Rechnungsoperationen (Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren, Radiciren, Logarithmiren) in aller Strenge zu entwickeln. Als seiner Darstellung eigentümlich betrachtet der Verf. selbst die Definitionen der sieben Rechnungsarten, welche so gegeben werden, dass jede Operation für sich, ohne Beziehung auf andere, erklärt wird, und dass die Definitionen von vorn herein für beliebige (nicht nur für die natürlichen) Zahlen anwendbar sind. Der Verf. will auf diese Weise die nach seiner Ansicht zum Teil willkürlichen Festsetzungen vermeiden, die bei der Ausdehnung der Rechnungsoperationen auf negative, imaginäre etc. Zahlen gewöhnlich getroffen werden, übersieht aber, dass bei ihm schon die ursprünglichen Definitionen, insofern sie von den gewöhnlichen abweichen (namentlich die des Potenzirens und des Radicirens), etwas Willkürliches und Gekünsteltes an sich haben. — Das Capitel über das Rechnen mit irrationalen Zahlen scheint dem Referenten wenig befriedigend. F.

Barnard Smith. Arithmetic for schools. New edition, revised and enlarged by W. H. H. Hudson. London. Macmillan and Co. IX + 458 S.

Ch. Pendlebury. Arithmetic. Sixth edition, revised. Cambridge. Deighton, Bell and Co. XII + 386 + XX + XIX S.

Die beiden Lehrbücher der Arithmetik für Schulen sind in ihrer Art ganz trefflich und verdienen die Beliebtheit, deren sie sich erfreuen. Die Aufgabensammlung ist bei beiden recht reichhaltig. Jeder, der diese Bücher durchblättert, wird erkennen, wie schlimm der englische Schüler durch unser verkehrtes Mass- und Gewicht-System überbürdet ist. Gbs. (Lp.)

A. Sickenberger. Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. 5. Aufl. München (1892). Th. Ackermann. VII + 196 S. mit 1 Fig.-Taf. 8°.

Der Leitfaden, welcher in fünfter, wenig veränderter Auflage erscheint, lehrt in präciser und den an wissenschaftliche Strenge zu stellenden Forderungen genügender Form das Rechnen mit bestimmten, unbenannten und benannten, ganzen und gebrochenen Zahlen, so wie die Lösung der Regeldetri-, Zins- u. s. w. Aufgaben. Zur Einübung des Lehrstoffes dienen zahlreiche Beispiele. F.

A. Sickenberger. Leitfaden der elementaren Mathematik. Erster Teil. Algebra. 2. Aufl. München (1892). Th. Ackermann. VII + 75 S. 8°.

Kurzgefasster Lehrgang der elementaren Algebra bis zur Theorie der quadratischen Gleichungen und der geometrischen und arithmetischen Reihen. Die zweite Auflage enthält Aenderungen nur an einzelnen Stellen. F.

W. Winter. Algebra. Lehrbuch mit Aufgabensammlung für Schulen. München. Th. Ackermann. IV + 329 S. 8°.

Ausführliches Lehrbuch der elementaren Algebra mit zahlreichen Uebungsaufgaben. F.

F. Zerbst. Einige Entwickelungen aus dem Unterricht in der allgemeinen Arithmetik. Pr. (Nr. 160) Gymn. Schneidemühl. 14 S. 4°.

Eine kurze Darstellung des Anfangsunterrichtes in der Arithmetik, welche dem Schüler Lehrsätze und Beweise nicht dogmatisch überliefern, sondern ihn klar den Weg erkennen lassen will, auf welchem dieselben zu finden sind. Zu diesem Zweck werden die Formeln in der Weise abgeleitet, dass der umzuformende Ausdruck gleich einer Unbekannten gesetzt und für diese, unter Anwendung der schon für die Auflösung einfacher Glei-

chungen abgeleiteten Regeln, ein Ausdruck von anderer Form gefunden wird. F.

F. Conradt. Schulmässige Darstellung des Rechnens mit irrationalen Zahlen auf wissenschaftlicher Grundlage. Hoffmann Z. XXII. 481-491.

Der Verf. beabsichtigt, die Darstellung des Rechnens mit irrationalen Zahlen „dem Unterrichte in einer wissenschaftlichen Anforderungen entsprechenden Form zugänglich zu machen". Er definirt eine irrationale Zahl als „eine Zahl, welche, ohne selbst rational zu sein, sich zwischen zwei rationale Grenzen einschliessen lässt, deren Unterschied beliebig klein gemacht werden kann", und führt die Beweise für die Ausführbarkeit der verschiedenen Rechnungsoperationen alle auf den Satz zurück, den er als Grundsatz bezeichnet: „Lassen sich zwei veränderliche rationale Zahlen so annähern, dass ihr Unterschied beliebig klein gemacht werden kann, so giebt es stets eine und nur eine irrationale oder rationale Zahl, für welche jene rationalen Zahlen die Grenzen sind".

F.

R. Krüger. Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und complexen Zahlen. Stuttgart. J. Maier. VIII + 166 S. 8°.

Ausführliche Darstellung der Lehre von den complexen Zahlen nach der bekannten Kleyer'schen, für das Selbststudium berechneten und das geringste Mass an Vorkenntnissen voraussetzenden Methode. Viele Aufgaben sind vollständig gelöst, die Resultate der übrigen in einem Anhange zusammengestellt.

F.

Alb. Meyer. Ein Beitrag zu dem Rechenunterricht an höheren Lehranstalten. Pr. (Nr. 562) Realsch. Grossenhain. 42 S. 8°.

Auf eine Einleitung über die Entstehung des Zahlbegriffs folgt eine Darstellung des Unterrichtsganges im Rechnen mit

gewöhnlichen und Decimal-Brüchen, worin Refer. etwas wesentlich Neues nicht hat finden können. F.

M. Kämmerer. Zur Theorie des Negativen und Imaginären. Pr. (Nr. 713) Realsch. Sondershausen. 17 S. 4°.

Die Arbeit wendet sich gegen die Auffassung des Negativen und Imaginären als etwas für sich Existirenden und z. B. durch geometrische Mittel Darstellbaren; sie plaidirt dafür, dass negative und imaginäre Zahlen nichts anderes als absolute, wirkliche Zahlen sind, deren Vorzeichen jedoch andeutet, dass sie aus einem Gleichungszusammenhange herstammen, in welchem gewisse Operationen unausführbar sind, gleichzeitig aber auch auf eine Gleichung hinweist, die eine Lösung in absoluten Zahlen zulässt. Der Verf. folgt in seinen Ausführungen den Gedanken Dühring's (Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis, Algebra und Functionsrechnung), woraus sich auch wohl sein geringschätziges Urteil über Gauss erklärt. F.

E. Ullrich. Das Rechnen mit Duodecimalzahlen. Pr. Realsch. Heidelberg. 30 S. 4°.

Kurze Uebersicht über die Geschichte der Zahlensysteme und ausführliche Darstellung des Rechnens mit Duodecimalzahlen. F.

W. W. Johnson. Octonary numeration. New York M. S. Bull. I. 1-6.

Der Verf. hebt die Vorteile eines Zahlensystems hervor, in welchem alle Zahlen nach Potenzen der Grundzahl 8 entwickelt geschrieben werden. Lp.

C. Cuthbertson. Mental arithmetic. Nature XLV. 78-79.

K. Haas. Mental arithmetic. Nature XLV. 198-199.

Für die im Kopfe auszuführende Multiplication mehrstelliger Zahlen empfiehlt Hr. Cuthbertson eine Methode, die, wie Hr. Haas

angiebt, bereits bei Pappus vorkommt und den Indern Brahmagupta und Bhaskara gleichfalls bekannt war. Lp.

LAUR. JELÍNEK. Mechanische Bestimmung des Stellenwertes in Product und Quotient dekadischer Zahlen. Casop. XX. 35. (Böhmisch.)

Unter der Verwendung der Formel

$$a.10^m \times b.10^{\pm n} = (ab).10^{m\pm n}$$

und

$$a.10^m : b.10^{\pm n} = (a/b).10^{m\mp n}$$

wird gezeigt, wie man den Decimalpunkt im Product und Quotienten sofort gleichsam mechanisch fixiren kann. Std.

R. BETTAZZI. Sui sistemi di numerazione per i numeri reali. Periodico di Mat. VI. 14-23.

Es ist unmöglich, eine abzählbare Menge von ganze Zahlen oder Operationen bezeichnenden Symbolen derart anzugeben, dass jede reelle Grösse durch diese Symbole, in endlicher Anzahl genommen, darstellbar sei. Vi.

E. SADUN. Sulla divisibilità dei polinomi per il binomio $x^r - a^r$ e per il polinomio $x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \cdots + a^{m-1}x + a^m$. Periodico di Mat. VI. 123-125, 180-185.

Die Teilbarkeitsbedingungen für $x^m + ax^{m-1} + \cdots + a^m$ ergeben sich aus denjenigen für $x^r - a^r$ (vgl. Sadun, Condizioni di divisibilità d'un polinomio per un binomio della forma $x^r - a^r$, Besso Per. Mat. III. 129—36; F. d. M. XX. 1888. 163) durch den folgenden Satz:

Ein Polynom P ist dann und nur dann durch

$$x^m + ax^{m-1} + \cdots + a^m$$

teilbar, wenn der Rest der Teilung von P durch $x^{m+1} - a^{m+1}$ die Form $C(x^m + ax^{m-1} + \cdots + a^m)$ hat, wo C eine von x unabhängige Grösse bezeichnet. Vi.

E. JANISCH. Bemerkungen zum Rationalmachen der Nenner. Hoppe Arch. (2) X. 420-440.

Die von Grebe angegebene Methode (Ueber das Rationalmachen von Nennern mit unbestimmt vielen irrationalen Gliedern. Grunert Arch. XIII. 68. 1849) wird auf einige Beispiele mit der Modification angewandt, dass die entstehenden linearen Gleichungen durch Determinanten aufgelöst werden. Dabei ergiebt sich eine Reihe von Relationen unter den Minoren der Determinante des Gleichungssystems; es lassen sich sämtliche Unterdeterminanten durch die zu den Elementen einer Reihe gehörigen ausdrücken. Dieselbe Methode kann auch dazu dienen, eine gebrochene rationale Function einer Wurzel einer algebraischen Gleichung als ganze Function dieser Wurzel darzustellen. Unter den Subdeterminanten der Determinante des aufzulösenden Systems linearer Gleichungen bestehen gleichfalls Relationen. Da diese Determinante gleich dem Producte aus dem Nenner der rationalen Function und allen conjugirten Ausdrücken ist, so ergeben sich durch Coefficienten-Vergleichung die Werte symmetrischer Functionen der Wurzeln, ausgedrückt durch die Coefficienten der Gleichung. F.

B. ADAM. Das Rationalmachen der Bruchnenner. Pr. (Nr. 293) Gymn. Clausthal. 15 S. 4°.

Die Arbeit behandelt ausführlich das Rationalmachen solcher Nenner, welche Aggregate von zwei oder drei Wurzeln mit beliebigen Wurzelexponenten sind. Richtig zu stellen ist die Bemerkung des Verfassers, es sei „wahrscheinlich", dass auch die allgemeine Lösung des Rationalmachens der vier- und mehrgliedrigen Bruchnenner möglich sei, insofern als es a priori klar ist, dass jedes Aggregat von beliebig vielen Wurzeln durch Multiplication mit allen conjugirten Ausdrücken rational wird.

F.

V. THALLMAYER. Angenäherte Berechnung von Wurzelgrössen nebst Anwendungen. Hoppe Arch. (2) X. 32-61.

Es ist

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\cdots} = \alpha.a+\beta\, b+\gamma.c+\delta.d+\cdots,$$

sobald α, β, γ, δ so bestimmt werden, dass

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta:\cdots = a:b:c:d:\cdots$$

und

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\cdots = 1$$

ist. Diesen Bedingungen lässt sich leicht genügen, wenn man für α, β, γ, δ, ... trigonometrische Functionen gewisser Hülfswinkel setzt. So ist z. B.

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = a\cos\varphi.\cos\varphi_1+b\sin\varphi.\cos\varphi_1+c\sin\varphi_1,$$

wo

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{a}{c}$$

und

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{b}{a\sin\varphi+c\cos\varphi}.$$

In ähnlicher Weise lässt sich $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\cdots}$ auch durch Ausdrücke von der Form

$$a+\beta.b+\gamma.c+\delta.d+\cdots$$

berechnen.

Benutzt man diese Formeln bei dem Problem der Zusammensetzung von Kräften, die an einem oder an mehreren Punkten angreifen, so erhält man für die Resultante Ausdrücke, die dem Rechner das Quadriren und Wurzelziehen ersparen und sich auch geometrisch veranschaulichen lassen. F.

C. A. Laisant. Sur l'évaluation des moyennes (application pratique). J. de Math. élém. (3) V. 7-8.

Das arithmetische Mittel V der mittleren Geschwindigkeiten von n Bewegungen (Märschen) ist nicht gleich dem Quotienten V' aus der Summe der Weglängen durch die Summe der Zeiten für die einzelnen Wege, sondern es ist $V > V'$. Lp.

B. CARRARA. Lezione sui massimi e minimi delle funzioni di 2° grado. Cremona. Fezzi. 48 S. (Lith.)

Die Maximal- und Minimalwerte des Ausdruckes

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} = m$$

sind diejenigen Werte von m, für welche:

$$(b'^2-4a'c')m^2+2(2ac'+2ca'-bb')m+(b^2-4ac) = 0$$

ist; die entsprechenden Werte von x sind durch $x = \frac{b'm-b}{2(a-a'm)}$ gegeben. — Die Theorie wird in der vorliegenden Schrift auf zahlreiche geometrische Probleme angewandt. Vi.

Weitere Litteratur.

W. ADAM. Auflösungen der 6500 Aufgaben für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. In methodischer Stufenfolge bearbeitet. 2. Teil. Neuruppin. Petrenz. VII + 139 S. 8°.

A. ADLER. Graphische Auflösung der Gleichungen. Klagenfurt. v. Kleinmayr. 26 S. 8°. (Vgl. oben S. 99.)

A. BRENNER. Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik. 1. Teil. 2. Aufl. Freising. F. P. Datterer. 118 S. 8°.

F. E. FELLER und C. G. ODERMANN. Das Ganze der kaufmännischen Arithmetik. Zum 9. Male bearbeitet von C. Odermann. 16. Aufl. Leipzig. Otto Aug. Schulz. X + 493 S. 8°.

E. FISCHER. Systematischer Grundriss der Elementar-Mathematik. Abteilung I: Die Algebra und die Grundbegriffe der Differentialrechnung. Berlin. V + 163 S. gr. 8°.

K. FUSS. Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra für den Schul- und Selbstunterricht. 3. Aufl. 1. Teil. Nürnberg. Korn'sche Buchh. VIII + 216 S. gr. 8°.

M. GLÖSER. Grundzüge der allgemeinen Arithmetik für die dritte Klasse der österreichischen Mittelschulen. 3. Aufl. Wien. Pichler's Wittwe u. Sohn. V + 107 S. mit 2 Tab. 8°.

A. F. Hauck und H. Hauck. Lehrbuch der Arithmetik für Latein-, Real- und Handelsschulen. 1. Teil. 1. Abt. 7. Aufl. Hrsg. von J. Brunotte. Resultate. Nürnberg. Korn'sche Buchh. 62 S. 8°.

O. Hermes. Elementaraufgaben aus der Algebra. 3. Aufl. Berlin. Winckelmann u. Söhne. VIII + 143 S. 8°.

F. Hočevar. Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik für die unteren Klassen der Gymnasien und verwandten Lehranstalten. Leipzig. Freytag. IV + 134 S. 8°.

J. Kober. Die Grundlagen der Arithmetik. Hoffmann Z. XXII. 495-500.

K. W. Neumann. Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra. 6. Aufl. Bremen (1892). M. Heinsius Nachf. VIII + 215 S. 8°.

J. H. Kühl. Leitfaden der Arithmetik und Algebra. Für den Schul- und Selbstunterricht bearbeitet. 2. Teil. Hamburg. Kriebel. V + 306 S. 12°.

H. Müller. Die Elemente der Arithmetik und Algebra. Ein Hülfsbuch zum Gebrauche mit einer der systematisch geordneten Aufgabensammlungen. Metz. Scriba. IV + 68 S.

W. J. Schüller. Arithmetik und Algebra für höhere Schulen und Lehrerseminare, besonders zum Selbstunterricht. Leipzig. Teubner. XIX + 452 S. 8°.

H. Staudacher. Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen. Teil II: Elemente der Zahlenlehre. Decimal- und Kettenbrüche und Rechnung mit unvollständigen Zahlen. Nach System Kleyer bearbeitet. V + 217 S. gr. 8°.

F. X. Steck und J. Bielmeyer. Lehrbuch der Arithmetik für Latein- und Realschulen. 10. Aufl. Kempten. Kösel. VIII + 119 S. 8°.

TH. WALTER. Algebraische Aufgaben. (Methodische Untersuchungen aus dem Gebiete der elementaren Mathematik.) II. Band: Quadratische Bewegungsaufgaben. Bewegungsaufgaben mit mehreren Unbekannten. Kreisbewegung. Specifisches Gewicht. Ausfluss. Arbeit. Stuttgart. Union. VIII + 278 S. 12°.

E. WROBEL. Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra, enthaltend die Formeln, Lehrsätze und Auflösungsmethoden in systematischer Anordnung und eine grosse Anzahl von Fragen und Aufgaben. 2. Teil nebst Anhang. Pensum der oberen Klassen höherer realistischer Lehranstalten. Rostock. Werther. V + 260 S. gr. 8°.

P. ANDRÉ. Exercices d'arithmétique, problèmes et théorèmes. Énoncés et solutions développées des questions proposées dans les deux ouvrages d'arithmétique. 6e éd. Paris. 360 S.

P. ANDRÉ. Nouveau cours d'arithmétique. 16e éd. Paris. 356 S.

BOURDON. Éléments d'algèbre, avec notes de M. Prouhet. 17e éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

F. GIROD. Traité élémentaire d'arithmétique théorique et pratique. 9e éd. Paris. 224 S. 8°.

F. GIROD. Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans le Cours et dans le Traité élémentaire d'arithmétique. 3e éd., revue et corrigée. Paris. 334 S. 8°.

L. MALEYX. Leçons d'arithmétique. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

CH. MÉRAY. Les fractions et les quantités négatives. Nouvelle théorie élémentaire. Paris.

CH. MÉRAY. Théorie des radicaux fondée exclusivement sur les propriétés générales des séries entières. Dijon. 75 S. 8°.

F. Verhelst. Cours d'algèbre élémentaire. Tome II: Le calcul des radicaux; les équations du second degré; les progressions et les logarithmes; la formule du binôme. Paris.

W. W. Rouse Ball. Elementary algebra. „Pitt press mathematical series". Cambridge. University Press. (1890). [Nature XLIII. 487].

W. F. Bradbury and G. C. Emery. Academic algebra. Boston. 414 S. 8°.

J. Brooksmith. Key to arithmetic in theory and practice. London. Macmillan and Co. (1890.) [Nature XLIII. 294].

E. J. Brooksmith. Woolwich mathematical papers for admission into the Royal Military Academy for the years 1880-1890. London 1891.

A. G. Cracknell. Solutions of the examples in Charles Smith's „Elementary Algebra". London, Macmillan and Co. [Nature XLIV. 444].

H. S. Hall, S. R. Knight. Solutions of the examples in elementary algebra. London. Macmillan and Co. (1891). [Nature XLIII. 389].

W. A. Potts and W. L. Sargant. Elementary algebra. With numerous examples. London. Longmans, Green and Co. (1890). [Nature XLIII. 28].

Charles Smith. Arithmetic. Cambridge. University Press. VIII + 340 S.

Ein tüchtiges Schulbuch mit zahlreichen Beispielen.

Gbs. (Lp.)

C. Arzelà. Trattato di algebra elementare ad uso dei Licei. 2ª ed. Firenze. Succ. Le Monnier. [Periodico di Mat. VI. 106].

A. Biffignandi. Le principali proprietà delle grandezze proporzionali nuovamente esposte. Acireale. Tip. Micale. [Periodico di Mat. VI. 198].

F. Castellano. Elementi d'algebra ad uso dei licei, istituti tecnici e scuole militari. Torino. Bocca.

L. CERTO. Teoria elementare dei numeri reali. Lezioni svolte nel R. Liceo Umberto I. Palermo 1890-91. (Lith.) 65 S.

C. PAGLIUNO. Aritmetica per la 1ª e 2ª classe elementare. Caserta. Costabile.

C. PAGLIUNO. Aritmetica per la 3ª classe elementare. Caserta. Costabile.

F. PANIZZA. Aritmetica razionale. Milano. Hoepli. VIII u. 187 S.

S. PINCHERLE. Gli elementi di aritmetica ad uso delle scuole secondarie inferiori. Bologna. Zanichelli.

L. ROSSI. Insegnamento razionale dell'aritmetica, della geometria e del sistema metrico nelle scuole elementari. Vol. I. Insegnamento dei problemi. Fano. Tipografia cooperativa.

G. M. TESTI. Corso di aritmetica, con numerosi esercizi e problemi, ad uso degli alunni delle scuole tecniche e dei ginnasi inferiori, secondo gli ultimi programmi governativi. IIIª ed. Livorno. R. Giusti.

G. M. TESTI. Corso di matematiche. Vol. I. Aritmetica razionale. Livorno. R. Giusti. [Periodico di Mat. VI. 163].

P. VISALLI e G. MANDES. Trattato di algebra ad uso degli alunni della R. Accademia Navale, delle scuole militari e secondarie. Livorno. Giusti.

F. DE PRADO y A. SEREIX. Cálculo de los numeros aproximados y operaciones abreviados. Madrid. 1892. 89 S.

P. DZIWIŃSKI. Algebra für höhere Klassen der Gymnasien und Realschulen. Lemberg. 1891. XI + 384 S. 8°. (Polnisch.)

W. PUCHEWICZ. Näherungen im logarithmischen Rechnen. Muzeum VII. Lemberg. 1891. S. 769-774. (Polnisch.)

W. ZAJACZKOWSKI. Anfangsgründe der Arithmetik für Mittelschulen. I. Teil. 3. Auflage. 162 S. 8°. II. Teil. 2. Auflage. Lemberg. 1891. 130 S. (Polnisch.)

Capitel 2.
Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

T. J. STIELTJES. Sur la théorie des nombres. Étude bibliographique. Toulouse Ann. IV. (1890.) 1-103.

Eine sehr gründliche und umfassende Darstellung der ersten Elemente der Zahlentheorie, mit Rücksicht auf die in der jüngsten Vergangenheit erzielten Fortschritte. Das erste Capitel behandelt die Teilbarkeit der Zahlen, von dem Algorithmus zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Teilers ausgehend. Das zweite Capitel enthält die Lehre von den Congruenzen; die von Stephen Smith eingeführte Betrachtung eines Fundamentalsystems von Lösungen einer oder mehrerer unbestimmter Gleichungen findet hier ihre Stelle. Das dritte Capitel behandelt die Systeme linearer Congruenzen, wobei neben der genauen Erörterung aller auf die Matrizen bezüglichen Fragen in erster Linie die bilineare Form nach Frobenius studirt wird. Sn.

ED. LUCAS. Théorie des nombres. Tome Ier. Le calcul des nombres entiers. Le calcul des nombres rationnels. La divisibilité arithmétique. Paris. Gauthier-Villars et Fils. XXXIV + 520 S. 8°.

Ausführliche Anzeige dieses einzigen Bandes des Werkes, nach dessen Erscheinen der Verf. allzu früh verschied, in Darboux Bull. (2) XVI. 161—165 durch Hrn. Paul Tannery; Selbstanzeige in Assoc. Franç. Marseille XX_1. 149-151. Lp.

W. FR. SCHÜLER. Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades. (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebst

den Abhandlungen des Bachet de Méziriac, im französischen Originale mit beigefügter Uebersetzung. Für das Selbststudium und zum Gebrauche von Lehranstalten bearbeitet zum Teil nach System Kleyer. Erstes Buch. Stuttgart. J. Mayer. VIII + 176 S. 8°. Sn.

C. A. LAISANT. Sur une méthode pour la construction d'une table de nombres premiers. Ass. Franç. Marseille XX. 165-168.

Eine mechanische Methode für das Sieb des Eratosthenes. Alle ungeraden Zahlen werden in die Fächer eines carrirten Bogens geschrieben; aus einem unbeschriebenen eben solchen Bogen werden die den Vielfachen eines Primzahlfactors entsprechenden Quadrate ausgeschnitten. Solche „Netze“ fertigt man sich für jede Primzahl. Legt man diese schachbrettartig mit Fenstern versehenen Netze auf den mit den Zahlen beschriebenen Bogen, so zeigt jedes offene Fenster des Netzes den Primzahlfactor an. Lp.

H. VOLLPRECHT. Ueber die Herstellung von Factorentafeln. Diss. Leipzig. 16 S. Imp. 4° mit 8 Tabellen.

W. W. ROUSE BALL. Mersenne's numbers. Mess. (2) XXI. 34-40, 120.

In den Cogitata Physico-mathematica, Paris 1644, Praefatio generalis, Art 19, giebt Mersenne an, dass die einzigen Werte der Primzahl p bis 257, welche $2^p - 1$ zu einer Primzahl machen, die Zahlen 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257 sind, welcher Liste nach Hrn. Seelhoff die Zahl 61 zuzufügen ist. Hr. Ball stellt die bezüglich dieses Satzes bisher stattgefundenen Untersuchungen zusammen, bei denen bislang noch 33 Werte von p nicht erledigt sind, nämlich $p = 67$, 71, 89, 101, 103, 107, 109, 127, 137, 139, 149, 157, 163, 167, 173, 181, 193, 197, 199, 227, 229, 241, 257. Der Vergleich der von verschiedenen Forschern

benutzten Mittel zeigt, dass es an einer einheitlichen Methode zur Untersuchung fehlt. Mersenne selber habe wahrscheinlich seine Angabe durch Fermat erhalten, und dieser sei vermutlich im Besitze einer Methode gewesen, die aber, wie so manches von Fermat Herstammende, verloren gegangen sei. Lp.

J. Hammond. Some arithmetical formulae. Mess. (2) XX. 158-163, 182-190.

Der Verfasser setzt das Symbol $(x:a)$ gleich 1 oder gleich 0, je nachdem $\frac{x}{a}$ ganz oder gebrochen ist; ferner definirt er zwei Functionen:

$$\text{nud}(x) = (x:1)+(x:2)+(x:3)+\cdots \quad \text{in inf.},$$
$$\text{sud}(x) = (x:1)+2(x:2)+3(x:3)+\cdots \quad \text{in inf.}$$

Ist daher x eine positive ganze Zahl, so ist $\text{nud}(x)$ die Anzahl und $\text{sud}(x)$ die Summe der Divisoren von x; ferner $\text{sud}(x) = 0$, wenn x gebrochen ist. Von diesen Symbolen macht der Verf. verschiedene Anwendungen, z. B. auf den „Totienten“ $\tau(n)$ von n:

$$\tau(n) = n\Big(1-\frac{1}{p_1}\Big)\Big(1-\frac{1}{p_2}\Big)\Big(1-\frac{1}{p_3}\Big)\cdots,$$

in welchem p_1, p_2, p_3, die Primzahl-Divisoren von n sind. Dieser Totient wird als die Determinante dargestellt:

$$\tau(n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \dots & 10 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & \dots & 15 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & \dots & 21 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix}.$$

Später wird eine Function $\Theta_x(n)$ eingeführt:

$$\Theta_x(n) = n^{-x}(1-p_1^x)(1-p_2^x)(1-p_3^x)\dots,$$

die für $x = -1$ in $\tau(n)$ übergeht, und mit ihrer Hülfe werden Formeln für Σt^r (r eine ganze Zahl, $t = 1, 2, 3, \dots, n$) aufgestellt. Die Eigenschaften dieser Function $\Theta_x(n)$, welche denen

von $\tau(n)$ entsprechen, werden dargelegt, z. B.:

$$(n:1)\Theta_x(1)+(n:2)\Theta_x(2)+(n:3)\Theta_x(3)+\cdots = n^{-x},$$

$$\left[\frac{n}{1}\right]\Theta_x(1)+\left[\frac{n}{2}\right]\Theta_x(2)+\left[\frac{n}{3}\right]\Theta_x(3)+\cdots = 1^{-x} + 2^{-x}+3^{-x}+\cdots+n^{-x},$$

wo $\left[\frac{n}{k}\right]$ die grösste in dem Quotienten n/k enthaltene ganze Zahl bedeutet. Aus der letzten Gleichung folgt für $\Theta_k(n)$ eine ähnliche Determinante wie die obige für $\tau(n)$; doch hat man die Triangularzahlen der letzten Columnen durch die Ausdrücke 1^{-x}, $1^{-x}+2^{-x}$, $1^{-x}+2^{-x}+3^{-x}$, ... zu ersetzen. Lp.

J. W. L. Glaisher. Relations between the divisors of the first n numbers. Lond. M. S. Proc. XXII. 359-410.

Es werden Verallgemeinerungen der Formel

$$\sigma(n)-3\sigma(n-1)+5\sigma(n-3)-7\sigma(n-6)+9\sigma(n-10)-\cdots = 0$$

gesucht, wenn $\sigma(n)$ die Summe der Divisoren von n bedeutet, und $\sigma(0)$ eventuell den Wert $\frac{1}{3}n$ haben soll. In den Ergebnissen erscheint aber an Stelle der Summe der Divisoren häufig auch die Summe der ungeraden Potenzen derselben; andererseits beziehen sich viele Formeln auf die Divisoren selbst. Die Beweise werden durch Relationen zwischen elliptischen Reihen, z. B. für Jacobi's $H(x)$ und $Z(x)$, gewonnen, wobei die Bernoulli'schen Zahlen in einer merkwürdigen Weise auftreten. Zu bemerken ist noch, dass alle Formeln ein additives Glied haben, sobald n Trigonalzahl ist. (Vergl. das folgende Referat.) Sn.

J. W. L. Glaisher. Recurring relations involving sums of powers of divisors. Mess. (2) XX. 129-135, 177-181; (2) XXI. 49-64.

Bezeichnet $\sigma(n)$ die Summe der Divisoren einer Zahl n, so gilt, wie der Verf. früher (Cambr. Proc. V, F. d. M. XVI. 1884. 151) gefunden hat, unter anderen Beziehungen die Gleichung:

$$\sigma(n)-3\sigma(n-1)+5\sigma(n-3)-7\sigma(n-6)+9\sigma(n-10)-\cdots$$
$$=0 \quad \text{oder} \quad =(-1)^{g-1}(1^2+2^2+3^2+\cdots+g^2),$$

je nachdem n keine Triangularzahl oder gleich der g^{ten} Triangularzahl $\frac{1}{2}g(g+1)$ ist. Seit der Veröffentlichung dieser Arbeit hat Hr. Glaisher seine Forschungen auf die Summen der r^{ten} Potenzen $\sigma_r(n)$ der Divisoren der Zahl n ausgedehnt und in einer grösseren Abhandlung vereinigt, welche der London Math. Soc. vorgelegt worden ist (vergl. das vorangehende Referat). Die vorliegenden Artikel sind Auszüge aus dieser umfangreichen Schrift und beschränken sich auf die Kenntnisgabe mehrerer interessanter Ergebnisse. In dem ersten Artikel wird die obige Formel für $\sigma(n)$ [oder $\sigma_1(n)$] auf ein beliebiges $\sigma_m(n)$ für ein ungerades m wie folgt erweitert:

$$\sigma_m(n)-3\sigma_m(n-1)+5\sigma_m(n-3)-7\sigma_m(n-6)+9\sigma_m(n-10)-\cdots$$
$$=2\binom{m}{2}\{\sigma_{m-2}(n-1)-(1^2+2^2)\sigma_{m-2}(n-3)$$
$$+(1^2+2^2+3^2)\sigma_{m-2}(n-6)-\cdots\}$$
$$+2\binom{m}{4}\{\sigma_{m-4}(n-1)-(1^4+2^4)\sigma_{m-4}(n-3)$$
$$+(1^4+2^4+3^4)\sigma_{m-4}(n-6)-\cdots\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+2m\{\sigma(n-1)-(1^{m-1}+2^{m-1})\sigma(n-3)$$
$$+(1^{m-1}+2^{m-1}+3^{m-1})\sigma(n-6)-\cdots\}$$
$$+[(-1)^{g-1}(1^{m+1}+2^{m+1}+3^{m+1}+\cdots+g^{m+1})],$$

so dass also das r^{te} Glied der rechten Seite dieser Gleichung lautet:

$$2\binom{m}{2r}\{\sigma_{m-2r}(n-1)-(1^{2r}+2^{2r})\sigma_{m-2r}(n-3)$$
$$+(1^{2r}+2^{2r}+3^{2r})\sigma_{m-2r}(n-6)-\cdots\}.$$

Das in eckigen Klammern zuletzt stehende Glied, welches nur für Triangularzahlen n gilt, sonst aber gleich Null zu setzen ist, kann auch fortfallen, wenn man die Grössen $\sigma_m(0)$ als zulässig einführt und durch das folgende Gleichungssystem bestimmt:

$$\sigma(0) = \frac{1}{m+2} n,$$

$$\binom{m}{3}\sigma_3(0) = \left\{\frac{m}{m+2} - (m+1)\frac{B_1}{1}\right\} n,$$

$$\binom{m}{5}\sigma_5(0) = \left\{\frac{m}{m+2} - (m+1)\frac{B_1}{1} + \binom{m+1}{3}\frac{B_2}{2}\right\} n,$$

$$\binom{m}{7}\sigma_7(0) = \left\{\frac{m}{m+2} - (m+1)\frac{B_1}{1} + \binom{m+1}{3}\frac{B_2}{2} - \binom{m+1}{5}\frac{B_3}{3}\right\} n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wo B_k die k^{te} Bernoulli'sche Zahl bezeichnet.

In dem zweiten Artikel giebt der Verf. seiner Formel die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
&\sigma_m(n) - 3\sigma_m(n-1) + 5\sigma_m(n-3) - 7\sigma_m(n-6) + \cdots \\
&+ \frac{1}{2^2}\binom{m}{3}\{\sigma_{m-2}(n) - 3^3\sigma_{m-2}(n-1) + 5^3\sigma_{m-2}(n-3) \\
&\qquad\qquad - 7^3\sigma_{m-2}(n-6) + \cdots\} \\
&+ \frac{1}{2^4}\binom{m}{5}\{\sigma_{m-4}(n) - 3^5\sigma_{m-4}(n-1) + 5^5\sigma_{m-4}(n-3) \\
&\qquad\qquad - 7^5\sigma_{m-4}(n-6) + \cdots\} \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \frac{1}{2^{m-3}}\binom{m}{3}\{\sigma_3(n) - 3^{m-2}\sigma_3(n-1) + 5^{m-2}\sigma_3(n-3) \\
&\qquad\qquad - 7^{m-2}\sigma_3(n-6) + \cdots\} \\
&+ \frac{1}{2^{m-1}}\{\sigma(n) - 3^m\sigma(n-1) + 5^m\sigma(n-3) - 7^m\sigma(n-6) + \cdots\} \\
&= \Big[(-1)^{g-1}\frac{1}{2^{m+1}(m+1)}\{g(2g+1)^{m+1} - 1^{m+1} - 3^{m+1} - 5^{m+1} - \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots - (2g-1)^{m+1}\}\Big].
\end{aligned}$$

Der in den eckigen Klammern stehende, nur für Triangularzahlen gültige Term kann wieder in Fortfall kommen, wenn man $\sigma_k(0)$ zulässt und passend bestimmt. Setzt man

$$\sigma(0) = -\tfrac{1}{4}B_1, \quad \sigma_3(0) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}B_2, \quad \sigma_5(0) = -\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3}B_3, \quad \ldots,$$

$$\sigma_{2r-1}(0) = (-1)^r\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{r}B_r,$$

so nimmt dieses „Ergänzungsglied" die einfache Gestalt an:

$$\left[(-1)^{g-1}\frac{(2g+1)^{m+2}}{2^{m+2}(m+2)}\right].$$

Der letzte Artikel endlich führt an Stelle von $\sigma_m(n)$ die Form $n^r\sigma_m(n)$ ein. Im § 2 befinden sich Formeln, welche $\sigma_m(n)$, $n\sigma_m(n)$, $n^2\sigma_m(n)$, ... enthälten, ohne dass es dem Verf. gelungen wäre, die von ihm „durch eine etwas complicirte Methode" erhaltenen einzelnen Resultate zu einer allgemeinen Formel zu vereinigen. Die gegebenen Formeln für $\sigma_m(n)$ erstrecken sich auf die Fälle $m=1, 3, 5, 7, 9$. Vergleichungen zwischen den erhaltenen Formeln und Umformungen derselben durch Einführung neuer Functionen bilden den vornehmlichen Gegenstand der weiteren Untersuchung. Zum Schlusse giebt der Verf. die analytischen Formeln an, aus denen er seine Ergebnisse abgeleitet hat.

Lp.

J. W. L. Glaisher. Note on a recurring formula for $\sigma(n)$. Mess. (2) XXI. 122-130.

Im Quarterly Journal XX. 116 (F. d. M. XVI. 1884. 149) hat der Verf. gezeigt, dass, wenn $\sigma(n)$ die Summe der Divisoren von n bezeichnet [damals $\chi(n)$], und $n\equiv 7 \pmod{8}$ ist, die Gleichung gilt:

$$\sigma(n)-2\sigma(n-4)+2\sigma(n-16)-2\sigma(n-36)+\cdots = 0.$$

Da die Argumente in dieser Reihe schneller abnehmen als in irgend einer anderen der recurrirenden Formeln für $\sigma(n)$, so ist es interessant, die Beschränkung in Betreff der Form von n näher zu prüfen. Hierbei ergiebt sich dann, dass die Formel für alle ungeraden Werte von n gültig ist, welche nicht als die Summe dreier Quadrate darstellbar sind. Da aber keine Zahl $\equiv 7 \pmod{8}$ so dargestellt werden kann, so gilt der Satz mit Notwendigkeit für Zahlen dieser Form. Zum Schlusse weist der Verf. auf diejenigen analytischen Formeln hin, die er beim Beweise benutzt hat.

Lp.

J. W. L. Glaisher. Expression for the sum of the cubes of the divisors of a number in terms of partitions of inferior numbers. Mess. (2) XXI. 47-48.

Ist $P(n)$ die Anzahl der Teilungen von n in die Zahlen 1, 2, 3, ..., wobei Wiederholungen nicht ausgeschlossen sind, und sind 1, 2, 5, 7, ... die Pentagonalzahlen $\frac{1}{2}(3r^2-r)$, so ist

$$P(n-1)+2\,P(n-2)-5\,P(n-5)-7\,P(n-7)+\cdots = \sigma(n),$$

$$P(n-1)+2^2P(n-2)-5^2P(n-5)-7^2P(n-7)+\cdots$$
$$= -\tfrac{1}{12}\{5\sigma_3(n)-(18n-1)\sigma(n)\},$$

endlich:

$$\sigma_3(n) = \tfrac{1}{5}\Sigma\pm\{p(18n-p-1)P(n-p)\}.$$

Lp.

J. J. Sylvester. On arithmetical series. Mess. (2) XXI. 1-19, 87-120.

Der erste Teil dieser Abhandlung bezieht sich auf die Primzahlen (oder nach des Verfassers Ausdruck „latente" Primzahlen), die als Factoren in den Gliedern gegebener arithmetischer Reihen enthalten sind. Die beiden Hauptsätze lauten: 1) Ist $m > n-1$, so enthält das Product $(m+1)(m+2)\dots(m+n)$ eine Primzahl, die nicht in $1.2.3\dots n$ enthalten ist. 2) Ist m prim zu i und $> n$, so muss das Product $(m+i)(m+2i)\dots(m+ni)$ eine oder mehrere Primzahlen grösser als n enthalten, falls

$$(m+i)(m+2i)(m+3i)\dots(m+(n-\nu_1)i) > 1.2.3\dots n,$$

worin ν_1 die Anzahl der unterhalb n gelegenen, nicht in i enthaltenen Primzahlen bezeichnet. In dem zweiten Teile betrachtet der Verfasser die asymptotischen Grenzen für die Anzahl von Primzahlen gewisser irreducibler linearen Formen $mz+r$, die zwischen einer Zahl x und einem gegebenen gebrochenen Vielfachen kx von ihr liegen. Die Forschungsmethode ist derartig, dass die bestimmten asymptotischen Grenzen von dem Wert von r unberührt bleiben und für alle Werte von m, welche denselben Totienten haben, die nämlichen sind. Dieser Teil ist gewissermassen als ein Supplement zu der berühmten Arbeit Tschebytscheff's von 1850 in den Petersburger Denkschriften von

1854 zu betrachten. Beide Untersuchungen des Verfassers stützen sich in gleicher Weise auf gewisse elementare Sätze über „Index-Summen" (bezüglich irgend einer gegebenen Primzahl) arithmetischer Reihen. Lp.

L. Gegenbauer. Ueber arithmetische Progressionen, in denen Anfangsglied und Differenz teilerfremd sind. Wien. Ber. C. 1018-1053.

Legendre hat eine Formel zur Bestimmung der Anzahl derjenigen Glieder einer arithmetischen Progression gegeben, welche durch eine Reihe von gegebenen Primzahlen nicht teilbar sind. Hieran wird die Ableitung einer sehr allgemeinen Relation geschlossen, die Specialisirungen jeder Art, den Uebergang zu allen möglichen zahlentheoretischen Functionen und sodann Wahrscheinlichkeitsberechnungen, welche sich auf arithmetische Reihen beziehen, eben solche Mittelwertbestimmungen u. s. f. ermöglicht. Speciell mag auf die Ermittelung der Differenz zwischen der Anzahl der unter den n ersten Gliedern einer arithmetischen Reihe vorkommenden Primzahlen und der Anzahl aller n nicht überschreitenden Primzahlen hingewiesen werden. Sn.

L. Carlini. Sopra un problema della teoria dei numeri. Periodico di Mat. VI. 119-122.

Schreibt man n-mal nacheinander die Reihe 1, 2, ..., k, und entnimmt man aus jeder Reihe auf jede mögliche Weise ein einzelnes Element, so erhält man k^n n-fache Gruppen, welche als von einander verschieden anzusehen sind. Die Anzahl $\varphi\binom{k}{n}$ der Gruppen, deren grösster gemeinschaftlicher Teiler zu k relativ prim ist, wird durch die Formel:

$$\varphi\binom{k}{n} = k^n\left(1-\frac{1}{a_1^n}\right)\left(1-\frac{1}{a_2^n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_m^n}\right)$$

gegeben, wo $a_1, a_2, \ldots, a_m$ die verschiedenen Primfactoren von k bezeichnen. Vi.

A. S. Bang. Om Primtal af bestemte Former. Nyt Tidss. for Math. II B. 73-82.

Diese Abhandlung untersucht die Anzahl der Primzahlen von einer bestimmten Form, z. B. $4n+1$, bis zu einer bestimmten Grenze hin. Die vom Verf. gefundenen Grenzen der gesuchten Zahlen sind aber viel zu weit, um zu einer wirklichen Berechnung gebraucht werden zu können, was der Verf. auch nicht beabsichtigt. Dagegen geben sie einen ziemlich leichten und elementaren Beweis für den von Dirichlet herrührenden Satz:

Jede arithmetische Progression, deren erstes Glied mit der Differenz prim ist, enthält unendlich viele Primzahlen, wenn die Differenz irgend eine der folgenden Zahlen ist:

4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20, 24, 30, 42, 60.

V.

J. Ivanoff. Die ganzen complexen Zahlen. St. Petersburg. 1891. (Russisch.)

Die Abhandlung ist einer Darstellung der Dedekind'schen Theorie der ganzen complexen Zahlen und der idealen Moduln gewidmet. Der Verfasser behandelt ausführlich die Theorie der Ideale für den Fall der ganzen complexen Zahlen, welche von $\sqrt{d}$ abhängen, und beweist das folgende Theorem des Herrn Markoff: Wenn die ganze Zahl A unter der Form a^2b dargestellt ist, so sind alle ganzen complexen Zahlen, welche von $\sqrt[3]{A}$ abhängen, von der Form $X+Y\sqrt[3]{a^2b}+Z\sqrt[3]{ab^2}$ [wenn A nicht $\equiv\pm 1 \pmod{9}$] oder von der Form

$$X\frac{1+b\sqrt[3]{a^2b}+a\sqrt[3]{ab^2}}{3}+Y\sqrt[3]{a^2b}+Z\sqrt[3]{ab^2}$$

[wenn $A\equiv\pm 1 \pmod{3}$].

Den interessantesten Teil der Arbeit bildet der Beweis, dass die Zolotareff'sche Methode der Zerlegung der ganzen complexen Zahlen in ideale Factoren mit der Methode, welche von Dedekind gegeben ist, wesentlich identisch ist. Wi.

D. Mirimanoff. Sur une question de la théorie des nombres. J. für Math. CIX. 82-88.

Für die Theorie der complexen Zahlen, welche aus λ^{ten} Wurzeln der Einheit gebildet sind, ist die Entscheidung wichtig, wann die Klassenanzahl, und speciell deren zweiter Factor, durch λ teilbar ist. Kummer fand das Kriterium, es müsse, wenn $e_0, \ldots, e_{\nu-2}$ ein System von Fundamentaleinheiten bezeichnen, eine Reihe ganzzahliger Exponenten $m_0, m_1, \ldots, m_{\nu-2}$ existiren, für welche

$$e_0^{m_0}.e_1^{m_1}\ldots e_{\nu-2}^{m_{\nu-2}} \qquad \left(\nu=\frac{\lambda-1}{2}\right)$$

gleich einer λ^{ten} Potenz werde, ohne dass alle einzelnen m genaue Vielfache von λ seien. Herr Mirimanoff benutzt die Kronecker'sche Bezeichnungsart:

$$e^{m_0+m_1x+m_2x^2+\cdots+m_{\nu-2}x^{\nu-2}},$$

indem er an Stelle des x der Reihe nach die primitiven Wurzeln der Gleichungen $x^\delta=1$ treten lässt (δ Divisor von x), um obiges Kriterium gegen ein praktisch bequemeres zu vertauschen. Er entwickelt die zu den einzelnen δ gehörigen Producte von Kreisteilungseinheiten in Potenzreihen und prüft, ob diese (mod. λ) zu λ^{ten} Potenzen congruent sein können. Die Untersuchung wird für $\lambda=37$ durchgeführt und ergiebt interessante Nebenresultate.

Sn.

L. Gegenbauer. Ueber die aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen. Monatsh. f. Math. II. 429-432.

Es handelt sich um den von Hrn. Weierstrass herrührenden Satz: „In einem aus einer ungeraden Anzahl von (mit gewissen Grundeigenschaften begabten) Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlensysteme ist die Quadratwurzel aus dem negativ genommenen Modul der Multiplication nicht vorhanden“.

Der hier mitgeteilte einfache Beweis benützt nur das Multiplicationstheorem der Determinanten. Das Ergebnis fliesst daraus, dass eine gewisse Determinante im vorliegenden Falle nur

negativ sein kann. Der innere Grund für den in Rede stehenden Satz liegt lediglich im Associationsprincip. My.

G. Scheffers. Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen. Math. Ann. XXXIX. 293-390.

Referat in Abschnitt VI, Capitel 6. My.

A. Markoff. Sur une classe de nombres complexes. C. R. CXII. 780-782, 1049-1050, 1123-1124.

Es wird eine Reihe von Formeln mitgeteilt, welche sich auf die Zerlegung in (wirkliche und ideale) Primfactoren der ganzen algebraischen Zahlen beziehen, welche von $\sqrt[3]{A}$ abhängen. A ist eine gewöhnliche ganze Zahl und wird in der Form a^2b vorausgesetzt.

Die Ergebnisse stützen sich auf die Theorien von Dedekind und Zolotareff; insbesondere sind die Methoden des Letzteren angewandt worden. My.

H. Berkenbusch. Ueber die aus den achten Wurzeln der Einheit entspringenden Zahlen. Diss. Marburg. 55 S. 8°.

J. Perott. Remarque au sujet du théorème d'Euclide sur l'infinité du nombre des nombres premiers. American J. XIII. 235-308.

Der erste Teil der Arbeit fand sich in demselben Journal XI. 99-138 (1888). Es handelt sich um eine systematische Durchführung der Anwendung gruppentheoretischer Begriffe auf irgend welche Zahlkörper. Der Verfasser gelangt von dieser Auffassung aus zu einer fundamentalen Kritik der Grundlagen der Zahlentheorie und merkt besonders an, wo das Postulat der Zerlegung einer beliebigen Zahl in ihre Primfactoren eine Rolle spielt, wie z. B. in der Theorie der quadratischen Formen. Er findet im sechsten

Abschnitt der Disquisitiones arithmeticae sonach eine unumgängliche Ergänzung dieser Theorie. Praktisch knüpft er an die Bemerkung Euklid's, dass, wenn $q_1, q_2, \dots, q_n$ die sämtlichen Primzahlen wären,

$$M = q_1 q_2 \dots q_n + 1,$$

eine weitere enthalten müsste, den Nachweis, dass es zwischen q_n excl. und M mindestens $n-1$ Primzahlen giebt. Zum Schluss finden sich Entwickelungen über die Anzahl der Primzahlen, welche in besonderen Formen enthalten sind. Sn.

J. Willis. Weighing by a ternary series of weights. Nature XLIII. 30-31, 198.

J. D. Everett. Weights proceeding by powers of 3. Nature XLIII. 104, 199.

P. A. MacMahon. Weighing by a series of weights. Nature XLIII. 113-114.

Die bekannte Möglichkeit des Abwägens eines Körpers durch einen Gewichtssatz mit den Gewichten 1, 3, 3^2, 3^3, ... wird wieder einmal auf den mathematischen Grund, nämlich auf ein Zahlsystem mit der Grundzahl 3, zurückgeführt. Hr. MacMahon, der das Problem in grösster Allgemeinheit löst, verweist dabei auf seinen Artikel im Quart. Journ. XXI. 367 (F. d. M. XVIII. 1886. 138). Lp.

B. Carrara. Un'applicazione della teoria dei numeri alle frazioni decimali periodiche. Cremona. Fezzi. 25 S. (Lith.)

Eine Vorlesung über die ersten Sätze der Theorie der Congruenzen und der quadratischen Reste und über die Anwendung derselben auf die Theorie der periodischen Decimalbrüche.

Vi.

M. F. Daniels. Lineaire congruenties. Diss. Amsterdam. van Heteren. 135 S. (1890.)

Die Dissertation handelt über lineare Congruenzen. Im

ersten Abschnitt werden die älteren Methoden zur Lösung von diophantischen Gleichungen entwickelt, im zweiten und dritten die Methoden von Euler, Lagrange, Scheffler und Gauss. Im vierten Abschnitt wird die unbestimmte lineare Gleichung mit zwei Unbekannten mittels der Kettenbrüche gelöst, und im fünften die Methode von Binet mitgeteilt. Im sechsten giebt der Verfasser eine neue Methode zur Lösung von linearen Congruenzen, welche auf einem bekannten Satze von Wilson beruht und auf der Ausdehnung, welche ihm durch Gauss (Disq. Arithm. art. 70) gegeben ist. Im siebenten und letzten wird die Frage gestellt: Wie gross ist die Zahl der Lösungen der Gleichung $\sum_{k=1}^{k=4} a_k x_k = A$ in ganzen positiven Zahlen, wenn die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ alle positive Primzahlen sind. Die Beantwortung dieser Frage weicht in mehreren Hinsichten von der Weise ab, nach welcher Hr. Weihrauch (Schlömilch Z. XX. 97) sie behandelt; doch die Resultate stimmen ganz überein. G.

M. Mandl. On the generalization of a theorem by Gauss and its application. Quart. J. XXV. 227-236.

Es handelt sich zunächst um einen directeren Beweis der von Hrn. Schering gegebenen Verallgemeinerung des Gauss'schen Kriteriums (vgl. Berl. Ber. 1876. 330—341, F. d. M. VIII. 93—95). Indessen erscheint der Nachweis, wie die negativen Reste in deren ganzer Reihe verteilt sind, speciell wenn man die grössten gemeinschaftlichen Teiler von Rest und Modul zum Princip einer Klassenteilung nimmt, als Hauptsache. Die Beziehungen zu der Eisenstein'schen Darstellung des Legendre'schen Zeichens, welche mit Hülfe von Einheitswurzeln ausgedrückt wird, führen schliesslich zu Reihen von Binomialcoefficienten mit abwechselndem Vorzeichen, welche gleich ± 1 sind, je nachdem die Zahl, deren Charakter gesucht wird, Rest oder Nichtrest ist. Die Reihe z. B.

$$1-n_1+(n-1)_2-(n-2)_3+\cdots$$

ist 0, 1 oder —1, je nachdem 3 Teiler, Rest oder Nichtrest von

$2n+1$ ist. Eine Verallgemeinerung führt zu der Formel:

$$1+(n-1)z+(n-2)_2 z^2+(n-3)_3 z^3+\cdots$$
$$=\frac{\{1+\sqrt{1+4z}\}^{n+1}-\{1-\sqrt{1+4z}\}^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{1+4z}}.$$

Sn.

Ed. Lucas. Sur la loi de réciprocité des résidus quadratiques. St. Pétersbourg. Mélanges math. et astr. Tome VII. 65-66.

Ein neuer, sehr einfacher Beweis des Reciprocitätsgesetzes, aus dem Gauss'schen Kriterium direct abgeleitet. Wi.

L. Gegenbauer. Note über das Legendre-Jacobi'sche Symbol. Wien. Ber. C. 855-864.

Der Verfasser macht geltend, dass man zum Beweise des Reciprocitätsgesetzes rascher gelangen könne, wenn man nicht eine, sondern zwei Darstellungen der durch das Kronecker-Schering'sche Lemma definirten charakteristischen Zahl, welche hier mit (n, m) bezeichnet wird, zu Hülfe nimmt. Als derartige neue Darstellungen erscheinen hier:

$$(n, m) = \sum_{x=1}^{x=n-1}\left[\frac{xm}{2n}\right],$$
$$(n, m) = \sum_{x=1}^{x=n-1}\left[\frac{xm}{2n}+\frac{1}{2}\right],$$

wozu sich mancherlei Nebenresultate gesellen. Sn.

L. Gegenbauer. Ueber den quadratischen Restcharakter. Wien. Ber. C. 1072-1087.

Es wird gezeigt, wie die neuen Formen, welche der Verfasser für das Legendre-Jacobi'sche Symbol angegeben hat, sich zur schnellen Berechnung desselben besonders eignen. In den einfachsten Fällen genügt die Bestimmung einer einzigen Zahl; diese werden bis 17 aufgestellt. Ein neuer Algorithmus wird gegeben, welcher ausserordentlich rasch zum Ziele führt.

Sn.

J. A. Gmeiner. Eine neue Darstellung des biquadratischen Charakters. Wien. Ber. C. 1093-1100.

Bezeichnet $[A]$ die grösste in A enthaltene ganze Zahl, $\{A\}$ die nächste Zahl von A, so lautet eine bekannte Formel in der Theorie der quadratischen Reste:

$$k^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\sum_1^{\frac{1}{2}(p-1)} r\left(\left\{\frac{rk}{p}\right\}-\left[\frac{rk}{p}\right]\right)} (\text{mod.} p),$$

wo p eine ungerade reelle Primzahl, k eine beliebige zu p teilerfremde reelle Zahl bedeutet.

Hier wird eine analoge Formel für $k^{\frac{1}{4}(p-1)}$ aufgestellt. Ist im Sinne von Gauss $u+vi$ der absolut kleinste Rest von $\alpha+\beta i$ für den Modul $a+bi$ ($p=a^2+b^2$), und setzt man

$$\mu = au+bv, \quad \nu = av-bu,$$

so nehmen die Zahlen μ und ν alle Werte

$$-\tfrac{1}{2}(p-1), \quad -\tfrac{1}{2}(p-3), \quad \ldots, \quad -2, \quad -1, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \tfrac{1}{2}(p-3), \quad \tfrac{1}{2}(p-1)$$

an, während $\alpha+\beta i$ ein vollständiges Restsystem durchläuft (mod. $a+bi$). Dieses Restsystem zerfällt nun genau in Viertelrestsysteme, je nachdem μ und ν positiv und negativ sind. $\frac{\mu k}{p}$ und $\frac{\nu k}{p}$ erscheinen in den Grössen $[A]$ und $\{A\}$, aus welchen der dem biquadratischen Charakter entsprechende Exponent von -1 zusammengesetzt ist. Sn.

J. A. Gmeiner. Die Ergänzungssätze zum bikubischen Reciprocitätsgesetze. Wien. Ber. C. 1330-1361.

In der Einleitung werden die auf das Gebiet der aus sechsten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen bezüglichen Definitionen einschliesslich der allgemeinen Reciprocitätsgesetze gegeben. Speciell werden vier Haupttypen von primären Zahlen aufgestellt, deren drei von Wichtigkeit sind. Für diese werden der bikubische Charakter der Zahl $1+j$ (j primitive sechste Einheitswurzel), der bikubische Charakter der Zahl 2, sowie die

kubischen Charaktere beider Zahlen bestimmt, und zwar zunächst einzeln für jeden Haupttypus, sodann aber allgemeine, für jede primäre reguläre zweigliedrige Zahl $a+bj$ geltende Gleichungen.
Sn.

D. HILBERT und A. HURWITZ. Ueber die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null. Acta Math. XIV. 217-224.

Aus den Ergebnissen einer Arbeit des Herrn Nöther: „Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen" (Math. Ann. XXIII. 311-358, F. d. M. XVI. 1884. 349-350) entnahmen die Verfasser die Möglichkeit, jede ganze ganzzahlige homogene Function vom n^{ten} Grade und vom Geschlechte Null auf eine eben solche Function $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades zu reduciren. Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt zu einer Gleichung dritten oder zweiten Grades. Beide Fälle werden genau discutirt, und angegeben, wann die vorgelegte diophantische Gleichung keine Lösung, eine endliche Anzahl von Lösungen oder unendlich viele Lösungen besitzt. Die singulären Lösungen müssen stets durch eine besondere Discussion gefunden werden.
Sn.

F. THAARUP. De hele Tals Oplósning i Faktorer. I. Nyt Tidss. for Math. II A. 49-52.

Untersuchungen darüber, wie man

$$a^{n-1}\equiv 1 \pmod{n}$$

dazu verwenden kann, um zu untersuchen, ob n eine Primzahl ist.
V.

ALEX. BERGER. En algebraisk generalisation af några aritmetiska satzer. Stockh. Öfv. XLVIII. 683-720.

Nach allgemeinen Theoremen über Teilbarkeit und „Congruenz" ganzer, ganzzahliger Functionen bringt der Verfasser einige Sätze über Congruenzen der Form

$$G_1(x)\equiv G_2(x) \quad (\text{mod.}\, G(x)),$$

wo $G(x)$

$$x^p - 1 \quad \text{oder} \quad \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

bedeutet (p eine ganze positive Zahl), und wendet nachher diese Sätze auf die Theorie der quadratischen Reste und Nichtreste, der Gauss'schen Reihen und der Legendre'schen Symbole an.

Bdn.

K. Hensel. Zur Theorie der linearen Formen. J. für Math. CVII. 241-245.

Die Arbeit enthält die vollständige Lösung der Aufgabe: Den m linearen homogenen Congruenzen:

$$\Sigma A_{ik} u_k \equiv 0 \pmod{P} \qquad \binom{i = 1, 2, \ldots, m}{k = 1, 2, \ldots, n},$$

deren Coefficienten und deren Modul entweder ganze Zahlen oder ganze Functionen einer Variable sind, soll in der allgemeinsten Weise durch ganze Grössen u_k genügt werden. Die Lösung erfolgt, indem das vorgelegte System von Congruenzen durch ein anderes äquivalentes ersetzt wird, dessen Modul ein Teiler des Moduls P ist.

Lsg.

F. Rogel. Zur Theorie der höheren Congruenzen. Hoppe Arch. (2) X. 84-94.

Es wird aus der polynomischen Reihe eine höhere Congruenz abgeleitet, welche den Fermat'schen Satz als besonderen Fall enthält.

Sn.

E. Humbert. Sur un théorème d'arithmétique. Darboux Bull. (2) XV. 51-52.

Einfacher Beweis für den Satz, dass jede Primzahl von der Form $4n+3$ Teiler von x^2+y^2+1 ist.

Sn.

D. F. Seliwanow. Ueber die Zerlegung der Zahlen in Factoren. Mosk. Math. Samml. XV. 789-800.

Wenn die Zahl A oder ein Vielfaches von A in der Form t^2-Du^2 dargestellt ist, so muss p, der Teiler von A, der Gleichung $\left(\frac{D}{x}\right)=1$ offenbar genügen. Es werden die Theoreme von Euler bewiesen:

$$(1)\qquad \left(\frac{D}{x}\right)=\left(\frac{D}{4D-x}\right) \text{ bei } D>0,$$

$$\left(\frac{D}{x}\right)=-\left(\frac{D}{4\Delta-x}\right) \text{ bei } D<0;$$

$$(2)\qquad \left(\frac{D}{x}\right)=-\left(\frac{D}{x+2\Delta}\right) \text{ bei geradem } D;$$

$$(3)\qquad \left(\frac{D}{x}\right)=\left(\frac{D}{x+2\Delta}\right), \text{ wenn } D\equiv 1 \pmod{4},$$

$$\left(\frac{D}{x}\right)=-\left(\frac{D}{x+2\Delta}\right), \text{ wenn } D\equiv -1 \pmod{4}.$$

Hierin bezeichnet Δ den Zahlwert von D. Dann werden diese Theoreme auf die Auffindung der Teiler angewandt. Wi.

G. Frattini. Sulla risoluzione dell'equazione $x^2-(a^2+1)y^2=\pm N$ in numeri interi. Periodico di Mat. VI. 85-90.

Die Frage über die Auflösbarkeit der Gleichung:

$$(1)\qquad x^2-(a^2+1)y^2=N$$

oder:

$$(2)\qquad x^2-(a^2+1)y^2=-N$$

kann durch eine endliche Anzahl von Versuchen entschieden werden vermittelst des folgenden Satzes:

Ist (x_0, y_0) die kleinste positive Lösung der Gleichung (1) oder (2), so ist $y_0 \lesseqgtr \sqrt{N}$.

Jede Lösung, für welche diese Bedingung erfüllt ist, mag eine „Fundamentallösung" heissen.

Aus den Fundamentallösungen (x_0, y_0) der Gleichung (2) ergeben sich sämtliche Lösungen (X, Y) der Gleichung (1) oder (2) durch die Identität:

$$Y\sqrt{a^2+1}+X = (y_0\sqrt{a^2+1}\pm x_0)(\sqrt{a^2+1}+a)^n,$$

wobei n alle ungeraden bezw. geraden Werte durchlaufen muss. Vi.

G. Frattini. Dell'analisi indeterminata di secondo grado. Periodico di Mat. VI. 169-180; VII. 7-15, 49-54, 88-92, 119-124, 172-177.

Eine „Fundamentallösung“ der Gleichung

$$(1) \qquad x^2 - Dy^2 = N$$

oder:

$$(2) \qquad x^2 - Dy^2 = -N$$

ist eine Lösung (x_0, y_0), bei welcher $y_0 < \beta\sqrt{N}$ bezw. $y_0 \gtreqless \sqrt{\frac{N(\alpha+1)}{2D}}$ ist, wo (α, β) eine Lösung der Pell'schen Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$ bezeichnet. Alle Lösungen (X, Y) oder $(\bar{X}, \bar{Y})$ der Gleichungen (1) oder (2) ergeben sich aus den Fundamentallösungen (x_0, y_0) bezw. $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ derselben Gleichung vermittelst der Identitäten:

$$X + Y\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})(\alpha+\beta\sqrt{D})^m \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$
$$\bar{X} + \bar{Y}\sqrt{D} = (\bar{x}_0 + \bar{y}_0\sqrt{D})(\alpha+\beta\sqrt{D})^m \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$
$$\bar{X} + \bar{Y}\sqrt{D} = (-\bar{x}_0 + \bar{y}_0\sqrt{D})(\alpha+\beta\sqrt{D})^m \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Der Verfasser giebt ferner eine elementare Auflösungsmethode für die Pell'sche Gleichung an und beweist den folgenden, von Hrn. Tschebyscheff (Sur les formes quadratiques, Journ. de math. pures et appliquées, 1851) aufgestellten Satz: Ist (α, β) die kleinste Lösung der Pell'schen Gleichung, (ξ, η) die kleinste Lösung der Gleichung (1) oder (2), so ist $\xi \gtreqless \sqrt{\frac{1}{2}N(\alpha \pm 1)}$. Vi.

A. Martin. An error in Barlow's Theory of numbers. Washington Bull. XI. 592.

Statt der in Barlow's Werk angegebenen kleinsten Lösung der Gleichung $x^2 - 5658y^2 = 1$ in ganzen Zahlen ist zu nehmen $x = 1284836351$, $y = 17081120$. Die von Barlow gegebene Lösung gehört zu der Gleichung, in welcher 56587 statt 5658 der Coefficient von y^2 ist. Lp.

S. Tebay, S. Mukhopadhyay. Solution of question 10643. Ed. Times LV. 99-101.

Die von Hrn. Tebay gestellte Aufgabe lautet: „Es giebt unzählige Paare rechtwinkliger Dreiecke, welche dieselbe Hypotenuse c haben und so beschaffen sind, dass die Differenzen zwischen der Hypotenuse und den Katheten ein Quadrat und ein doppeltes Quadrat sind. Wenn $(\alpha^2, 2\beta^2)$ und $(\alpha'^2, 2\beta'^2)$ die Differenzen sind, so ist 1) zu zeigen, dass

$$c = (\alpha+\beta)^2+\beta^2 = (\alpha'+\beta')^2+\beta'^2;$$

2) die Seiten sind als ganze Zahlen zu finden; 3) es sind allgemeine Formeln für das x^{te} Dreieckspaar dieser Art, in welchem $\alpha = \beta' = 1$, aufzustellen.“

In der mitgeteilten Lösung werden alle Fragen beantwortet, und zum Schlusse werden die Dreieckspaare mit den kleinsten Seiten tabellarisch zusammengestellt. (Z. B. 65, 63, 16 und 65, 56, 33.) Lp.

A. Tonelli. Bemerkung über die Auflösung quadratischer Congruenzen. Gött. Nachr. 1891. 344-346.

Die Auflösung der Congruenz $x^2 \equiv R \pmod{p}$ lässt sich, wenn p von der Form $4n+3$ ist, bekanntlich auf das Euler'sche Kriterium

$$R^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$$

basiren; man findet durch Wurzelziehung $x \equiv \pm R^{n+1}$. Der Verfasser zeigt, dass man zur Anwendung der Methode für den Fall $p = 4n+1$ nur einen Nichtrest zu kennen braucht, um durch Multiplication mit

$$N^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -1 \pmod{p}$$

eine folgende Wurzelziehung zu ermöglichen, wenn die vorhergehende -1 als Resultat ergeben hatte. War $p = 2^s.\alpha+1$ (α ungerade), so führen s Wurzelziehungen aus der Congruenz $R^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ zur Bestimmung des x. — Die allgemeine Auflösung der Congruenz

$$x_1^2 \equiv R \pmod{p^\lambda}$$

erhält man hieraus in der Form:

$$x_1 = x^{p^{\lambda-1}} . R^{\frac{1}{2}(p^\lambda - 2p^{\lambda-1}+1)} \pmod{p^\lambda}.$$

Sn.

E. MEISSEL. Beitrag zur Pell'schen Gleichung höherer Grade. Pr. (Nr. 283) Ober-Realsch. Kiel. 11 S. 4°.

Ist A eine gegebene ganze Zahl (nicht n^{te} Potenz), $\varepsilon^n = A$, so bespricht der Verfasser die diophantische Gleichung

$$\prod_n \{x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} x_{n-1}\} = 1$$

in den Fällen $n = 3$, $n = 5$, besonders im Hinblick auf die Kettenbruchentwickelungen. Für A werden auch allgemeine Formen bezeichnet, für welche sich die Lösungen sofort hinschreiben lassen ($A = n^5 + 5\varepsilon$, $n^5 + 5n^3\varepsilon + 5n$ u. dgl.). Viele Zahlenbeispiele.

Sn.

BACHMANN. Arithmetischer Satz. Schlömilch Z. XXXVI. 381-383.

Ist p ungerade Primzahl, q primitive Wurzel,

$$q^{p-1} - 1 = p.Q,$$

und entwickelt man Q nach ganzen positiven Potenzen von q, so erhält man durch h-malige cyklische Vertauschung der Coefficienten die analoge Entwickelung für kQ, wo $h = \text{ind}.k$.

Sn.

A. RIEKE. Versuch über die Gleichung $x^p + y^p = z^p$. Schlömilch Z. XXXVI. 249-254.

Der Verfasser setzt seine früheren Bemühungen fort. (Vgl. F. d. M. XXI. 1889. 182.) Sn.

CH. MICHEL. Note sur la somme et le produit de deux nombres entiers positifs. J. de Math. élém. (3) V. 193-197.

Ganz elementare Betrachtungen, aus denen sich zuletzt ergiebt, dass die Gleichung $xyz = x + y + z$ nur die ganzzahligen Lösungen 1, 2, 3 zulässt. Lp.

E. CATALAN. Diverses notes d'arithmétique. Ass. Franç. Marseille XX. 194-204.

Die Mitteilungen des Veteranen unter den belgischen Mathematikern umfassen eine Reihe von sehr speciellen Sätzen, welche er unter den folgenden Titeln zusammengestellt hat: I. Zusatz zur Formel von Le Lasseur. II. Ueber Summen von drei Quadraten. III. Eine ungerade Zahl N zu finden, so dass $\frac{1}{2}(N+1)$ die Summe von vier Quadraten und $\frac{1}{4}(N+1)^2$ die Summe von drei Quadraten ist. IV. Auffrischung alter Sätze. V. Dreiecks- und Fünfecks-Zahlen. VI. Empirische Sätze. Lp.

A. MATROT. Démonstration élémentaire du théorème de Bachet: „Un entier quelconque est la somme de quatre carrés au plus“. J. de Math. élém. (3) V. 169-174.

Der hier veröffentlichte Beweis, eine Vereinfachung des Euler'schen, ist in erweiterter Form als Broschüre von 16 Seiten zuerst bei Nony in Paris erschienen und auf Seite 113—114 des Journ. de Math. élém. von Hrn. E. Humbert sehr anerkennend besprochen worden; zugleich aber hat der Letztere bemerkt, dass die Einführung der negativen Zahlen eine weitere Vereinfachung bewirken würde. Indem Hr. Matrot diesen Wink benutzt, gelingt es ihm nun, seinen Beweis auf sechs Seiten zusammen zu drängen. Lp.

G. WERTHEIM. Zum Beweise des Bachet'schen Satzes. Hoffmann Z. XXII. 422-423.

Vorführung des Beweises von Matrot aus Assoc. Franç. 1890 (F. d. M. XXII. 211) für den Satz, dass jede Zahl, die nicht selbst eine Quadratzahl ist, sich in vier Quadrate zerfällen lässt. Lp.

A. MARTIN. On square numbers whose sum is a square number. Washington Bull. XI. 580-581.

T. H. Miller. A problem in the theory of numbers. Edinb. M. S. Proc. IX. 23-25.

Die ganzen Quadratzahlen, und zwar die kleinste unter ihnen, zu finden, die, zu einer gegebenen ganzen Zahl addirt, eine Quadratzahl ergeben. Gbs. (Lp.)

Ed. Lucas. Sur les lois énoncés par Fermat, Euler, Wilson, v. Staudt et Clausen. Mathesis (2) I. 5-12.

Teilweise neuer Beweis dieser verschiedenen Sätze in Anknüpfung an eine und dieselbe Gedankenfolge. Mn. (Lp.)

D. N. Sokoloff. Die Auffindung einiger Liouville'schen Zahlidentitäten nach der Methode von N. W. Bugaieff. Mosk. Math. Samml. XVI. 89-112.

Die Abhandlung enthält die Ableitung der Zahlidentitäten, welche von Liouville im J. 1857 (Journal de Math. (2) II: „Sur quelques fonctions numériques") ohne Beweis gegeben wurden, aus den allgemeinen Formeln von N. W. Bugaieff. Wi.

J. P. Gram. Studier over nogle numeriske Funktioner. Avec un résumé en français. Kjöb. Skrift. (6) VII. 1-34.

Der Verfasser studirt in der vorliegenden Arbeit die beiden numerischen Functionen $N(n)$ und $L(n)$. Die erste giebt die Anzahl der Zahlen an, welche niedriger als n sind und nur gegebene Primfactoren enthalten. Die zweite Function $L(n)$ giebt die Differenz der Anzahl der Zahlen der eben genannten Art, welche niedriger als n sind und eine gerade Anzahl Factoren enthalten, und der Anzahl solcher Zahlen, welche eine ungerade Anzahl von Primfactoren enthalten. Speciell werden die Functionen $N(n)$ und $L(n)$ untersucht, wenn die Zahlen nur zwei oder drei Primfactoren enthalten. Als Typen solcher Zahlen sind die von der Form $2^\alpha 3^\beta$ oder von der Form $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ gewählt. Soll speciell angegeben werden, von welcher Form die Zahlen sein sollen, so wird die Bezeichnung $N_{23}(n)$ u. s. w. gebraucht.

Unter $\lambda(n)$ wird eine Zahl verstanden, die gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem die Anzahl der Primfactoren von n gerade oder ungerade ist; unter $D_n(m)$ die Anzahl der Factoren von n, die kleiner als m sind; unter $\Delta_n(m)$ die Summe der λ der Factoren von n, die kleiner als m sind.

Die Abhandlung zerfällt in drei Abteilungen. In der ersten werden einleitende Sätze über $D_n(m)$ und $\Delta_n(m)$ entwickelt. In den zwei anderen werden beziehungsweise $N(n)$ und $L(n)$ behandelt.

Wenn $n = 2^\alpha 3^\beta$, so ist $D_n(n) = (\alpha+1)(\beta+1)$. Jedem Divisor d in n entspricht ein anderer $\frac{n}{d}$, so dass die Anzahl der Factoren, die kleiner als $\sqrt{n}$ sind, ebenso gross ist wie die Anzahl der Factoren, die grösser als $\sqrt{n}$ sind. Infolge dessen hat man

$$D_n(m) + D_n\left(\frac{n}{m}\right) = D_n(n) + \varepsilon,$$

wo ε gleich 0 oder $+1$ ist, je nachdem m Nichtdivisor oder Divisor von n ist.

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\Delta_n(m) + \lambda(n)\Delta_n\left(\frac{n}{m}\right) = \Delta_n(n) + \varepsilon\lambda(m).$$

$\Delta_n(n)$ ist gleich 0 oder $+1$, je nachdem n eine Nichtquadratzahl oder eine Quadratzahl ist.

Aehnliche Betrachtungen können auf die Summe der Logarithmen der Divisoren Σld und auf $\Sigma\lambda(d)ld$ angewandt werden.

Bedeutet $\mu(d)$ eine Zahl, welche 0 ist, wenn d einen quadratischen Factor enthält; -1, wenn d eine ungerade Anzahl von verschiedenen Primfactoren enthält; $+1$, wenn diese Zahl gerade ist, so bestehen die folgenden Formeln, welche der Verf. sehr häufig braucht. Wenn die Summation über alle Divisoren d einer Zahl n erstreckt wird, und wenn n im ganzen t verschiedene Primzahlen $a, b, c, \ldots$ enthält, so hat man

$$\Sigma\mu(d)(ld)^t = (-1)^t . 1 . 2 \ldots t . la . lb . lc, \ldots,$$
$$\Sigma\mu(d)(ld)^s = 0 \qquad (s < t).$$

Der zweite Abschnitt enthält nun die Theorie der numerischen Function $N(n)$.

Die Divisoren einer Zahl $p = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots$ sind die Glieder des Productes

$$P = (1+2+\cdots+2^\alpha)(1+3+\cdots+3^\beta)(1+5+\cdots+5^\gamma)\ldots.$$

Setzt man jetzt die unendlichen Reihen

$$1+2+2^2+\cdots = R_1,$$
$$1+3+3^2+\cdots = R_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$

so hat man identisch

$$P = R_1 . R_2 \ldots (1-2^{\alpha+1})(1-3^{\beta+1})\ldots,$$

und da dieses eine Identität ist, so werden die Betrachtungen nicht dadurch beeinflusst, dass die Reihen divergent sind. Infolge der vorigen Gleichung hat man dann

$$D_p(n) = N(n) - N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right) - N\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right) - \cdots + N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}}\right) + \cdots$$
$$\cdots - N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}5^{\gamma+1}}\right) - \cdots.$$

Für $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = 0$ erhält man hieraus

$$(1) \qquad 1 = N(n) - N\left(\frac{n}{2}\right) - N\left(\frac{n}{3}\right) - \cdots + N\left(\frac{n}{2.3}\right) + \cdots.$$

Wenn N auf alle möglichen Primzahlen bezogen wird, kann man N mit E vertauschen, wo $E\left(\frac{n}{a}\right)$ die Legendre'sche Bedeutung hat, nämlich die grösste ganze Zahl, welche kleiner als $\frac{n}{a}$ ist. Als Specialfall von (1) erhält man dann die bekannte Formel $1 = \sum_1^n \mu(s) E\left(\frac{n}{s}\right)$ oder die allgemeinere Formel:

$$D_p(n) = E\left(\frac{n}{1}\right) - E\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right) - E\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right) - \cdots + E\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}}\right)$$
$$- E\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}5^{\gamma+1}}\right).$$

Der Verfasser entwickelt jetzt die speciellere Theorie der Functionen $N_{23}(n)$ und $N_{235}(n)$, indem er insbesondere bequeme Formeln zur genauen oder angenäherten Berechnung der N zu entwickeln sucht.

Die Berechnung von $N_2(n)$ ist unmittelbar gegeben, indem

$$N_2(n) = E\left(\frac{ln}{l2}\right)+1.$$

Zum successiven Berechnen der $N_{23}(n)$ benutzt man die Formeln

$$N(n) = N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right)+N\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right)-N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}}\right)+D_p(n)$$

und

$$D_p(n) = (\alpha+1)(\beta+1)-D_p\left(\frac{p}{n}\right)+\varrho,$$

wo ϱ gleich 0 oder $+1$ ist, je nachdem n Nichtdivisor oder Divisor von p ist. Einfach wird die Berechnung, wenn man α und β so wählt, dass 2^α und 3^β beide beinahe gleich $n^{\frac{1}{2}}$ sind.

In diesem Fall hat man

$$N(n) = (\alpha+1)(\beta+1)+N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right)+N\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right)-N\left(\frac{2^\alpha 3^\beta}{n}\right)+\varrho.$$

Wenn n von der Form $2^\alpha 3^\beta$ ist, so folgt

$$N(2^\alpha 3^\beta) = 2\alpha\beta+\alpha+\beta+1+N\left(\frac{2^\alpha}{3^{\beta+1}}\right)+N\left(\frac{3^\beta}{2^{\alpha+1}}\right),$$

wo wenigstens eins der letzten zwei Glieder 0 ist. Mit Hülfe der Formel $N(2^x)-N(2^{x-1}) = 1+E\frac{xl2}{l3}$ und ähnlicher Formeln ist es leicht, die N, welche Potenzen von 2 und 3 entsprechen, zu berechnen.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich über die Function N_{235} anstellen. Diese wird übrigens auf die numerische Function N_{23} zurückgeführt mittels der Gleichung

$$N_{235}(n)-N_{235}\left(\frac{n}{5}\right) = N_{23}(n).$$

Endlich kann bemerkt werden, dass die Fundamentalgleichung

$$F(n)-F\left(\frac{n}{2}\right)-F\left(\frac{n}{3}\right)+F\left(\frac{n}{6}\right) = 1,$$

welche zur Definition der numerischen Function $N_{23}(n)$ dienen kann, durch die continuirliche Function $A(ln)^2+B(ln)+C$ erfüllt ist, wo A, B, C willkürliche Constanten sind. Dieses führt zu Annäherungsformeln für die Berechnung von N_{23}.

Aehnliche Annäherungsformeln werden auch für die numerische Function N_{235} entwickelt, indem annäherungsweise

$$N_{235} = A+B(ln)+C(ln)^2+D(ln)^3$$

ist. Die Bestimmung von A, B, C ist sehr interessant.

Der letzte Abschnitt enthält die Theorie von $L(n)$, welche der Theorie von $N(n)$ ziemlich analog ist.

Nur einige Bemerkungen hierüber sollen hervorgehoben werden. Man kann $L(n)$ nach unvollständigen Quotienten entwickeln und erhält

$$L(n) = \sum_{y=1}^{y=n} \varepsilon_y 2^k E\left(\frac{n}{y}\right),$$

wo k die Anzahl der verschiedenen Primfactoren von p bedeutet, die in y vorkommen ($p = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots$), und $\varepsilon_y = -1$, 0, $+1$.

Man hat für L_{23} die Fundamentalgleichung

$$L(n)+L\left(\frac{n}{2}\right)+L\left(\frac{n}{3}\right)+L\left(\frac{n}{6}\right) = 1.$$

Endlich kann man die L durch die N ausdrücken und hat z. B. für L_{23}

$$L(n) = N(\sqrt{n})-N\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)-N\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right)+N\left(\sqrt{\frac{n}{2.3}}\right).$$

Wie gross n auch wird, so giebt es Werte, für welche $L(n)=0$ ist. Wenn $L(a)=0$, $L(b)=0$, und wenn $a<n<b$, so kann man zeigen, dass der numerische Wert von $L(n)$ nicht grösser als $\frac{1}{2}(N(a)-N(b))$ werden kann. V.

L. Lorenz. Analytiske Undersögelser over Primtalmängderne. Kjöb. Skrift. (6) V. 427-450. (1891.)

In seiner Abhandlung über die Primzahlen (Undersögelser angaaende Mängden af Primtal. Kjöb. Skrift. (6) II) hat Herr Gram geäussert, dass es aussehen könnte, als ob die wirklich gefundenen Primzahlmengen von den nach Riemann's Formel berechneten periodisch abwichen. Herr Gram kommt aber zu dem Resultat, dass die scheinbaren periodischen Abweichungen wahrscheinlich nur auf einem Zufall beruhen. Eine genauere

Untersuchung dieses Umstandes wird in der gegenwärtigen Abhandlung beabsichtigt.

$\theta(x)$ bedeutet die Anzahl der Primzahlen bis zur Zahl x, und die numerische Function $\vartheta(x)$ wird definirt mittels der Gleichung

$$\vartheta(x) = \theta(x) + \tfrac{1}{2}\theta(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}\theta(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots.$$

$\vartheta(x)$ nennt Herr Gram „die Anzahl der dividirten Primzahlpotenzen", und diese Function sucht Herr Lorenz nach dem Vorgange von Herrn Gram zu berechnen.

Herr Lorenz hat als Grundlage seiner Untersuchungen zwei verschiedene Ausgangspunkte gewählt.

Erstens hat er

$$(\tfrac{1}{2} + 2^r + 3^r + 4^r + \cdots)^s = \beta^s(1) + \beta^s(2).2^r + \cdots + \beta^s(x)x^r$$

gesetzt, wo $\beta^s(x)$ der Coefficient von x^r in dem links stehenden Ausdruck ist. Weiter setzt er

$$B^s(x) = \beta^s(1) + \beta^s(2) + \cdots + \beta^s(x)$$

und hat dann

$$(1) \quad \vartheta(x) = -a_0 + a_1\frac{B^1(x)}{1} - a_2\frac{B^2(x)}{2} + \cdots \pm a_{s_1}\frac{B^{s_1}(x)}{s_1},$$

$$s_1 > \frac{\log x}{\log 2} - 1.$$

Darnach wird $(\frac{1}{2} + 2^r + 3^r + \cdots + x^r)^s$ durch ein n-faches Integral ausgedrückt. Zu diesem Zwecke geht er von der von Poisson gefundenen Formel aus:

$$\tfrac{1}{2} + 2^r + 3^r + \cdots + x^r = \int_1^{x+\frac{1}{2}} x_1^r\,(1 + 2\sum_1^\infty \cos 2\pi m_1 x_1)\,dx_1$$

und erhält schliesslich

$$B^s(x) = \int_1^u du_1 \int_1^{u_1}\frac{du_2}{u_2}\cdots\int_1^{u_{s-1}}\frac{du_s}{u_s}\Big(1 + 2\Sigma\cos\mu_1\frac{u_1}{u_2}\Big)$$

$$\times\Big(1 + 2\Sigma\cos\mu_2\frac{u_2}{u_3}\Big)\cdots\Big(1 + 2\Sigma\cos\mu_{s-1}\frac{u_{s-1}}{u_s}\Big)(1 + 2\Sigma\cos\mu_s u_s),$$

wo $u = x + \frac{1}{2}$ und $2\pi m_1 = \mu_1$, $2\pi m_2 = \mu_2$, $\ldots$, $2\pi m_s = \mu_s$, und wo in jeder Summe m von 1 bis ∞ variirt.

Dieses Integral wird jetzt auf seine einfachste Form gebracht, und man erhält

$$B^s(x) = X_0^s + \frac{s}{1} X_1^s + \frac{s(s-1)}{1.2} X_2^s + \cdots + X_s^s,$$

wo

$$X_p^s = \int_1^u du_1 \int_1^{u_1} \frac{du_2}{u_2} 2\Sigma \cos\mu_1 \frac{u_1}{u_2} \cdots$$

$$\cdot \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2\Sigma \cos\mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}} \frac{(lu_{p+1})^{s-p-1}}{[s-p-1]}.$$

Es wird jetzt $B^s(x)$ in einen periodischen und einen aperiodischen Teil geteilt. Dieser letzte Teil wird mit $\overline{B}^s(x)$ bezeichnet. Dann wird ein analytisch ziemlich einfacher Ausdruck für $\overline{B}^s(x)$ gefunden, und es wird gezeigt, dass, wenn verschiedene Glieder weggeworfen werden, man zu einer Annäherungsformel für $\overline{\vartheta}(x)$ kommt:

$$\overline{\vartheta}(x) = -l2 + Li(u) - Li(u^{-\frac{1-2C_0}{1+2C_0}}),$$

wo $\frac{1-2C_0}{1+2C_0} = 0{,}73245$, und wo Li den Integrallogarithmus bedeutet. Würde man hier statt C_0 die Einheit setzen, so würde das Resultat die einfache Form

$$\overline{\vartheta}(x) = -l2 + \int_{-lu}^{lu} \frac{dv}{v} e^v$$

erhalten. Es ist jedoch hier zu bemerken, dass nicht zu ersehen ist, welchen Einfluss die weggeworfenen Glieder auf das Resultat haben würden.

Im folgenden wird nun der periodische Teil von $B^s(x)$ untersucht, und es wird behauptet, dass der periodische Teil von $X_p^s (p < s)$ nur eine untergeordnete Bedeutung im Vergleich mit X_s^s hat, so dass eigentlich nur X_s^s untersucht wird.

Indem x sehr gross angenommen wird, kommt der Verf. (indem auch hier verschiedene Glieder von untergeordneter Bedeutung weggeworfen werden) zu dem Resultat:

$$X_s^s = \frac{u}{\pi\sqrt{s}} \sum_1^\infty \gamma_n^s(m) \frac{\sin\left(2\pi s(mu)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(mu)^{\frac{s+1}{2s}}}, \qquad n = (mu)^{\frac{1}{s}},$$

wo die γ mittels der Gleichung

$$(1+2^r+3^r+\cdots+(n-1)^r+\tfrac{1}{2}n^r)^s = 1+\gamma_n^s(2)2^r+\cdots+\gamma_n^s(m)m^r+\cdots$$

definirt sind.

Werden nun die so gefundenen Werte von X_s^s statt $B^s(x)$ in dem Ausdruck (1) von $\vartheta(x)$ mittels $B^s(x)_s$ eingesetzt, um dadurch den periodischen Teil von $\vartheta(x)$ zu bestimmen, so wird man finden, dass mit wachsendem s grosse Reihen von Gliedern dasselbe Vorzeichen bekommen. Dieses wird geschehen, wenn

$$\theta_s = 2s(mu)^{\frac{1}{s}} + \frac{s-1}{4}, \quad \frac{\log mu}{s} = y$$

und

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial s} = 2e^y(1-y)+\tfrac{1}{4} = 1-2p,$$

wo p eine ganze Zahl ist, indem dann θ_s und θ_{s+1} beinahe nur um ein Vielfaches von 2π von einander verschieden sind und die trigonometrische Function, die in den genannten Gliedern vorkommt, beinahe dieselbe wird, nämlich

$$\sin\pi\,\theta_s = \sin\pi\left(\log mu\,.\,\frac{2e^y+\frac{1}{4}}{y} - \tfrac{1}{4}\right).$$

Man kann ihr die Form

$$\sin\pi\theta_s = \sin 2\pi\left(\frac{\log u}{\lambda} + k_m\right)$$

geben, indem $\lambda = \dfrac{y}{e^y+\frac{1}{8}}$ und für die niedrigsten Werte von p beinahe 0,34 ist. Es wird ersichtlich, dass die Bestimmung von ϑ im wesentlichen von denjenigen Gliedern abhängt, welche dasselbe Vorzeichen haben.

Der Verf. kommt noch mittels eines anderen Verfahrens zu demselben Resultat. Er setzt

$$(1+2^r+3^r+\cdots)^s = 1+\gamma^s(2)\cdot 2^r+\cdots+\gamma^s(x)\cdot x^r,$$

ferner

$$G^s(x) = \sum_1^x \gamma^s(u)$$

und hat jetzt

$$\vartheta(x) = -b_0+b_1\frac{G^1(x)}{1} - b_2\frac{G^2(x)}{2}+\cdots\pm b_{s_1}\frac{G^{s_1}(x)}{s_1},$$

$$s_1 > \frac{\log x}{\log 2} - 1.$$

Die γ werden mittels trigonometrischer Reihen ausgedrückt, und das Verfahren ist dem vorigen analog.

Der Verf. meint hiermit bewiesen zu haben, dass wirklich die anfangs besprochenen periodischen Abweichungen von der Riemann'schen Formel stattfinden. V.

L. KRONECKER. Eine analytisch - arithmetische Formel. J. für Math. CVIII. 348.

Die Formel lautet:

$$\frac{2}{\log N}\sum_{\varrho}\log(2\sin\varrho\pi) = \sum_{p}\left[\frac{\log N}{\log p}\right]\frac{\log p}{\log N},$$

und zwar ist die Summation rechts auf alle Primzahlen p zu erstrecken, links auf alle reducirten positiven echten Brüche (ϱ), welche keinen grösseren Nenner als N haben, und deren Wert nicht $\frac{1}{2}$ übersteigt. Die eckige Klammer entspricht der Bezeichnungsweise der grössten Ganzen nach Gauss. Sn.

H. POINCARÉ. Sur la distribution des nombres premiers. C. R. CXIII. 819.

Der Verfasser beabsichtigte, die Theoreme von Tschebyscheff auf complexe Zahlen auszudehnen, und ist so zu folgenden beiden Sätzen gelangt: Die Summe der Logarithmen aller unter x liegenden Primzahlen von der Form $4n+1$ ist unendlich kleiner als $\frac{1}{2}ax$, wenn $a>1$, und unendlich grösser als $\frac{1}{2}ax$, wenn $a<1$. — Die Anzahl der unter x liegenden Primzahlen von der Form $4n+1$ ist unendlich kleiner als $\frac{ax}{2\log x}$, wenn $a>1$, und unendlich grösser als $\frac{ax}{2\log x}$, wenn $a<1$. Sn.

G. GIULIANI. Sulla funzione $E(x)$. Palermo Rend. V. 285-287.

Bezeichnet $E(x)$ die in x enthaltene grösste ganze Zahl und $E_k(x)$ den Ausdruck:

$$E_k(x) = \frac{E(x)E(x+1)\dots E(x+k-1)}{1.2\dots k},$$

so ist:

$$\sum_{n=1}^{m-1} E_k\left(x+\frac{n}{m}\right)$$
$$= [m-1+mE(x)-E(mx)]E_k(x)+[E(mx)-mE(x)]E_k(x+1).$$

Setzt man $k=1$ und schreibt $E(x)$ für $E_1(x)$, so erhält man die Hermite'sche Formel:

$$\sum_{n=1}^{m-1} E\left(x+\frac{n}{m}\right) = E(mx)-E(x).$$

Wz.

J. Hacks. Einige Anwendungen der Function $[x]$. Acta Math. XIV. 329-336.

Die Anzahl derjenigen ganzen Zahlen aus der Reihe von 1 bis m, welche nicht durch ein Quadrat teilbar sind, ist

$$\Psi_2(m) = \left[\frac{m}{1^2}\right]-\left[\frac{m}{2^2}\right]-\left[\frac{m}{3^2}\right]-\left[\frac{m}{5^2}\right]+\left[\frac{m}{2^2.3^2}\right]-\left[\frac{m}{7^2}\right]\pm\cdots,$$

und für diese zahlentheoretische Function gilt die Beziehung

$$\Psi_2(m)+\Psi_2\left[\frac{m}{4}\right]+\Psi_2\left[\frac{m}{9}\right]+\Psi_2\left[\frac{m}{16}\right]+\cdots+\Psi_2\left[\frac{m}{[\sqrt{m}]^2}\right]=m.$$

Diese Formeln werden auf zwei verschiedenen Wegen bewiesen und dann die entsprechenden Formeln für die Function $\Psi_n(m)$ aufgestellt, welche die Anzahl der durch keine n^{te} Potenz teilbaren Zahlen aus der Reihe 1 bis m bezeichnet. Die erste der beiden genannten Formeln lässt sich zu einem Beweise des Satzes verwerten, dass die Anzahl der Primzahlen jede Grenze übersteigt. Lässt man nämlich rechter Hand alle positiven Glieder mit Ausnahme des ersten weg, so ergiebt sich

$$\Psi_2(m) > m-\left[\frac{m}{2^2}\right]-\left[\frac{m}{3^2}\right]-\left[\frac{m}{5^2}\right]-\cdots > m\left(2-\frac{\pi^2}{6}\right),$$

woraus der genannte Satz leicht folgt. Ht.

Fr. Rogel. Darstellungen zahlentheoretischer Functionen durch trigonometrische Reihen. Hoppe Arch. (2) X. 62-83.

In der Lambert'schen Reihe

$$\Sigma \frac{x^n}{1-x^n} = \Sigma \psi(m) x^m$$

werden die einzelnen Glieder der linken Seite zunächst in Partialbrüche zerlegt, um ein wiederholtes Differentiiren zu erleichtern. Von den für $x = 0$ sich ergebenden Grenzformeln der abgeleiteten Reihen wird Gebrauch gemacht, um die sämtlichen, am häufigsten vorkommenden zahlentheoretischen Functionen durch trigonometrische Functionen auszudrücken: Anzahl und Summe der Teiler einer Zahl; Anzahl und Summe, sowie Summe von Functionen der in einer Zahl enthaltenen Primzahlen; Anzahl und Summe der Primzahlen, welche nicht grösser als eine gegebene Zahl sind; Anzahl aller Zahlen, welche kleiner als m und relativ prim gegen m sind; grösstes gemeinschaftliches Mass, kleinstes gemeinschaftliches Vielfache, Anzahl der gemeinschaftlichen Teiler zweier Zahlen. Schliesslich findet sich eine transcendente Gleichung, welcher alle vollkommenen Zahlen genügen müssen. Sn.

E. Catalan. Sur quelques théorèmes d'analyse et d'arithmétique. S. M. F. Bull. XIX. 145-151.

Aus Relationen zwischen elliptischen Reihen, wie z. B.

$$\left[\frac{x}{1-x^2} + 3\cdot\frac{x^3}{1-x^6} + 5\cdot\frac{x^5}{1-x^{10}} + \cdots\right]^2$$
$$= \frac{x^2}{1-x^4} + 2^3\cdot\frac{x^4}{1-x^8} + 3^3\cdot\frac{x^6}{1-x^{12}} + \cdots,$$

werden durch Coefficientenvergleichungen zahlentheoretische Sätze gewonnen. Etwa: n sei ungerade; man zerlege $2n$ auf jede mögliche Weise in ungerade Summanden r und $2n-r$; sodann suche man für jedes r bezw. $2n-r$ die Summe der Divisoren Sr und $S(2n-r)$, bilde deren Producte und schliesslich die Summe $\Sigma Sr S(2n-r)$; $\{r = 1, 3, \ldots, 2n-1\}$. Andererseits zerlege man n in seine Divisoren λ, bilde deren Kuben, so ist $\Sigma\lambda^3 = \Sigma Sr S(2n-r)$.

Sn.

L. J. Rogers. Note on functions proper to represent a substitution of a prime number of letters. Mess. (2) XXI. 44-47.

Damit eine ganze rationale algebraische Function $f(z)$ eine Substitution von p Buchstaben darstelle, ist es nötig und ausreichend, dass die p Werte $f(0)$, $f(1)$, ..., $f(p-1)$ den Zahlen 0, 1, 2, ..., $p-1$ nach dem Modul p in einer beliebigen Folge congruent sind. Von dieser Bedingung ausgehend, hat Hr. Hermite bewiesen (vgl. Serret, Cours d'algèbre supérieure, § 476), dass, wenn $f(z)$ diese Eigenschaft für einen Primmodul p besitzt, dann die einzelnen Coefficienten von z^{p-1} in den Entwickelungen von $f(z)$, $\{f(z)\}^2$, ..., $\{f(z)\}^{p-2}$, nachdem diese vermöge des Fermat'schen Satzes auf Functionen $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades gebracht sind, der Null congruent werden. Er zeigt auch die Richtigkeit der Umkehrung, dass nämlich $f(z)$ eine Substitution darstellt, falls jene $p-2$ Coefficienten Null sind. Der Verf. legt dar, dass diese $p-2$ Bedingungen zwar genügend, aber nicht alle notwendig sind, insofern sie nicht alle unabhängig von einander sind, und belegt dies am Schlusse seines Artikels durch Erörterung der Fälle 5 und 7. Lp.

L. Gegenbauer. Arithmetische Relationen. Wien. Ber. C. 1054-1071.

Es handelt sich um Eigenschaften der Function $\mathfrak{Q}_\lambda(n)$ welche die Anzahl aller in dem Intervall von 1 bis n vorkommenden Zahlen bezeichnet, die durch keine λ^{te} Potenz teilbar sind. Zahlreiche Anzahlbestimmungen und asymptotische Gesetze sehr verwickelter Art. Sn.

A. Piltz. Eine Mitteilung aus der Zahlentheorie. Naturf. Ges. Halle LXIV. 15-16.

H. Minkowski. Ueber Geometrie der Zahlen. Naturf. Ges. Halle LXIV. 13.

Dietrichkeit. Kriterien der Teilbarkeit dekadischer Zahlen. Schlömilch Z. XXXVI. 64, 254-255, 316-317.

H. Scheffler. Beiträge zur Zahlentheorie, insbesondere zur Kreis- und Kugelteilung mit einem Nachtrage zur Theorie der Gleichungen. Leipzig. F. Foerster. XI + 285 S. 8°.

Bericht auf S. 74 dieses Bandes.

B. Theorie der Formen.

E. Borissoff. Ueber die Reduction der positiven ternären quadratischen Formen nach der Selling'schen Methode, nebst einer Tabelle der reducirten Formen für alle Determinanten von 1 bis 200. St. Petersburg 1890. 1-108. Tabellen: 1-116. (Russisch.)

I. Ueber die Reduction der positiven ternären Formen. II. Substitutionen der Reductionsmethode von Selling. III. Substitutionen, durch welche die Form in sich selbst übergeht. IV. Ueber die Typen der reducirten Formen von Selling und über die Bildung der Tabellen dieser Formen.

Aus dieser Inhaltsübersicht sieht man, dass der Zweck der Arbeit das ausführliche Studium der Selling'schen Methode der Reduction ist. Die Tabelle, welche vom Verfasser für die reducirten Formen bis $D = 200$ gegeben ist, übersteigt die Eisenstein'sche Tabelle um mehr als das Dreifache. Wi.

A. Meyer. Zur Theorie der indefiniten ternären quadratischen Formen. J. für Math. CVIII. 125-139.

A. Meyer. Mathematische Mitteilungen. IV: Ueber indefinite quadratische Formen. Wolf Z. XXXVI. 241-250.

Es sei f eine indefinite primitive ternäre quadratische Form mit der Determinante D und ΩF ihre Adjungirte, wo F wiederum eine primitive quadratische Form ist. Setzt man $D = \Omega^2 \Delta$, so heissen die positiven ganzen Zahlen Ω und Δ die Invarianten von f. In seiner Inauguraldissertation hat der Verfasser den

Satz bewiesen, dass zwei quadratische Formen solcher Art wie f äquivalent sind, wenn sie demselben Geschlecht angehören und ihre Invarianten Ω und Δ ungerade und zu einander prim sind. Dieser bereits von Eisenstein vermutete Satz wird in der vorliegenden Abhandlung von neuem bewiesen und zugleich verallgemeinert. Es gilt der folgende Hülfssatz: Zwei ternäre Formen mit denselben Invarianten Ω und Δ sind äquivalent, wenn sie beide dieselbe primitive binäre Form von der Determinante ΩM darstellen, in welcher der Factor M eine in 2Δ nicht aufgehende Primzahl oder das Doppelte einer solchen Primzahl ist. Ferner bedient sich der Verfasser eines Satzes über die Existenz gewisser besonders beschaffener Lösungen der Pell'schen Gleichung $t^2-pq\,Du^2=1$, wo p und q Primzahlen sind, und beweist dann den Satz: Wenn die indefinite ternäre Form f die eigentlich primitive binäre Form φ mit der Determinante ΩM darstellt, so stellt sie auch jede andere Form φ_1 dieser Determinante dar, welche mit φ in dasselbe Geschlecht gehört, falls noch gewisse Voraussetzungen über die Teiler von Δ und ausserdem gewisse Relationen zwischen Legendre'schen Symbolen erfüllt sind. Ein zweiter Satz behandelt in entsprechender Weise die Bedingungen dafür, dass eine uneigentlich primitive ternäre Form eine primitive binäre Form darstellt. Das schliessliche Resultat ist die Aufstellung der Bedingungen dafür, dass zwei primitive ternäre indefinite Formen desselben Geschlechts äquivalent sind. Durch Specialisirung folgt hieraus der Satz: Zwei primitive indefinite ternäre Formen sind äquivalent, wenn sie demselben Geschlecht angehören und ihre Invarianten Ω und Δ weder durch 4 teilbar sind, noch einen ungeraden gemeinschaftlichen Teiler haben.

Die zweite Abhandlung dehnt diese Resultate auf indefinite quadratische Formen mit beliebig vielen Veränderlichen aus.

Ht.

E. Bertini. Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 1095-1115.

Wenn ein Punkt l-facher Punkt einer ebenen Curve $f=0$ und λ-facher Punkt einer Curve $\varphi=0$ ist und die Tangenten in diesem Punkte an der ersteren Curve verschieden sind von den Tangenten an der zweiten Curve, so absorbirt der Punkt genau $l\lambda$ Schnittpunkte. In diesem sogenannten „einfachen Falle" enthält die in Bezug auf eine der Veränderlichen genommene Resultante R von f und φ die $(l\lambda)^{\text{te}}$ Potenz einer gewissen Linearform als Factor. Fallen jedoch einige jener Tangenten zusammen, so tritt an Stelle der $(l\lambda)^{\text{ten}}$ Potenz eine gewisse andere, etwa die α^{te} Potenz, in R als Factor auf, und α giebt dann die Zahl der in dem Punkte zusammenfallenden Schnittpunkte der beiden Curven an. Der Punkt wird in diesem allgemeinen Falle durch das Symbol $(l\lambda\alpha)$ bezeichnet. Der Verfasser beweist in der vorliegenden Abhandlung den Satz: Wenn $F=0$ eine Curve n^{ter} Ordnung ist und für jeden gemeinsamen Punkt $(l\lambda\alpha)$ der Curven $f=0$, $\varphi=0$ von den Ordnungen bezüglich m, μ drei Formen U, A^1, B^1 von den Ordnungen bezüglich p, $n-m+p$, $n-\mu+p$ von der Art sich bestimmen lassen, dass die Curve $UF-A^1f-B^1\varphi=0$ jenen Punkt $(l\lambda\alpha)$ zum $(\alpha-l\lambda+l-1)$-fachen Punkt hat, so ist F in der Gestalt $Af+B\varphi$ darstellbar, vorausgesetzt, dass $U=0$ nicht durch den Punkt $(l\lambda\alpha)$ hindurchgeht. Aus diesem Satze folgt leicht der bekannte Nöther'sche Fundamentalsatz: Bestimmt man nämlich die beiden Curven $A^1=0$, $B^1=0$, derart, dass dieselben den Punkt $(l\lambda\alpha)$ bezüglich zum $(\alpha-l\lambda+\lambda-1)$-fachen, $(\alpha-l\lambda+l-1)$-fachen Punkt haben, so ist die Bedingung des obigen Satzes für eine beliebige Form U erfüllt, sobald $F=0$ jeden Punkt $(l\lambda\alpha)$ mindestens zum $(\alpha-l\lambda+l+\lambda-1)$-fachen Punkt hat. Unter dieser Bedingung ist folglich F in der Gestalt $Af+B\varphi$ darstellbar. Zugleich ergiebt sich, wie man sieht, der Satz: Wenn $F=0$ durch jeden gemeinsamen Punkt $(l^{(i)}\lambda^{(i)}\alpha^{(i)})$ zweier Curven $f=0$, $\varphi=0$ hindurch geht, so ist die $(\alpha-l\lambda+l+\lambda-1)^{\text{te}}$ Potenz von F in der Gestalt $Af+B\varphi$ darstellbar, wo der Exponent von F das Maximum der Zahlen $\alpha^{(i)}-l^{(i)}\lambda^{(i)}+l^{(i)}+\lambda^{(i)}-1$ ist. Ht.

H. Minkowski. Ueber die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen.
J. für Math. CVII. 278-297.

Die Grundlage für die Entwickelungen der vorliegenden Abhandlung bilden die folgenden geometrischen Betrachtungen. Eine definite quadratische Form f der n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ mit nicht verschwindender Determinante Δ werde als Summe der Quadrate von n reellen Linearformen dargestellt:

$$f = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2,$$

$$\xi_a = \pi_{a1} x_1 + \pi_{a2} x_2 + \cdots + \pi_{an} x_n \quad (a = 1, 2, \ldots, n),$$

und dann werden die Werte dieser Linearformen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ als rechtwinklige Coordinaten der Punkte eines n-dimensionalen Raumes gedeutet, so dass auch jedem Wertsysteme der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ ein Punkt dieses Raumes entspricht. Zunächst mache man diejenigen Punkte kenntlich, für welche jedes Mal eine der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den Wert 1 und die anderen $n-1$ den Wert 0 haben. Diese n Punkte bestimmen zusammen mit dem Nullpunkte eine n-kantige Ecke, welche sich leicht zu einem n-dimensionalen Parallelepipedon vervollständigen lässt. An jede der $2n$ Begrenzungsflächen dieses Elementarparallelepipedons lege man gleich gerichtet ein vollkommen gleiches Parallelepipedon, an die noch freien Begrenzungsflächen dieser Parallelepipeda wieder ein gleiches, und dieses Verfahren denke man sich unbegrenzt fortgesetzt, so dass auf diese Weise der ganze n-dimensionale Raum in parallelepipedische Kammern eingeteilt ist. Die Ecken dieser Parallelepipeda bilden „ein regelmässiges Punktsystem"; sie werden durch diejenigen Werte $\xi_1, \ldots, \xi_n$ dargestellt, welche man durch Benutzung ganzzahliger Systeme $x_1, \ldots, x_n$ findet. Die quadratische Form f stellt offenbar das Quadrat der Entfernung des Punktes $\xi_1, \ldots, \xi_n$ von dem Nullpunkte dar, und die Wurzel aus ihrer Determinante Δ liefert den Rauminhalt des Elementarparallelepipedons. Benutzt man die erstere Thatsache und bedenkt ferner, dass der Abstand zweier Parallelebenen eine gegebene Grösse nicht überschreiten kann, so folgt die Grundeigenschaft der definiten quadratischen

Form, derzufolge es nur eine endliche Anzahl von ganzzahligen Wertsystemen ihrer Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ giebt, für welche ihr Wert unterhalb einer gewissen Grenze liegt. Nachdem noch gezeigt ist, dass die Willkür in der Darstellung der Form f als Summe von n Quadraten linearer Formen geometrisch nur die Neigung der Elementarparallelepipeda gegen die rechtwinkligen Coordinatenaxen betrifft, während die Figur derselben von jener Willkür unabhängig ist, kommt der Verfasser zu seiner Hauptaufgabe: der anschaulichen Auslegung des Aequivalenzbegriffes. Das reguläre Punktsystem ist nämlich noch verschiedener anderer parallelepipedischer Anordnungen seiner Punkte fähig, und zwar entspricht dem Inbegriff aller dieser möglichen Anordnungen eine Klasse von äquivalenten Formen. Nun werde mit $\sqrt{M}$ die Entfernung des Nullpunktes von denjenigen Punkten des regulären Punktsystems bezeichnet, welche dem Nullpunkte nächst gelegen sind: es ist dann M die kleinste von 0 verschiedene Grösse, welche durch die Form f mittels ganzer Zahlen darstellbar ist. Ferner werde um jeden Punkt des Systems als Mittelpunkt eine n-dimensionale Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}\sqrt{M}$ construirt. Bedenken wir, dass diese Kugeln sich sämtlich ausschliessen müssen, so kommt, in Anbetracht der übrig bleibenden Raumlücken, in einem überall hin gleichmässig ausgedehnten unendlich wachsenden Raume auf je einen dem Kugelinhalte gleichen Raumteil im Durchschnitt weniger als ein Punkt des Systems. Der Kugelinhalt muss also kleiner sein als der Inhalt $\sqrt{\Delta}$ des Elementarparallelepipedons. Diese Thatsache liefert die Ungleichung

$$M < \frac{2n}{\pi e} \sqrt[n]{n\pi e^{\frac{1}{3n}}} \sqrt[n]{\Delta} < n \sqrt[n]{\Delta},$$

welche für das Minimum M einer quadratischen Form eine viel engere obere Grenze liefert als die bekannte Hermite'sche Formel.

Die wichtigste Anwendung dieser Ungleichung betrifft die Theorie der Zahlenkörper n^{ten} Grades. Ist D der absolute Wert der Grundzahl eines solchen Körpers K und $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine Basis seiner ganzen Zahlen, so betrachtet der Verfasser die definite

quadratische Form

$$f = \sum_h |\omega_1^{(h)} x_1 + \omega_2^{(h)} x_2 + \cdots + \omega_n^{(h)} x_n|^2, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

wo die oberen Indices zur Unterscheidung der n zu K conjugirten Körper dienen. Sind dann $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}$ Ideale des Körpers, deren Product ein Hauptideal μ ergiebt, so folgt leicht aus der obigen Ungleichung $\sum_h |\mu^{(h)}|^2 < n \sqrt[n]{DN(\mathfrak{a})^2}$. Wird nun benutzt, dass eine Summe von n positiven Grössen niemals kleiner ist als das n-fache der n^{ten} Wurzel aus ihrem Producte, so ergiebt sich wegen $N(\mu) = \pm N(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{m})$ die Ungleichung $N(\mathfrak{m}) < \sqrt{D}$, d. h. zu jedem Ideal giebt es behufs Herstellung eines Hauptideals mindestens einen Multiplicator, dessen Norm $< \sqrt{D}$ ist. Wegen $|N(\mathfrak{m})| \geqq 1$ folgt $\sqrt{D} > 1$, d. h. jede Discriminante enthält Primzahlen als Factoren, worin eine das Wesen der algebraischen Zahlen tief berührende Eigenschaft ausgedrückt ist. Ht.

H. Minkowski. Théorèmes arithmétiques. C. R. CXII. 209-212.

In dieser Note erweitert der Verfasser die Methoden und Resultate seiner im vorigen Referate besprochenen Abhandlung. Statt der definiten quadratischen Form wird allgemein eine Summe von der Gestalt $f = |\xi^p| + |\eta^p| + |\zeta^p| + \cdots$ der Betrachtung zu Grunde gelegt, wo $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ irgend n unabhängige Linearformen der n Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ bedeuten, unter denen β Paare conjugirt imaginärer vorhanden sind, während die übrigen $\alpha = n - 2\beta$ Linearformen reelle Coefficienten haben. Ist ferner p eine reelle Grösse $\geqq 1$ und $\varDelta$ die Determinante der Formen, so gilt der Satz, dass man stets den $x, y, z, \ldots$ solche ganzzahligen Werte erteilen kann, dass die genannte Summe der p^{ten} Potenzen kleiner als die Grösse

$$\left\{ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\beta} \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right]^{\alpha} 2^{-\frac{2\beta}{p}} \left[\Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)\right]^{\beta}} |\varDelta| \right\}^{\frac{p}{n}} < n |\varDelta|^{\frac{p}{n}}$$

ausfällt. Nachdem hieraus der im vorigen Referat genannte Satz von der Discriminante eines Körpers K vom n^{ten} Grade von neuem bewiesen ist, wird noch eines darüber hinausgehenden Satzes Erwähnung gethan, demzufolge diese Discriminante, absolut genommen, stets grösser ist als $\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\beta}\frac{n^n}{2.3\ldots n}\right]^2$, wo 2β die Zahl der imaginären zu K conjugirten Körper beträgt.

Ht.

J. Hacks. Ueber die Klassenanzahl der zu einer negativen Determinante $D=-q$ gehörigen eigentlich primitiven quadratischen Formen, wo q eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist. Acta Math. XIV. 321-328.

Setzt man

$$S=\sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{s^2}{q}\right],\qquad S'=\sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{2s^2}{q}\right],$$

wo $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl und q eine Primzahl $4n+3$ bedeutet, so ergiebt sich der Ueberschuss der Anzahl der unter $\frac{q}{2}$ liegenden quadratischen Reste von q über die Anzahl der über $\frac{q}{2}$ liegenden quadratischen Reste von q gleich

$$h=\frac{q-1}{2}-2S'+4S.$$

Aus diesem Ausdruck für die Klassenanzahl h gewinnt der Verfasser durch Berechnung der Summen S und S' die neue Formel

$$h=\frac{q-1}{2}-2\sum_{1}^{\frac{q-3}{2}}(-1)^s\left[\sqrt{\frac{q}{2}}\,s\right]$$

und hieraus durch Umformung

$$h=\frac{q-1}{2}+2\sum_{1}^{\frac{q-3}{2}}\sum_{1}^{\left[\frac{2s^2}{q}\right]}(-1)^s.$$

Indem man statt S und S' die Summe R der Reste nach q und

die Summe R' der Nichtreste einführt, ergiebt sich noch

$$h = \left[2 - \left(\frac{2}{q}\right)\right] \frac{R'-R}{q}.$$

Die ersteren Betrachtungen werden auch auf Primzahlen von der Form $4n+1$ ausgedehnt. Ht.

L. Bianchi. Geometrische Darstellung der Gruppen linearer Substitutionen mit ganzen complexen Coefficienten nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie. Math. Ann. XXXVIII. 313-333.

L. Bianchi. Sui gruppi di sostituzioni lineari e sulle forme quadratiche di Dirichlet e di Hermite. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII$_1$. 3-11.

Der Verfasser dehnt die geometrische, von Hrn. F. Klein für die Theorie der gewöhnlichen binären quadratischen Formen verwendete Methode auf die Theorie der quadratischen Formen mit complexen Coefficienten aus. Sind α, β, γ, δ ganze complexe Zahlen des Bereiches $(1, i)$ oder des Bereiches $(1, \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}})$, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist, so bestimmen die linear gebrochenen Substitutionen $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ je eine Gruppe G und G'. Die erzeugenden Substitutionen dieser beiden Gruppen sind

$$\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & i \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

bezüglich

$$\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & \varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun wendet der Verfasser die von Hrn. Poincaré angegebene geometrische Darstellung der linearen Substitutionen mit complexen Coefficienten an, indem er die Werte der complexen Veränderlichen $z = \xi + i\eta$ in gewöhnlicher Weise auf der $\xi\eta$-Ebene deutet und dann noch eine dritte zu beiden senkrechte Axe ζ hinzufügt (vergl. F. d. M. XV. 1883. 349, Acta Math. III. 54). Die Gruppen G und G' erweisen sich nach Poincaré'scher Bezeichnungsweise für alle Punkte des oberhalb der $\xi\eta$-Ebene

gelegenen Halbraumes als discontinuirlich. Sodann wird für beide Gruppen die Existenz eines Fundamentalraumes bewiesen, d. h. es giebt einen Raum, welcher zu jedem Punkte des Halbraumes einen, und im allgemeinen nur einen, äquivalenten Punkt enthält. Für die Gruppe G ist dieser Fundamentalraum ein Polyeder, welches ausserhalb der Kugel $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ zwischen den 4 Ebenen $\xi=0$, $\xi=\frac{1}{2}$, $\eta=-\frac{1}{2}$, $\eta=\frac{1}{2}$ eingeschlossen wird. Nach diesen allgemeinen Untersuchungen über Substitutionen wendet sich der Verfasser zum Studium der „Dirichlet'schen Formen", d. h. solcher binären quadratischen Formen, deren Coefficienten ganze Zahlen aus dem Bereiche $(1, i)$ oder $(1, \varepsilon)$ sind. Um eine solche Form geometrisch darzustellen, beschreibe man durch die beiden Punkte, welche in der $\xi\eta$-Ebene die Nullstellen der Form repräsentiren, im oberen Halbraume den die $\xi\eta$-Ebene orthogonal schneidenden Halbkreis. Dieser Halbkreis bestimmt umgekehrt die Form bis auf einen Zahlenfactor und heisst der repräsentirende Halbkreis der Form. Diese geometrischen Betrachtungen gestatten nun eine sehr einfache und bemerkenswerte Definition der reducirten Form. Eine Dirichlet'sche Form wird nämlich reducirt genannt, falls ihr repräsentirender Halbkreis das Fundamentalpolyeder schneidet. Hieran schliesst sich der Nachweis der beiden Sätze, dass jede Dirichlet'sche Form einer reducirten Form äquivalent ist, und dass für eine gegebene Determinante D nur eine endliche Anzahl von reducirten Formen existirt. Da die Polyeder des Halbraumes sich an jeder Stelle der $\xi\eta$-Ebene verdichten, so durchsetzt der repräsentirende Halbkreis einer Form eine unendliche Anzahl von Polyedern und wird durch dieselben in eine unendliche Reihe von Bogenstücken $\ldots\, l_{-3},\, l_{-2},\, l_{-1},\, l_1,\, l_2,\, l_3,\, \ldots$ zerlegt. Durch Verwandlung derselben in reducirte Bogenstücke und mit Hülfe des eben bewiesenen Endlichkeitssatzes gelangt der Verfasser dann zu einer Periode reducirter Formen und zu dem Satze, dass zwei aequivalente Formen derselben Periode angehören. Die fernere Berücksichtigung der Thatsache, dass jede Substitution, welche die Form in sich überführt, ihren repräsentirenden Halbkreis ungeändert lässt, führt zur Aufstellung aller Transformationen der

Form in sich. Diese Methode, angewandt auf die Hauptform $(1, 0, -D)$, lehrt die ganzen complexen Lösungen der Pell'schen Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ ermitteln. Mit dem gleichen Erfolge lässt sich die geometrische Untersuchungsweise des Verfassers auf die „Hermite'schen Formen" anwenden, d. h. auf solche binären quadratischen Formen $ax\bar{x} + bx\bar{y} + \bar{b}\bar{x}y + cy\bar{y}$, bei welchen a und c ganze reelle Zahlen, b eine ganze Zahl aus dem Bereiche $(1, i)$ oder $(1, \varepsilon)$ und die überstrichenen Buchstaben die conjugirt imaginären Werte bedeuten. Eine solche Form heisst definit oder indefinit, je nachdem $D = b\bar{b} - ac$ negativ oder positiv ausfällt. Im ersteren Falle stellt die Gleichung $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ in der $\xi\eta$-Ebene einen imaginären Kreis dar. Der durch diesen Kreis bestimmte Büschel von reellen Kugeln enthält 2 Punktkugeln, von denen die im oberen Halbraume gelegene der repräsentirende Punkt der Form genannt wird. Eine definite Form gilt dann als reducirt, wenn ihr repräsentirender Punkt im Fundamentalraume liegt. Für $D > 0$ stellt die obige Gleichung einen reellen Kreis der $\xi\eta$-Ebene dar. Die über diesem Kreise als Aequator beschriebene Halbkugel heisst die repräsentirende Halbkugel der Form, und eine indefinite Hermite'sche Form heisst reducirt, falls ihre repräsentirende Halbkugel das Fundamentalpolyeder durchsetzt.

Die zweite Abhandlung dehnt diese Untersuchungen aus auf die Bereiche $(1, i\sqrt{D})$ und $\left(1, \frac{-1+i\sqrt{D}}{2}\right)$, wo die positive ganze Zahl D im zweiten Falle der Bedingung $\equiv 3$ nach dem Modul 4 unterliegt. Ht.

E. Picard. Sur les formes quadratiques à indéterminées conjuguées. Math. Ann. XXXIX. 142-144.

Der Verfasser hebt kurz die schon in einer früheren Abhandlung „Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés du même côté d'un plan" (vergl. F. d. M. XVI. 1884. 732) dargelegten Gesichtspunkte hervor, welche ihn auf die von Hrn. Poincaré studirten Substitutionen der Punkte eines Halbraumes

geführt haben. Wird auf die quadratische Form mit conjugirten Veränderlichen

$$X\bar{X}+xX\bar{Y}+\bar{x}\bar{X}Y+(x\bar{x}+y^2)Y\bar{Y},$$

wo y eine reelle Grösse sein soll, die Substitution

$$(X,\ Y,\ dX+bY,\ cX+aY) \qquad [ad-bc=1]$$

mit complexen Coefficienten a, b, c, d angewandt, so kann man den Coefficienten der transformirten Form eine entsprechende Gestalt geben, wie sie die ursprüngliche Form besitzt, so dass jeder Substitution von obiger Gestalt eine Substitution der Grössen x und y zugehört. Setzt man $x=\xi+i\eta$, $y=\zeta$, so erhält man die von Hrn. Poincaré und neuerdings von Hrn. Bianchi (vergl. das vorige Referat) studirte geometrische Darstellung der Substitutionen mit complexen Coefficienten. Ht.

G. B. Mathews. On binary quadratic forms with complex coefficients. Quart. J. XXV. 289-300.

Die arithmetische Theorie der binären quadratischen Formen mit ganzen complexen Coefficienten und Veränderlichen führt, wenn man die Klein'sche geometrische Behandlung der gewöhnlichen quadratischen Formen geeignet erweitert, nach Hrn. Poincaré's Auffassung zu einer gewissen Polyedereinteilung des Raumes. Diese Raumeinteilung dient vor allem zur Reduction der genannten Formen. Die dabei gewonnenen Kriterien enthalten die von Dirichlet und Hermite gefundenen als Specialfälle. Vgl. die parallel laufende, ebenfalls in diesem Jahrgange der „Fortschritte" p. 216 besprochene Arbeit von Bianchi, welche während des Druckes der vorliegenden Abhandlung erschien.

My.

Capitel 3.

Kettenbrüche.

D. Gambioli. Sulle frazioni continue. Bologna Rend. 1890-1891. 43-62.

Es ist identisch:

$$\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\frac{1}{\alpha_s} = \frac{1}{\alpha_1} \dot{+} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2-\alpha_1} \dot{+} \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3-\alpha_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{\alpha_{n-1}^2}{\alpha_n-\alpha_{n-1}},$$

$$\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\beta_s$$

$$= \frac{\beta_1}{1} \dot{+} \frac{\beta_2}{\beta_1-\beta_2} \dot{+} \frac{\beta_1\beta_3}{\beta_2-\beta_3} \dot{+} \frac{\beta_2\beta_4}{\beta_3-\beta_4} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{\beta_{n-2}\beta_n}{\beta_{n-1}-\beta_n},$$

was man auch schreiben kann:

$$\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\frac{1}{\alpha_s} = F_s\left[\frac{1}{\alpha_1} \dot{+} \frac{\alpha_s^2}{\alpha_{s+1}-\alpha_s}\right]_1^{n-1},$$

$$\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\beta_s = F_s\left[\frac{\beta_1}{1} \dot{+} \frac{\beta_2}{\beta_1-\beta_2} \dot{+} \frac{\beta_s\beta_{s+2}}{\beta_{s+1}-\beta_{s+2}}\right]_1^{n-2}.$$

Es gilt ferner der Satz:

Wird die unendliche Reihe $\sum_{s=1}^{\infty} u_s$ durch den unendlichen Kettenbruch:

$$F_s\left[\frac{u_1}{1} \dot{-} \frac{u_2}{u_1+u_2} \dot{-} \frac{u_s u_{s+2}}{u_{s+1}+u_{s+2}}\right]_1^{\infty}$$

dargestellt, so hat die Reihe einen endlichen, unendlichen oder unbestimmten Grenzwert, je nachdem dasselbe von dem Kettenbruche stattfindet.

Hieraus ergeben sich die folgenden Sätze:

Sind α_s complexe Zahlen, deren absolute Werte sämtlich >2 sind, so ist der Kettenbruch $F_s\left[\dot{+}\frac{1}{\alpha_s}\right]_1^{\infty}$ convergent, und sein absoluter Wert ist $\overline{\gtrless} 1$.

Sind α_s complexe Zahlen, deren absolute Werte sämtlich $\geqq 2$ sind, so ist der Kettenbruch $F_s\left[\frac{1}{\alpha_1} \dot{+} \frac{\alpha_{s-1}}{\alpha_s-1}\right]_2^{\infty}$ convergent, und sein absoluter Wert ist $\overline{\gtrless} 1$.

Sind α, x complexe Zahlen, und ist $|\alpha| < 1$, $|x| \overline{\gtrless} 1$, so ist der Kettenbruch:

$$N = F_s\left[\frac{1}{1} \cdot \frac{\alpha^{2s-1}x}{1+\alpha^{2s-1}x}\right]_2^{\infty},$$

welcher der Reihe:

$$S = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^{s(s+2)} x^s$$

identisch entspricht, convergent, und sein absoluter Wert ist $\overline{\gtrless} \frac{1}{1-|\alpha|}$. (So muss dieser Satz lauten; der Text giebt unrichtiger Weise:

$$N = F_s\left[\frac{1}{1} \dot{+} \frac{1+\alpha^s\alpha}{1+\alpha^s x} \cdot \frac{\alpha^{2s-1}x}{1+\alpha^{2s-1}x}\right]_3^{\infty}, \quad S = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^{s^2} x^s\Big).$$

Der zweite Teil der Abhandlung beschäftigt sich mit einer Determinante, welche als die Verallgemeinerung der in einer früheren Abhandlung (Sulle frazioni continue, Bologna Rend. 1889-90. 33-55; F. d. M. XXII. 1890. 226) behandelten Determinante Δ_n angesehen werden darf. Vi.

H. Padé. Sur la convergence des fractions continues simples. C. R. CXII. 988-990.

Es werden Kettenbrüche betrachtet, bei denen die Teilnenner Polynome in x sind, deren constantes Glied nicht Null ist, und bei denen die Teilzähler Monome in x sind, deren Coefficient und Exponent nicht Null ist. Bei der Convergenz-Untersuchung handelt es sich um die Bestimmung derjenigen Punkte der Ebene, in welchen die Näherungsnenner V_i von einem bestimmten Index i an zwischen zwei festen positiven Grenzen bleiben; wenn sie gegen eine stetige Function convergiren, ist der Fall besonders einfach. R. M.

D. F. Selivanow. Ueber die periodischen Kettenbrüche. Mosk. Math. Samml. XV. 635-644.

Eine Vereinfachung des Beweises der Theoreme, welche sich

auf die Zerlegung der Wurzel einer Gleichung zweiten Grades in einen Kettenbruch beziehen. Wi.

E. C. Valentiner. Om Kädebröksudviklinger for Rödder i en Ligning af anden Grad med rationale Coefficienter. Nyt Tidss. for Math. II A. 17-18.

Beweis für den Satz, dass, wenn die Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades mit rationalen Coefficienten in einen Kettenbruch entwickelt werden, der Kettenbruch dann periodisch wird.

V.

A. Hurwitz. Ueber die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. Math. Ann. XXXIX. 279-284.

Diese Note giebt zu der bisherigen Theorie der Annäherung einer beliebigen Irrationalzahl α mittels einer unbegrenzten Reihe von rationalen Brüchen $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots$ eine wesentliche Ergänzung, indem sie zeigt, dass die Wahl dieser rationalen Brüche stets so getroffen werden kann, dass für alle n der absolute Wert

$$\left|\alpha - \frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}y_n^2}$$

ausfällt. Zum Beweise wird α in einen gewöhnlichen Kettenbruch entwickelt; es sei etwa, indem μ_n die grösste in α_{n-1} enthaltene ganze Zahl bezeichnet:

$$\alpha = \mu_1 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \mu_2 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1} = \mu_n + \frac{1}{\alpha_n}, \quad \ldots.$$

Ist $\frac{p_n}{q_n} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ der n^{te} Näherungsbruch, so wird bekanntlich

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\pm 1}{r_n q_n^2},$$

wo

$$r_n = \alpha_n + \frac{q_{n-1}}{q_n} = (\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \ldots) + (0, \mu_n, \mu_{n-1}, \ldots, \mu_2)$$

gesetzt ist. Es kommt nun darauf an, zu zeigen, dass für unendlich viele n die Ungleichung $r_n > \sqrt{5}$ stattfindet. Hierzu sind 3 Fälle zu unterscheiden, je nachdem unter den Zahlen μ_2, μ_3, μ_4, ... unendlich viele vorkommen, welche grösser als 2 sind, oder in jener Reihe von einer gewissen Stelle ab nur noch die Zahlen 1 und 2 auftreten, oder endlich nur noch die Zahl 1 vorkommt. Im ersten und dritten Falle liegt die anzuwendende Schlussweise auf der Hand; im zweiten Falle ersetze man den r_n darstellenden unendlichen Kettenbruch durch einen anderen, in welchem die Teilnenner ungerader Ordnung gleich 2, die Teilnenner gerader Ordnung gleich 1 sind, und beachte, dass der Wert dieses letzten Kettenbruches kleiner ist als der des ursprünglichen. Auch zeigt der Verfasser, dass in dem Ausspruch seines Satzes $\sqrt{5}$ nicht durch eine grössere Zahl ersetzt werden kann. Den Schluss bilden Bemerkungen darüber, in wie weit eine solche Ersetzung dennoch möglich ist, sobald man aus dem Systeme der darzustellenden irrationalen Zahlen α gewisse Klassen ausschliesst. Ht.

Th. Muir. Note on a theorem regarding a series of convergents to the roots of a number. Edinb. Proc. XIX. 15-19.

Bezieht sich auf einen Satz des Herrn Sang, nach welchem in der Gleichungsfolge:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{n}+1)^1 &= \sqrt{n}+1,\\
(\sqrt{n}+1)^2 &= 2\sqrt{n}+n+1,\\
(\sqrt{n}+1)^3 &= (n+3)\sqrt{n}+3n+1,\\
(\sqrt{n}+1)^4 &= (4n+4)\sqrt{n}+n^2+6n+1,\\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

das Verhältnis des rationalen Teiles zu dem Coefficienten von $\sqrt{n}$ in dem anderen Teile angenähert gleich $\sqrt{n}$ ist; d. h. die Reihe der nach $\sqrt{n}$ zuneigenden Brüche ist:

$$\frac{1}{1},\quad \frac{n+1}{2},\quad \frac{3n+1}{n+3},\quad \frac{n^2+6n+1}{4n+4},\quad \dots.$$

Es wird gezeigt, dass dies die Folge der Näherungswerte des Kettenbruches

$$1+\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}+\cdots,$$

der gleich $\sqrt{n}$ ist nach der bekannten Formel

$$\sqrt{n} = m+\frac{n-m^2}{2m}+\frac{n-m^2}{2m}+\cdots,$$

von welcher ein besonderer Fall, nämlich $n=18$, $m=4$ schon aus dem Jahre 1613 her datirt. Der Schluss des Aufsatzes betrifft die höhere Form $(n^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}+1)^r$. Cly. (Lp.)

J. Dolbnia. Sur le développement de $\sqrt{R}$ en fraction continue. Nouv. Ann. (3) X. 134-140.

Der Differentialausdruck $\varrho\, dx:\sqrt{R}$, wo ϱ und R ganze Functionen von x sind, kann nach Abel „Sur l'intégration de la formule différentielle etc." nur dann durch Logarithmen integrirt werden, falls die Kettenbruchentwickelung von $\sqrt{R}$ periodisch ist; die algebraischen Bedingungen und die Form dieser Entwickelung werden in vorliegender Note einfacher und directer als bei Abel hergeleitet. R. M.

S. Pincherle. Un teorema sulle frazioni continue. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII$_1$. 604-607.

Ein unendlicher Kettenbruch mit den Teilbrüchen $\frac{a(n)c(n-1)}{b(n)}$, wo a, b, c ganze rationale Functionen von demselben Grade in Bezug auf die Ordnungszahl sind, wird als Quotient zweier bestimmten Integrale dargestellt. R. M.

S. Pincherle. Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche. Annali di Mat. (2) XIX. 75-95.

Die Stellung dieser Abhandlung zu den früheren Arbeiten des Verf. ist schon am Schlusse eines vorjährigen Referates (F.

d. M. XXII. 1890. 225) gekennzeichnet worden. Es wird für den speciellen Fall zweier gegebenen Functionen σ_1, σ_2 der fragliche kettenbruch-ähnliche Algorithmus im einzelnen studirt; er liefert uns nicht nur die Herstellung einer linearen Relation $A+B\sigma_1+C\sigma_2=0$ mit der höchsten Annäherung, welche sich bei gegebenem Grade der Coefficienten-Functionen A, B, C überhaupt erzielen lässt; wir gelangen dabei auch zur Lösung des Problems: Zwei gegebene Functionen als rationale Functionen desselben Nenners mit der höchsten Annäherung darzustellen, die mit dem gegebenen Grade des Nenners verträglich ist.

Indem der Verf. alsdann die Ausgangs-Functionen σ_1, σ_2 als Potenzreihen von x durch zwei bestimmte Integrale definirt denkt:

$$\sigma_1 = \int_l \frac{\varphi(y)dy}{x-y}, \quad \sigma_2 = \int_{l_1} \frac{\varphi_1(y)dy}{x-y},$$

gelangt er zur Erledigung zweier interessanten Probleme der mechanischen Quadratur:

1) Wenn zwei Integrale gegeben sind:

$$\int_l \varphi(y)\psi(y)dy \quad \text{und} \quad \int_{l_1} \varphi_1(y)\psi(y)dy,$$

alsdann n Punkte $a_1, a_2, \dots, a_n$ und n Paare von Coefficienten c und c' zu bestimmen, sodass die beiden Integrale gleichzeitig mit der grösstmöglichen Annäherung durch

$$\Sigma c_\nu \psi(a_\nu) \quad \text{und} \quad \Sigma c'_\nu \psi(a_\nu)$$

dargestellt werden können.

2) Die Summe zweier Integrale

$$\int_l \varphi(y)\psi(y)dy + \int_{l_1} \varphi_1(y)\psi_1(y)dy$$

angenähert durch eine Summe

$$c+c'+\Sigma(c_\nu\psi(a_\nu)+c'_\nu\psi_1(\beta_\nu))$$

darzustellen. R. M.

E. Bortolotti. Sui sistemi ricorrenti del 3⁰ ordine ed in particolare sui sistemi periodici. Palermo Rend. V. 129-151.

Den Ausgangspunkt für die vorliegenden Untersuchungen bilden die Arbeiten des Herrn Pincherle (vergl. das vorangehende

Referat); der Verf. bietet uns zunächst eine formale Behandlung des Specialfalles $p = 3$ und bedient sich, wie schon andere vor ihm (Jacobi, J. für Math. LXIX; Fürstenau, Pr. Wiesbaden 1874), der Determinanten-Methode. Er bildet eine Matrize von n Zeilen und $n+3$ Colonnen, welche in 4 schräg absteigenden Reihen die Elemente 1, a_i, b_i, -1 hat, sonst aber nur Nullen. Man betrachte alle Determinanten n^{ter} Ordnung, welche durch Weglassen dreier Colonnen entstehen; sie sind jedesmal $= \pm 1$, falls nicht zu den weggelassenen Colonnen gleichzeitig die erste und die letzte gehören. So reduciren sich alle Determinanten auf 3 verschiedene Typen, je nachdem unterdrückt werden: 1) die erste und die beiden letzten Colonnen (Typus α, die Diagonalreihe enthält die Elemente a). 2) die beiden ersten und die letzte Colonne (Typus β, die Diagonalreihe enthält die Elemente b). 3) die erste, die letzte und irgend eine Zwischen-Colonne (Typus γ, die Diagonalreihe hat anfangs Elemente a, nachher Elemente b). Betrachtet man n als variabel, so besteht zwischen je 4 auf einander folgenden α eine lineare Relation; ebenso bei β; jedes γ kann bilinear durch zweimal zwei Determinanten niederer Ordnung vom Typus α und β ausgedrückt werden.

Im besonderen setze man nun voraus, dass die unendlichen Reihen der Elemente a, b sich aus Perioden von je p Elementen zusammensetzen. Unter den Functionen σ des recurrenten Systems $\sigma_i + a_i\sigma_{i+1} + b_i\sigma_{i+2} = \sigma_{i+3}$ besteht alsdann eine Gleichung mit constanten Coefficienten: $\sigma_{a+3p} = \sigma_a + \delta\sigma_{a+p} + \delta_1\sigma_{a+2p}$; und umgekehrt zieht diese Relation die Periodicität der a und b nach sich; die Functionen σ hängen rational ab von den Wurzeln der kubischen Gleichung: $z^3 = 1 + \delta z + \delta_1 z^2$ und enthalten im allgemeinen $3p$ willkürliche Constanten. R. M.

L. Gegenbauer. Zur Theorie der Näherungsbrüche.
Wien. Ber. C. 635-703.

Diese umfangreiche Arbeit enthält eine so grosse Zahl einzelner, durch ihre Länge wenig übersichtlicher Formeln und Lehrsätze, dass Ref. es für das Beste hält, die Einleitung des Verf.

hierherzusetzen: „Ich werde eine Reihe von Relationen und Theoremen aus der Theorie der Näherungsnenner von Kettenbruchentwickelungen ableiten und hierbei gelegentlich einige aus einer der auftretenden Formeln sich ergebende Beziehungen aus dem Gebiete der Congruenzen mit einer Unbekannten in Bezug auf einen Primzahlmodul angeben. Sodann werde ich mit Hülfe der aufgestellten Gleichungen mehrere Sätze über Interpolationsformeln und mechanische Quadraturen erschliessen und im Anschlusse an dieselben einige Bemerkungen über die wichtige und interessante Methode machen, welche Herr F. Neumann zur interpolatorischen Darstellung einer Function des Ortes an der Erdoberfläche ermittelt hat, deren praktische Verwendbarkeit durch die von Herrn H. Seeliger (F. d. M. XXII. 1890. 395) veröffentlichten vorzüglichen Hülfstafeln wesentlich erhöht wurde. Zum Schlusse endlich werden mehrere neue Sätze aus der Theorie der Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwickelung der hypergeometrischen Reihe $x^{-1}F(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2})$ nebst einigen arithmetischen Identitäten bewiesen.“ R. M.

T.-J. Stieltjes. Note sur quelques fractions continues. Quart. J. XXV. 198-200.

Anknüpfend an die Hermite'sche Relation:

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} = \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\varepsilon)}} \quad (0<\varepsilon<\tfrac{1}{4}),$$

entwickelt der Verf. für ε/n den Kettenbruch:

$$\frac{2}{8n-1} \dot{+} \frac{1.3}{8n} \dot{+} \frac{3.5}{8n} \dot{+} \frac{5.7}{8n} \dot{+} \cdots.$$

Der Beweis stützt sich auf die früher gegebenen Entwickelungen bestimmter Integrale (F. d. M. XXII. 1890. 297). R. M.

E. Cahen. Note sur un développement des quantités numériques, qui présente quelque analogie avec celui en fractions continues. Nouv. Ann. (3) X. 508-514.

Man setze der Reihe nach

$$x = a_1 + \frac{1}{x_0}, \quad \text{wo } a_1 < x < a_1 + 1,$$

$$\frac{1}{x_0} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{x_1}, \quad \text{wo } u_0 < x_0 < u_0 + 1,$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{x_2}, \quad \text{wo } u_1 < x_1 < u_1 + 1,$$

u. s. f., so bekommt man eine bei rationalem x endliche, sonst unendliche Reihe

$$x = a_1 + \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \cdots$$

mit der charakteristischen Bedingung

$$\frac{1}{u_n(u_n+1)} > \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n+2}} + \cdots.$$

Man bekommt eine ähnliche Reihe mit lauter positiven Gliedern, wenn man statt $\frac{1}{u}$ jedesmal $\frac{1}{u+1}$ setzt.

R. M.

Vierter Abschnitt.

Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

C. A. Laisant. Sur les permutations limitées. C. R. CXII. 1047-1049.

C. A. Laisant. Sur deux problèmes des permutations. S. M. F. Bull. XIX. 105-109.

In der ersten Note wird die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen von n Elementen $a, b, c, \dots, l$ bestimmt, die so beschaffen sind, dass jede Stelle nur von einer gewissen Anzahl dieser Elemente eingenommen werden darf. Wenn man mit $a_k, b_k, c_k, \dots$ diejenigen der n Elemente bezeichnet, die allein die k^{te} Stelle einnehmen können, und wenn das Product

$$(a_1 + b_1 + \cdots)(a_2 + b_2 + \cdots) \cdots (a_n + b_n + \cdots) = F(a, b, c, \dots, l)$$

gesetzt wird, so ist die gesuchte Anzahl

$$X = \frac{d^n F(a, b, c, \dots, l)}{da\, db\, dc \dots dl}.$$

Nebenbei ergiebt sich hieraus, dass, wenn in einer Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{vmatrix}$$

eine gewisse Anzahl von Elementen verschwindet, die Anzahl der in ihrer Entwickelung verschwundenen Glieder

$$n! - \frac{d^n F(a, b, c, \ldots, l)}{da\,db\,dc \ldots dl}$$

sein wird, wo F das oben definirte Product nach Unterdrückung der Indices bedeutet.

In der zweiten Abhandlung wird der sehr allgemeine Ausdruck für X, der sich zur directen Anwendung wegen der ausgedehnten Rechnungen nicht eignet, dazu benutzt, zwei auf anderen Wegen erhaltene Resultate zu prüfen, die Herr Laisant für die beiden folgenden Aufgaben in der Form von Recursionsformeln entwickelt hat.

Die beiden Aufgaben lauten:

Auf wie viel Weisen kann man auf einem Schachbrett von n^2 Feldern n Türme, die sich paarweise gegenseitig nicht nehmen können, aufstellen, unter der Bedingung, dass

1. die Felder 1, 2 der ersten Columne, 2, 3 der zweiten, ..., n—1, n der vorletzten und n, 1 der letzten Columne unbesetzt bleiben;

2. die Felder der beiden Diagonalen nicht besetzt werden dürfen? Bö.

D. André. Démonstration nouvelle d'un théorème sur les permutations. Soc. Philom. Bull. (8) III. 153-155.

Einfacher Beweis des Satzes:

Unter den Permutationen von n verschiedenen Zahlen befinden sich, wenn $n \geqq 4$ ist, ebensoviele Permutationen mit einer geraden, wie mit einer ungeraden Anzahl von Folgen.

Unter einer Folge wird hierbei die Reihe der Zahlen von einem Maximum zum nächsten Minimum und umgekehrt innerhalb der einzelnen Permutationen verstanden. Den ersten Beweis dieses Satzes hatte Herr André in den C. R. von 1883 geliefert (F. d. M. XV. 159). Bö.

T. B. Sprague. On the transformation and classification of permutations. Edinb. M. S. Proc. IX. 59-79.

Die in dieser Abhandlung zur Umwandlung der Permutationen benutzte Methode wird allseitig erklärt und entwickelt in einer Arbeit: „A new algebra, by means of which permutations can be transformed in a variety of ways and their properties investigated", erschienen in Edinb. R. S. Trans. XXXVII, und kann besser im Zusammenhange mit dem Bericht über diese Arbeit Besprechung finden. Gbs. (Lp.)

Th. Parmentier. Le problème du cavalier des échecs. Assoc. Franç. Marseille XX_1. 158. Lp.

Ed. Lucas. Récréations mathématiques. Tome I. 2e éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

R. Fujisawa. An elementary demonstration of a theorem in probability. Tokio Math. Ges. IV. 351-352.

Wenn sich ein Ereignis, das sowohl A als B sein kann, $M=(p+q)$-mal wiederholt hat, derart, dass A p-mal vorkam und B q-mal, wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass in $N=r+s$ zukünftigen Ereignissen A r-mal und B s-mal vorkommt? R. M.

Aug. Pánek. Ueber ein Problem Laurent's aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Casop. XX. 94. (Böhmisch.)

Enthält eine elegante Lösung der in Laurent's „Traité du calcul des probabilités" S. 67 enthaltenen Aufgabe, deren Resultat schliesslich

$$w=\tfrac{11}{36}$$

liefert. Std.

AUG. PÁNEK. Ueber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Casop. XX. 105. (Böhmisch.)

Betrifft die Mischung von Wasser und Spiritus, wovon im Gefässe *A* enthalten sind *a* und *p* Liter, im Gefässe *B* hingegen *b* und *q* Liter, wenn aus beiden in ein drittes Gefäss ungemessene Quantitäten aufs Geratewohl geschüttet werden.

Std.

P. TSCHEBYSCHEFF. Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités. Acta Math. XIV. 305-315.

Eine von Herrn J. Lyon angefertigte Uebersetzung der bereits 1887 in den Abhandlungen der Petersburger Akademie in russischer Sprache erschienenen Originalabhandlung Tschebyscheff's (s. F. d. M. XIX. 1887. 208-209). Bö.

C. H. KUMMEL. Remarks on some recent discussions of target-shooting. Washington Bull. XI. 582.

M. H. DOOLITTLE. Communication on probabilities. Washington Bull. XI. 583.

M. H. DOOLITTLE. A problem in probabilities. Washington Bull. XI. 602.

Ueber die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nach der Aussage zweier Zeugen. Lp.

M. H. DOOLITTLE. On symbols of non-existence. Washinghton Bull. XI. 603.

Beschäftigt sich mit der Bedeutung der Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Lp.

M. H. DOOLITTLE. On means and averages. Washington Bull. XI. 596-597.

E. Cesàro. Considerazioni sul concetto di probabilità. Periodico di Mat. VI. 1-13, 49-62.

G. Vivanti. Sulla teoria delle probabilità. Lettera aperta al prof. E. Cesàro. Rivista di Mat. I. 69-72.

E. Cesàro. Sulla teoria delle probabilità. Breve risposta al Sig. G. Vivanti. Periodico di Mat. VI. 116-119.

E. Cesàro. Sui canoni del calcolo degli addensamenti e su alcune loro applicazioni. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 101-112.

Der gewöhnliche Wahrscheinlichkeitsbegriff wird unbestimmt, sobald man zu Problemen übergeht, bei welchen die Anzahl der möglichen Fälle unendlich ist; diese Unbestimmtheit kann aber dadurch aufgehoben werden, dass man in jedem besonderen Falle ein neues Element einführt, welches den dem Worte Wahrscheinlichkeit beizulegenden Sinn feststellt. Ob dieses Element aus der Natur des zu behandelnden Problemes notwendig entspringt, oder ob es subjectiv, willkürlich ist, darüber sind die Herren Cesàro und Vivanti uneinig. Herr Cesàro bezeichnet das streitige Element als Dichtigkeit und lehrt, wie man aus der Dichtigkeit der unabhängigen Veränderlichen diejenige einer gegebenen Function derselben ableiten kann. Vi.

F. J. van den Berg. Over de kans dat, bij willekeurige verdeeling van een gegeven rechte lijn, de segmenten tusschen gegeven grenzen liggen. Nieuw Arch. XVII. 42-62.

Die Aufgabe lautet: die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass bei willkürlicher Teilung einer gegebenen Geraden die erhaltenen Stücke zwischen gegebenen Grenzen liegen. Einfachere Lösung der Aufgabe als die von Hrn. Jordan (S. M. F. Bull. I 1872-73) und von Hrn. Laquière (ebenda VIII, F. d. M. XII. 1880. 171) mitgeteilte. Zugleich Lösung mehrerer ähnlichen Aufgaben. Wenn die Gerade in m beliebige Segmente geteilt wird, so werden dieselben nach ihrer Grösse in einige Gruppen vereinigt, deren gegebene Grenzen einander ausschliessen. Mit Hülfe eines all-

gemeinen Princips wird eine Formel aufgestellt, welche es ermöglicht, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass von den m Segmenten eine Anzahl p_1, deren Anordnung in der Gesamtreihe zuvor festgestellt ist, zur ersten oben erwähnten Gruppe gehört, in gleicher Weise eine Anzahl p_2 zur zweiten u. s. w., während von den $m-(p_1+p_2+\cdots)$ übrigen Segmenten unbestimmt gelassen wird, welcher Gruppe dieselben, einzeln genommen, angehören. Es fällt schwer, diese formelreiche Abhandlung im Auszug weiter mitzuteilen.

Als besondere Anwendungen werden die Fälle erörtert, bei denen 1. von den m Stücken p zuvor gewählte kleiner als eine Grösse a und r ebenso zuvor gewählte grösser als a sein müssen, während die übrigen $m-p-r$ Stücke beliebige Grössen haben können; 2. p zuvor gewählte ausserhalb der Grenzen a und b, r Stücke dagegen innerhalb dieser Grenzen liegen, während die übrigen wieder willkürlich bleiben; 3. p zuvor gewählte grösser als b sind, r Stücke aber innerhalb der Grenzen a und b $(a < b)$ liegen, und andere ähnliche Fälle.

Mo.

F. J. van den Berg. Over de kans dat, bij willekeurige verdeeling van een gegeven rechte lijn, uit de segmenten gesloten veelhoeken kunnen worden gevormd. Nieuw Archief XVIII. 63-118.

Zweck ist die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass bei beliebiger Teilung einer gegebenen Geraden in m Stücke aus jeder Gruppe von k Segmenten ein geschlossenes k-Eck gebildet werden kann. Hierzu ist erforderlich, dass die Summe von $k-1$ beliebig gewählten Stücken grösser ist als jedes der übrigen $m-k+1$ Stücke. Allgemeiner wird nun aber die Wahrscheinlichkeit bestimmt, dass die Summe der $k-1$ kleinsten Segmente grösser ist als jedes von einer Anzahl p der übrigen Segmente und kleiner als jedes der sodann noch übrig bleibenden Stücke. In zweifacher Weise wird hierfür eine Formel hergeleitet. Für eine weitere Ausführung muss auf das Original verwiesen werden.

Mo.

G. B. M. Zerr. Solutions of questions in the theory of probability and averages. Ed. Times LV. 137-192. [New York M. S. Bull. I. 123-124.]

Als Anhang zu dem LV. Bande der Ed. Times liefert Hr. Zerr die Lösungen von einer grossen Anzahl, meistens von ihm selbst herrührender Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte, wozu häufig die Auswertung complicirter vielfacher Integrale nötig ist. Der Liebhaber solcher Aufgaben findet also hier einen bedeutenden Zuwachs passender Beispiele, die jedoch einzeln nicht aufgezählt werden können. Ebensowenig war es möglich, die sonstigen, in den Ed. Times verstreuten bezüglichen Probleme, wie wohl in den früheren Jahrgängen des Jahrbuchs geschehen ist, einzeln hier anzuführen. Lp.

Em. Czuber. Theorie der Beobachtungsfehler. Mit sieben in den Text gedruckten Figuren. Leipzig. Teubner. XII u. 418 S. 8°.

„Zweck des Buches ist es, ein möglichst umfassendes und zusammenhängendes Bild der wissenschaftlichen Grundlagen der Fehlertheorie und ihrer Entwickelung zu geben.“ Deshalb sind auch die mannigfaltigen Anwendungen und die Vorschriften für die rein praktische Ausführung der Rechnungen nicht aufgenommen. Trotzdem dass eine ausgedehnte Litteratur über diesen Gegenstand bereits vorhanden ist, hat das Buch in dieser Form dennoch eine Berechtigung, weil es ähnliche Schriften gleichen Umfanges noch nicht giebt. Ausserdem erscheint es sehr geeignet, „diejenigen in den Gegenstand einzuführen, welche ihm der metaphysischen oder rein mathematischen Seite wegen ihre Aufmerksamkeit zuwenden, und dem Bedürfnis derjenigen entgegenzukommen, welche, mit praktischen Anwendungen der Fehlertheorie vielfach beschäftigt, sich mit ihren wissenschaftlichen Grundlagen näher bekannt machen wollen, als dieses an der Hand eines praktische Ziele verfolgenden Werkes möglich ist.“

Aus dem Zwecke des Buches folgt, dass es im allgemeinen eine Geschichte der Theorie der Beobachtungsfehler giebt und sich deshalb hauptsächlich referirend verhält; jedoch ist innerhalb

jedes der drei Hauptteile, in die es zerfällt, das Material der fortschreitenden Entwickelung der Theorie gemäss angeordnet, so dass das Werk zugleich den Charakter eines Lehrbuches erhält. Meistens ist auch eine sachgemässe Kritik an den vorgetragenen Lehren geübt, wenn sie auch an einzelnen Stellen, wo sie sehr nötig gewesen wäre, unterblieben ist (vergl. z. B. S. 152-154 und 312-317). Die benutzte Litteratur ist sehr umfangreich; besonders dankenswert ist es, dass die in Deutschland weniger bekannten Arbeiten englischer, amerikanischer und holländischer Autoren ausgiebig herangezogen sind. Vermisst werden vom Referenten unter anderem Ausführungen über die Verteilung der Vorzeichen der nach einer Ausgleichung übrig bleibenden Fehler (Abbe, Seeliger), über die Ausgleichung abgerundeter Beobachtungen (Lehmann-Filhés, Thiele), sowie die Berücksichtigung neuerer italienischer Arbeiten (Pizzetti).

Der erste Teil (S. 1-231) enthält die Theorie der linearen Beobachtungsfehler. In ihm kommen besonders die metaphysischen Betrachtungen zum Ausdruck. Er behandelt in 11 Paragraphen die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers, allgemeine Principien über die zweckmässigste Wahl der Werte der Unbekannten, das arithmetische Mittel, das Fehlergesetz auf Grund der Hypothese des arithmetischen Mittels, das Fehlergesetz auf Grund der Hypothese der Elementarfehler, das Fehlergesetz auf Grund verschiedener Annahmen, die Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe auf Grund der wahren Fehler und auf Grund der scheinbaren Fehler, die Vergleichung des Fehlergesetzes mit der Erfahrung, den kleinsten und grössten Fehler einer Beobachtung und die Ausscheidung widersprechender Beobachtungen.

Für die Methode der kleinsten Quadrate, die der zweite Teil (S. 232-342) behandelt, werden ausführlich die verschiedenen Begründungen dieser Methode, nämlich die von Legendre, Adrain, Laplace, Ivory, besonders aber die beiden von Gauss, auseinandergesetzt, und zugleich die Grundlagen für die Ausgleichung vermittelnder und bedingter Beobachtungen und der darauf beruhenden Genauigkeitsuntersuchungen gegeben. Insbesondere will ich

den § 8 dieses Abschnittes hervorheben, der die Darstellung der Unbekannten, ihrer Gewichte und mittleren Fehler mittels Determinanten, zumeist auf Grund der Arbeiten der Herren Glaisher und van Geer, enthält.

Der dritte Teil (S. 343-410) hat den jüngsten Zweig der Fehlertheorie, die Fehler in der Ebene und im Raume, zum Gegenstande und bespricht das Gesetz der Fehler in der Ebene und im Raume sowie die Genauigkeit der Bestimmung eines Punktes in der Ebene und im Raume, hauptsächlich im Anschluss an die Arbeiten von Bravais und Schols. Die Fehlerellipsen und die Fehlerellipsoide werden hierbei eingehend untersucht.

Den Schluss bilden zwei Tafeln für

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt \quad \text{und für} \quad \Theta\left(\varrho\frac{t}{r}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho\frac{t}{r}} e^{-t^2}dt,$$

letztere nach $\frac{t}{r}$ als Argument geordnet.

Bö.

Em. Czuber. Zur Kritik einer Gauss'schen Formel.

Monatsh. f. Math. II. 459-464.

In seiner „Theorie der Beobachtungsfehler" S. 312-317 (vergl. das obige Referat) hatte der Verf. im Anschluss an Hrn. Bertrand Bedenken gegen die von Gauss zur Berechnung des mittleren Fehlers vermittelnder und bedingter Beobachtungen gegebene Formel erhoben, indem er behauptete, dass sie nicht den günstigsten, d. h. den mit dem kleinsten mittleren Fehler behafteten Ausdruck für den mittleren Fehler m zu bilden brauche. Dieses wurde überdies an einem ausführlich behandelten Beispiel nachgewiesen. Die Richtigkeit dieser Entwickelung vorausgesetzt, würde sie einen gewichtigen Einwand gegen die Gauss'sche Theorie darbieten. Der Verf. hatte jedoch, ebenso wie Hr. Bertrand, den Fehler gemacht, dass er die Unsicherheit der Gauss'schen Formel für m nach dem absoluten, zufälligen Betrag ihres mittleren Fehlerquadrats, indem er es als Function der Fehler oder der Widersprüche darstellte, anstatt im Verhältnis zu m^2 selbst beurteilte. In der vorliegenden Mitteilung wird dieser Irrtum be-

richtigt und zugleich, wenn auch zunächst nur für den Fall zweier Bedingungsgleichungen, gezeigt, dass die Gauss'sche Formel in der That die günstigste Bestimmung des mittleren Fehlers liefert. Von andern Gesichtspunkten ausgehend, hatte übrigens unter Voraussetzung des Gauss'schen Fehlergesetzes Hr. Pizzetti schon früher für vermittelnde Beobachtungen nachgewiesen, dass von allen Formen, die man dem gesuchten mittleren Fehler a posteriori geben kann, die von Gauss aufgestellte die wahrscheinlichste ist (s. F. d. M. XXI. 1889. 222).

Bö.

Fr. Müller. Zur Fehlertheorie. Ein Versuch zur strengeren Begründung derselben. Monatsh. f. Math. II. 61-78.

Nach des Verfassers Ansicht ermangelt die Fehlertheorie noch einer unanfechtbaren Grundlage, während die Ausgleichungsrechnung in der Methode der kleinsten Quadrate eine solche besitze. Es wird gezeigt, dass die Ableitung des Fehlergesetzes, wie sie von Gauss auf Grund der Hypothese des arithmetischen Mittels gegeben ist, fehlerhaft sei und auf Widersprüche führe, und dass auch die Entwickelungen von Laplace und Hagen auf Grund der Annahme einer sehr grossen Anzahl von Fehlerelementen mangelhaft sei, weil sie Fehlerelemente mit dem Werte 0 nicht berücksichtigen. Nebenbei bemerkt, sind diese Einwände, insbesondere der gegen den Gauss'schen Beweis erhobene, natürlich hinfällig und beruhen auf Missverständnissen.

Zu einer „strengen“ Ableitung des Fehlergesetzes macht der Verf. folgende Annahmen:

Ist n der Maximalwert eines Fehlers, so sei

$$n = \nu d\Delta,$$

wo ν eine sehr grosse Zahl und $d\Delta$ der absolute Wert eines unendlich kleinen Fehleratoms ist. Alle ν Fehleratome sind nun fortwährend in unregelmässig und beliebig geschwinder schwingender Bewegung, wobei indess jedes einzelne nur die vier Werte $+d\Delta$, $+0$, -0, $-d\Delta$ einzunehmen befugt sein soll. Die Grösse eines Fehlers Δ ist die algebraische Summe der Fehler-

atome im Momente der Beobachtung. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $\varDelta$ ist dann das Verhältnis aller der Fälle, die die Summe $\varDelta$ liefern, zu der Anzahl 4^{ν} aller möglichen Fälle.

Unter diesen Voraussetzungen und nach mancherlei Transformationen und Vernachlässigungen findet der Verf. schliesslich für „die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens eines Fehlers gleich $\varDelta$ in aller Strenge“ die Formel:

$$\Omega = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varDelta^2 - \frac{3}{20}h^2\varDelta^2\left(\frac{\varDelta}{n}\right)^2 - \frac{2}{35}h^2\varDelta^2\left(\frac{\varDelta}{n}\right)^4 - \frac{5}{168}h^2\varDelta^2\left(\frac{\varDelta}{n}\right)^6 - \cdots} d\varDelta,$$

wo C durch die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega = 1$$

bestimmt ist. Für die Constante C wird noch der angenäherte Wert abgeleitet:

$$C = h\sqrt{1+\varrho\theta},$$
$$\theta = 1 + \tfrac{3}{20} + \tfrac{2}{35} + \tfrac{5}{168} + \cdots,$$
$$0 < \varrho < 1.$$

Ref. möchte trotz des selbstbewussten Auftretens des Verf. bezweifeln, dass nunmehr wirklich die „unanfechtbare Grundlage“ der Fehlertheorie geschaffen sei. Bö.

R. Lehmann-Filhés. Ueber wahrscheinlichste Fehlerverteilungen. Astr. Nachr. CXXVII. No. 3043. 305-316.

Bei Bestimmung der theoretisch zu erwartenden Fehlerverteilung unter Voraussetzung eines bestimmten Fehlergesetzes wird immer das folgende unzulängliche, allerdings aber einfache Verfahren in Anwendung gebracht: Man multiplicirt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler innerhalb gewisser Grenzen fällt, mit der Gesamtzahl aller Fehler und nimmt das Product als die wahrscheinlichste Anzahl der zwischen jene Grenzen fallenden Fehler. Da jedoch dieses Product im allgemeinen keine ganze Zahl ist, so nimmt man dafür die nächste ganze Zahl. Hierdurch kann es kommen, dass die Summe der für alle Intervalle berechneten Zahlen von der Gesamtzahl der wirklich vorhandenen

Fehler nicht unbedeutend abweicht, abgesehen davon, dass man nicht weiss, ob in der That die wahrscheinlichste Fehlerverteilung erhalten wird.

Der Verf. sucht diese Uebelstände zu umgehen, indem er die wahrscheinlichste Verteilung von n gleichartigen Elementen in k Abteilungen oder Klassen $A_1, A_2, \ldots, A_k$ bestimmt, wenn die Wahrscheinlichkeit w_i, dass ein vereinzelt gedachtes Element in die Klasse A_i fällt, bekannt ist. Zu dem Ende muss der Ausdruck

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} w_1^{n_1} w_2^{n_2} \ldots w_k^{n_k}$$

ein Maximum werden, wenn gleichzeitig

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_k = 1$$

und

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

ist, wobei $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ganze Zahlen sein müssen. Die vom Verf. gegebene, ziemlich umfangreiche Rechnungen erforderrnde Lösung dieser Aufgabe kann unter Umständen auf mehrere Verteilungen von gleicher maximaler Wahrscheinlichkeit führen.

Diese Entwickelung ist offenbar auf die Fehlertheorie ohne weiteres anwendbar, wenn man statt der Elemente Fehler und statt der Klassen die Intervalle nimmt, innerhalb welcher die Anzahlen der Fehler gesucht werden. Schliesslich wird noch die Wahrscheinlichkeit $W_{(m)}$, dass in die Klasse A_i m Elemente fallen, bestimmt und hieran anschliessend der mittlere zu befürchtende Fehler und das Gewicht der für A_i geltenden Klassenzahl n_i definirt und berechnet, wobei auf etwaige mehrfache wahrscheinlichste Fehlerverteilungen Rücksicht genommen wird.

Als Beispiel werden die bekannten 300 Bradley'schen Declinationsbestimmungen, die Bessel in den Fundamenta astronomiae mitteilt, ausführlich behandelt. Bô.

F. Crotti. Sulla perequazione di una serie di osservazioni. Il Politecnico. XXXIX. 401-426.

Kritische Darlegung einiger neueren, die Ausgleichung der Beobachtungsfehler betreffenden Untersuchungen. Vi.

Mansfield Merriman. A problem in least squares. New York M. S. Bull. I. 39-42.

Lösung der Aufgabe: „Nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte von a und b in der Formel $y = ax + b$ zu bestimmen, wenn die beobachteten Werte von x und y mit Fehlern behaftet sind". Lp.

K. J. Bobek. Lehrbuch der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. J. Maier. VI + 176 S. 8°.

K. J. Bobek. Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. J. Maier. VIII + 296 S. 8°.

Bearbeitungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Ausgleichungsrechnung nach dem sogenannten System Kleyer, über welches man F. d. M. XVIII. 1886. 487, XX. 1888. 1046, XXII. 1890. 976 vergleiche. Lp.

J. Domke. Beiträge zur theoretischen und rechnerischen Behandlung der Ausgleichung periodischer Schraubenfehler. Diss. Marburg. Berlin. J. Springer. III + 46 S. 8°.

G. Eneström. Härledning af en formel inom den matematiska statistiken. Stockh. Öfv. XLVIII. 185-193.

In der Bevölkerungsstatistik ist bei der Sterblichkeitsmessung folgendes Problem zu lösen:

Man kennt sowohl die Anzahl der Personen, welche am Anfange eines gewissen Kalenderjahres, als auch die Anzahl der Personen, welche am Ende desselben Kalenderjahres x- bis $(x+1)$-jährig lebten; man kennt dazu die Anzahl der Personen, welche im Laufe des Kalenderjahres x- bis $(x+1)$-jährig gestorben sind. Wie gross ist für eine x-jährige Person die Wahrscheinlichkeit, im Laufe des begonnenen Altersjahres zu sterben?

Führt man die folgenden Bezeichnungen ein:

$D_x \equiv$ die Anzahl der Personen, welche im gegebenen Kalenderjahre x- bis $(x+1)$-jährig gestorben sind;

$L_x \equiv$ die Anzahl der Personen, welche am Ende des Kalenderjahres x- bis $(x+1)$-jährig lebten;

$L'_x \equiv$ die Anzahl der Personen, welche am Anfange des Kalenderjahres x- bis $(x+1)$-jährig lebten;

$w_x \equiv$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit,

so hat man bekanntlich annäherungsweise die Relation:

$$w_x = \frac{D_x}{\frac{1}{2}(L_x + L'_x) + \frac{1}{2}D_x}.$$

Herr Eneström zeigt ohne Anwendung der Integralrechnung, dass diese Formel exact ist, wenn:

1) keine Bevölkerungswanderung (Auswanderung oder Einwanderung) vorkommt;

2) die Sterbefälle gleichmässig verteilt sind, sowohl über das $(x-1)^{te}$ als über das x^{te} Altersjahr;

3) die Geburten während jedes der zwei Kalenderjahre, in welchen die L_x und die L'_x Personen geboren wurden, gleichmässig über das ganze betreffende Jahr verteilt waren.

Nimmt man dagegen an, dass die Sterbefälle nicht gleichmässig über jedes Altersjahr verteilt sind, dass aber innerhalb des $(x-1)^{ten}$ sowohl als des x^{ten} Altersjahres die Wahrscheinlichkeit zu sterben in gleichen Zeitteilen constant sei, so ist die oben angegebene Formel nur annäherungsweise gültig.

E.

G. Eneström. Om måttet för dödligheten inom en bestämd åldersklass. Stockh. Öfv. XLVIII. 251-259.

Veranlasst durch eine Schrift von E. Roghé („Geschichte und Kritik der Sterblichkeitsmessung bei Versicherungsanstalten") untersucht der Verf. die von Knapp zuerst angegebene Formel:

$$\mu = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}[u_x + d_x]},$$

wo

$\mu \equiv$ das Mass der Sterblichkeit für eine x-jährige Person;
$d_x \equiv$ die Anzahl der beobachteten Sterbefälle im Alter x bis $(x+1)$;
$l_x \equiv$ die Anzahl der am Anfange der Beobachtung vorhandenen Personen im Alter x bis $(x+1)$;
$u_x \equiv$ die Anzahl der Personen im Alter x bis $(x+1)$, welche während des beobachteten Zeitraumes aus der Beobachtung ausgetreten sind.

Er zeigt, dass diese Formel nur dann richtig ist, wenn man μ als die Sterblichkeitsintensität (le taux de mortalité) für eine $(x+\frac{1}{2})$-jährige Person definirt. Bedeutet aber μ die Wahrscheinlichkeit, dass eine x-jährige Person in einem Jahre stirbt, so ist die alte Formel

$$\mu = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2} u_x}$$

richtig.

Zuletzt behandelt der Verf. den allgemeinen Fall, bei welchem die Beobachtung nur bis zu einer bestimmten Zeitgrenze möglich ist, und während dieses Zeitraumes nicht nur Personen austreten, sondern auch neue Personen eintreten. Er findet dann die Wahrscheinlichkeit für eine x-jährige Person, in einem Jahre zu sterben, gleich einem Bruche, der als Zähler die beobachteten Sterbefälle hat, und dessen Nenner die von den beobachteten Personen zwischen den Zeit- und Altersgrenzen verlebte Zeit angiebt, unter der Voraussetzung, dass keine Sterbefälle eingetroffen sind. Nimmt man dagegen mit Knapp nur die wirklich verlebte Zeit als Nenner, so wird das Resultat fehlerhaft.

E.

G. Eneström. Ett par formler för beräkning af mortaliteten inom pensionskassor eller andra slutna sällskap. Stockh. Öfv. XLVIII. 343-356.

Mit Hülfe der Integralrechnung beweist der Verf. den folgenden Satz:

Wenn man zwischen zwei bestimmten Zeitgrenzen die Mit-

glieder einer Gesellschaft beobachtet, welche x- bis $(x+1)$-jährig leben, und dadurch gefunden hat, dass während der Beobachtungszeit d_x Personen im Alter x bis $(x+1)$ gestorben, i_x Personen eingetreten und u_x Personen ausgetreten sind; wenn ferner b_x Personen am Anfange und k_x Personen am Ende der Beobachtung x- bis $(x+1)$-jährig vorhanden waren; wenn schliesslich c_x der beobachteten Personen in die Gesellschaft eingetreten sind, ohne das Alter x noch erfüllt zu haben: so hat man für die Wahrscheinlichkeit w_x, dass eine x-jährige Person in einem Jahre stirbt, die Formel

$$w_x = \frac{d_x}{c_x + \frac{1}{2}i_x - \frac{1}{2}[u_x + k_x - b_x]}.$$

Diese Formel gilt demnach nicht für die jüngste factisch vorhandene Altersklasse; für diese hat man

$$w_x = \frac{d_x}{\frac{1}{2}i_x - \frac{1}{2}[u_x + k_x - b_x]}$$

zu setzen. E.

G. ENESTRÖM. Om de befolkningsstatistiska formlerna för beräkning af dödligheten under första lefnadsåret. Stockh. Öfv. XLVIII. 441-457.

Der Verf. beweist zuerst die Formel

$$w_0 = \frac{1}{\alpha}\frac{F^{(x)} - L_0^{(x)}}{F^{(x)}},$$

wo

$w_0 \equiv$ die Wahrscheinlichkeit eines Neugeborenen, im ersten Altersjahre zu sterben;

$F^{(x)} \equiv$ die Anzahl der Geburten im Kalenderjahre x;

$L_0^{(x)} \equiv$ die Anzahl der im Kalenderjahre x geborenen Kinder, welche am Ende des Kalenderjahres noch leben;

$\alpha \equiv$ der Quotient, der als Zähler die im Kalenderjahre x unter den $F^{(x)}$ Kindern eingetretenen Sterbefälle hat, und dessen Nenner die im ersten Altersjahre unter denselben Kindern eingetretenen Sterbefälle angiebt.

Gewöhnlich setzt man $\alpha = \frac{2}{3}$, aber der Verf. zeigt, dass der

Wert von α zwischen relativ weiten Grenzen variiren kann, und dass darum die obige Formel ein unsicheres Resultat giebt. Er giebt andere Formeln für w_0 an, unter welchen besonders die folgende:

$$w_0 = \frac{D_0^{(x)}}{F^{(x)} + (1-\alpha)(F^{(x-1)} - F^{(x)})}$$

hervorgehoben werde; in dieser Formel bedeutet $D_0^{(x)}$ die Anzahl der Kinder, welche 0- bis 1-jährig im Kalenderjahre x gestorben sind.

Zuletzt wird angegeben, wie diese Formel modificirt werden muss, wenn man Auswanderung und Einwanderung berücksichtigen will. E.

K. W. Jurisch. Die Abhängigkeit zwischen Kapital und Zinsfuss. Vierteljahrschr. f. Volkswirtsch. XXVIII$_3$. 38 S.

Die Abhängigkeit zwischen dem Nationalvermögen N zur Zeit t (d. h. der Summe der in einem Volke seit seinem Entstehen bis zur Gegenwart geleisteten materiellen, geistigen und sittlichen Arbeit mit ihren Zinseszinsen) und dem Zinsfusse z wird durch die Formel

$$N = e^{\frac{zt}{100}} \int_{-\infty}^{t} L dt$$

angenähert ausgedrückt, worin L die Summe aller vom ganzen Volke in jeder Zeiteinheit geleisteten Arbeit bedeutet und als Function der Zeit zu betrachten ist.

Nach z aufgelöst, ergiebt sich

$$z = \frac{230,2585}{t} \cdot \log \frac{N}{\int_{-\infty}^{t} L dt}$$

oder im weiteren Verlaufe

$$z = \zeta h k;$$

hierin stellt ζ die Grösse des vorhandenen Kapitals und die Geschwindigkeit seiner Vermehrung, h die mit fortschreitender Kultur sich vervielfältigenden Möglichkeiten, Kapitalien anzulegen, k die Sicherheit des Lebens und Besitzes und damit des Kredits dar.

Diese Formeln werden eingehend discutirt, ebenso wird die von Herrn F. Kötter aufgestellte und dem Verfasser mitgeteilte, mathematisch correcte Formel

$$dN = N\frac{z}{100}dt + Ldt$$

hinsichtlich ihrer Verwertbarkeit für die Volkswirtschaft besprochen. Wz.

A. ZILLMER. Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbens-Statistik. VI. Heft. Im Auftrage des Vereins deutscher Eisenbahn-Verwaltungen zu der Dienstunfähigkeits- und Sterbens-Statistik desselben vom Jahre 1889 verfasst. Berlin. Puttkammer u. Mühlbrecht. III + 139 S. 8°.

E. ROGHÉ. Geschichte und Kritik der Sterblichkeitsmessung bei Versicherungsanstalten. Jena. VIII + 122 S. 8°. (Jahrb. f. Nationalök. Suppl. XVIII.

L. GROSSMANN. Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie unter Rücksichtnahme auf die praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik. 6. (Schluss-) Lieferung. Wien III. Dr. Ludwig Grossmann's Selbstverlag. IV + 74 S. und S. 25-28. Lex.-8°. (1887-1891.)

E. DORMOY. Traité mathématique de l'écarté. Avec préface de M. Sarcey. Paris. 287 S.

J. J. M'LAUCHLAN. On some formulas for use in life office valuations. Edinburgh.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

A. Pringsheim. Zur Theorie der sogenannten Convergenzkriterien zweiter Art. Math. Ann. XXXIX. 125-128.

Bedeutet Σa_ν eine beliebig vorgelegte Reihe positiver Glieder, $\frac{1}{D_\nu}$ das allgemeine Glied einer bereits als divergent erkannten Reihe, so lautet das disjunctive Hauptkriterium zweiter Art:

$$\lim_{n=\infty}\left(D_n\frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}}-D_{n+1}\right)\begin{cases}<0:\text{Divergenz},\\>0:\text{Convergenz};\end{cases}$$

ferner das nach dem Vorgange des Herrn Dini von jeder Nebenbedingung befreite Kummer'sche Kriterium:

$$\lim_{n=\infty}\left(\varphi(n)\frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}}-\varphi(n+1)\right)>0:\text{Convergenz},$$

wo also $\varphi(\nu)$ keiner weiteren Beschränkung unterliegt als der, positiv zu sein.

Der Verfasser bemerkt noch, dass ein von Herrn Giudice angegebenes Kriterium (Palermo Rend. IV. 278; cf. F. d. M. XXII. 1890. 246) sich nur in der Bezeichnung von dem Dini-Kummer'schen unterscheidet. Wz.

A. Pringsheim. Ueber analytische Darstellung unendlicher Reihen, die durch Gliederinversionen aus einer gegebenen hervorgehen. Math. Ann. XXXVIII. 153-160.

Es sei $f(\nu)$ das allgemeine Glied einer Reihe. Man teile die Glieder irgendwie in Gruppen ein, so dass z. B. das Anfangsglied der $(\lambda+1)^{\text{ten}}$ Gruppe durch den Stellenzeiger $\nu=\varphi(\lambda)$ bestimmt sei, ändere sodann die Reihenfolge der Glieder innerhalb jeder Gruppe, wobei etwa allgemein $f(m_\nu)$ an die Stelle von $f(\nu)$ treten möge; dann ist das allgemeine Glied der neuen Reihe

$$f(m_\nu)=f\{\varphi[J(\nu)]+\varphi[J(\nu)+1]-(\nu+1)\},$$

worin $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl und $J(\nu)$ eine eindeutige, monotone Function von ν bezeichnet.

Der Verfasser definirt und behandelt sodann auch die „streckenweise Inversion von Functionen“. Wz.

Ph. Gilbert. Sur une règle de convergence des séries à termes positifs. Brux. S. sc. XV A. 69-71.

Es seien Σu_n und Σv_n zwei Reihen mit positiven Gliedern, bei denen $\lim u_n=0$ und $\lim v_n=0$ für unendliches n ist, A eine positive Constante. Wenn man von einem Werte von n an hat

$$v_n-\frac{u_{n+1}}{u_n}v_{n+1}>A>0,$$

so ist die Reihe Σu_n convergent; wenn dagegen

$$v_n-\frac{u_{n+1}}{u_n}v_{n+1}<0,$$

und wenn die Reihe $\Sigma\frac{1}{v_n}$ divergent ist, so ist die Reihe Σu_n divergent. Mn. (Lp.)

M. Lerch. Ueber ein allgemeines Kriterium der Convergenz unendlicher Reihen und Integrale. Časop. XX. 285. (Böhmisch.)

Der Verfasser geht von der Existenzbedingung des Integrals

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

aus, wenn $f(x)$ positiv, endlich und integrationsfähig ist in allen Intervallen, welche zwischen a und ∞ enthalten sind, worauf er zur Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu)$$

übergeht und specielle Convergenzkriterien ableitet, auf schon bekannte Kriterien dabei stets hinweisend. Std.

F. Giudice. Sulle successioni. Palermo Rend. V. 280-283.

Wenn die Grenzen einer Folge auch eine Folge bilden, so lässt sich jene in monotone Teilfolgen in der Art zerlegen, dass die Grenzen dieser Teilfolgen genau diejenigen der gegebenen Folge sind. Wz.

A. A. Markoff. Mémoire sur la transformation des séries peu convergentes en séries très convergentes. St. Pétersbourg Mém. (7) XXXVII.

Wenn zwei Functionen $U_{x,z}$ und $V_{x,z}$ der unabhängigen Veränderlichen x und z durch die Bedingung verknüpft sind:

$$(1)\qquad U_{x,z} - U_{x+1,z} = V_{x,z} - V_{x,z+1},$$

so hat man

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} U_{0,0} + U_{0,1} + U_{0,2} + \cdots + U_{0,j-1} \\ - U_{i,0} - U_{i,1} - U_{i,2} - \cdots - U_{i,j-1} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} V_{0,0} + V_{1,0} + V_{2,0} + \cdots + V_{i-1,0} \\ - V_{0,j} - V_{1,j} - V_{2,j} - \cdots - V_{i-1,j} \end{array}\right\},$$

wo i und j willkürliche ganze positive Zahlen bedeuten.

Wenn die Reihen

$$U_{0,0},\; U_{0,1},\; U_{0,2},\; \ldots,\; U_{0,j-1},\; U_{0,j},$$
$$V_{0,0},\; V_{1,0},\; V_{2,0},\; \ldots,\; V_{i-1,0},\; V_{i,0}$$

convergent sind und die Summen

$U_{i,0} + U_{i,1} + U_{i,2} + \cdots + U_{i,j-1}$ und $V_{0,j} + V_{1,j} + V_{2,j} + \cdots + V_{i-1,j}$

Null werden bei unendlichem Anwachsen von i und j, so hat man

$$(3)\qquad U_{0,0}+U_{0,1}+U_{0,2}+\cdots+U_{0,j}+\cdots$$
$$=V_{0,0}+V_{1,0}+V_{2,0}+\cdots+V_{i,0}+\cdots.$$

Diese Identität giebt dem Verfasser das Mittel, eine grosse Anzahl von Reihen in stärker convergente zu transformiren. Unter anderen merkwürdigen und wichtigen Resultaten ergiebt sich die Verallgemeinerung einer Formel von Schellbach und die Anwendung der Formeln auf die Berechnung der Summen

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{k^3},\quad \sum_{k=0}^{k=\infty}\left\{\frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\right\}^3,$$

welche von Kummer in der Abhandlung gelehrt ist: „Eine neue Methode, die numerischen Summen langsam convergirender Reihen zu berechnen" (J. für Math. XVI). Endlich wird auch das Integral $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ berechnet. Wi.

A. Hurwitz. Ueber beständig convergirende Potenzreihen mit rationalen Zahlencoefficienten und vorgeschriebenen Nullstellen. Acta Math. XIV. 211-215.

Es sei gegeben eine Reihe von Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, welche nur der Bedingung $\lim_{n=\infty} a_n=\infty$ unterworfen sind, falls die Reihe nicht abbricht. Dann kann man auf mannigfaltige Weise eine beständig convergirende Potenzreihe herstellen, welche diese Grössen und nur diese zu Nullstellen hat, und welche überdies rationale Zahlencoefficienten besitzt. Falls die Reihe der Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in sich übergeht, wenn man jede in ihr enthaltene Grösse durch deren conjugirt-imaginären Wert ersetzt, so kann man jene Potenzreihe derart bestimmen, dass sie reelle Coefficienten erhält.

Jede beliebige (reelle oder complexe) Zahl a ist Wurzel einer Gleichung

$$0=r_0+r_1x+r_2x^2+\cdots,$$

deren rechte Seite eine beständig convergirende Potenzreihe mit

rationalen (reellen oder complexen) Coefficienten darstellt, und welche ausser der Zahl a keine weitere Wurzel besitzt.

Jede beständig convergirende Potenzreihe mit rationalen Coefficienten lässt sich als Product von n ebensolchen Reihen darstellen derart, dass sich die Nullstellen der ersteren Reihe in beliebig vorgeschriebener Weise auf die n Factoren verteilen.

Wz.

A. Tauber. Ueber den Zusammenhang des reellen und imaginären Teils einer Potenzreihe. Monatsh. f. Math. II. 79-118.

Die Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu$ hat auf dem Kreis mit dem Radius r den Wert

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu r^\nu (\cos\nu x + i\sin\nu x) = \varphi(x) + i\psi(x),$$

wenn

$$c_\nu r^\nu = a_\nu + ib_\nu,$$

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos\nu x - b_\nu \sin\nu x),$$

$$\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \sin\nu x + b_\nu \cos\nu x)$$

gesetzt wird.

Falls die unendlichen Reihen $a_1 + a_2 + \cdots$, $b_1 + b_2 + \cdots$ unbedingt convergiren, besteht zunächst für $\nu \geqq 1$ zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ der Zusammenhang

$$2\pi\varphi(x) = \int_0^\pi [\psi(x+\beta) - \psi(x-\beta)] \cot\tfrac{1}{2}\beta\, d\beta,$$

$$-2\pi\psi(x) = \int_0^\pi [\varphi(x+\beta) - \varphi(x-\beta)] \cot\tfrac{1}{2}\beta\, d\beta;$$

wenn aber die Voraussetzung der unbedingten Convergenz von $a_1 + a_2 + \cdots$ und $b_1 + b_2 + \cdots$ nicht gemacht wird, der Kreis also mindestens der Convergenzkreis ist, kommt man zu folgendem Resultat: Wenn die linke Seite einen endlichen bestimmten Wert für ein x hat, dann besitzt auch die rechte Seite diesen Wert,

vorausgesetzt dass die Functionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ absolut integrirbar sind. Die Continuitätseigenschaften von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ können wesentlich verschieden sein. Wz.

F. Giudice. Sui prodotti infiniti a fattore generale sviluppabile in serie ordinata secondo le potenze di $\frac{1}{n}$.
Palermo Rend. V. 287-288.

Es sei

$$u_n = 1+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\frac{c_3}{n^3}+\cdots,$$

und es sei das unendliche Product $u_n u_{n+1} u_{n+2}\dots$ convergent, dann ist $c_1 = 1$.

Setzt man

$$u_n = \varphi_n : \varphi_{n+1},$$

$$\varphi_n = 1+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots,\quad \varphi_{n+1} = 1+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\cdots,$$

$$-g_{x\lambda} = c_{x-\lambda+1}-\binom{\lambda}{1}c_{x-\lambda}+\binom{\lambda+1}{2}c_{x-\lambda-1}-\binom{\lambda+2}{3}c_{x-\lambda-2}+\cdots$$
$$+(-1)^{x-\lambda+1}\binom{x}{x-\lambda+1},$$

$$c_0 = 0,\quad c_{-1} = c_{-2} = \cdots = 0,$$

so ist:

$$c_{x-1} = g_{x1}a_1+g_{x2}a_2+\cdots+g_{xx}a_x,\quad g_{xx} = x.$$

Berechnet man die a_x hieraus, so wird:

$$u_n u_{n+1} u_{n+2}\dots u_{n+m} = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+m+1}},\quad u_n u_{n+1} u_{n+2}\cdots = \varphi_n.$$

Wz.

E. Cahen. Note sur la convergence de quelques séries.
Nouv. Ann. (3) X. 453-459.

Ist

$$\varphi(n) = \psi'(n),$$

so ist

$$\varphi(n+\theta_n) = \psi(n+1)-\psi(n),\quad 0<\theta_n<1,$$

daher

$$\sum_1^n \varphi(n+\theta_n) = \psi(n+1)-\psi(1).$$

Die Convergenz oder Divergenz der Reihe $\sum_1^\infty \varphi(n+\theta_n)$ hängt demnach davon ab, ob die Function ψ für ein unendlich wachsendes n gegen eine Grenze convergirt oder nicht. — Für die endliche Summe $\sum_1^n \varphi(n)$ können zwei Grenzen angegeben werden.

Als Beispiele werden behandelt:

$$\varphi(n) = \frac{1}{n},\quad \frac{1}{n^s},\quad \frac{1}{n\log n},\quad \frac{1}{n\log^a n},\quad \frac{\cos(a\log n)}{n}.$$

Wz.

G. Peano. Sulla formola di Taylor. Torino Atti XXVII. 40-46.

Der Verfasser definirt die Taylor'sche Reihe unabhängig von der Convergenz in folgender Weise. Es sei $f(x)$ eine reelle Function der reellen Veränderlichen x und convergire gegen a_0 für $x=0$; ferner convergire $[f(x)-a_0]:x$ gegen a_1 für $x=0$; ausserdem convergire

$$\frac{\frac{f(x)-a_0}{x}-a_1}{x}$$

gegen a_2 für $x=0$ u. s. w. Es soll demnach die Formel

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

bedeuten, dass

$$\lim_{x=0}\frac{f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_{n-1}x^{n-1}}{n} = a_n$$

oder dass

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\alpha x^n,\quad \text{wo}\quad \lim_{x=0}\alpha = 0.$$

Unter dieser Voraussetzung werden dann die Sätze über die Summe zweier Reihen, ihr Product, ihren Quotienten, u. a. bewiesen. Wz.

N. J. Sonin. Ueber den Rest der Taylor'schen Formel. Warschau Nachr. 1891. V. 1-17.

Um unendliche Reihen mit Erfolg zur angenäherten Berechnung anzuwenden, muss man nicht nur nahe, sondern auch zum Rechnen geeignete Grenzen des Restes haben. Diese letzte Forderung hat A. Winkler (Der Rest der Taylor'schen Reihe. Wien. Denkschr. LIX, F. d. M. I. 1868. 84) nicht beachtet; deshalb sind seine Formeln unbrauchbar. Der Verfasser benutzt die in seiner Abhandlung „Ueber angenäherte Berechnung der bestimmten Integrale" (Warschau Nachr. 1887, F. d. M. XIX. 282) gegebene Relation zwischen den Resten R_{n+1} und P_{m+1} der Entwickelungen zweier Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$:

$$R_{n+1} = \frac{m!}{n!}(x-\xi)^{n-m}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(m+1)}(\xi)}P_{m+1},$$

um geeignetere Formen für den Rest der Taylor'schen (eigentlich Maclaurin'schen) Reihe zu erhalten. Es sei

$$(1) \qquad \varphi(x) = f(x).$$

Dann ist

$$R_{n+1} = \frac{m!}{n!}(x-\xi)^{n-m}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{f^{(m+1)}(\xi)}R_{m+1},$$

(wenn $f^{(m+1)}(\xi)$ das Zeichen nicht ändert). Es sei

$$(2) \qquad \varphi(x) = xf(x).$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\frac{\xi f^{(n+1)}(\xi)+(n+1)f^{(n)}(\xi)}{(\xi-x)f^{(n+1)}(\xi)+(n+1)f^{(n)}(\xi)}.$$

Das Zeichen des Zählers darf sich nicht ändern.

Noch andere Formen werden erhalten, indem man setzt:

$$(3) \qquad \varphi(x) = f'(x),$$

und besonders für $m = n-1$, n;

$$(4) \qquad \varphi(x) = xf'(x),$$

und $m = n$, $n-1$.

Diese Formeln werden auf einige Beispiele angewandt, um ihre Brauchbarkeit zu zeigen. Si.

M. d'Ocagne. Le terme complémentaire de la série de Taylor. Mathesis (2) I. 19-20.

Liegt θ zwischen 0 und 1, so ist

$$f(x+h) = f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)$$
$$+\frac{(\theta h)^n}{n!}[f^{(n)}(x+h)-f^{(n)}(x)].$$

Mn. (Lp.)

P. Mansion. Théorème de Choquet. Mathesis (2) I. 218-221.

Wenn $u=f(x)$ eine ganze Function n^{ten} Grades ist und x zwischen x_0 und x_0+h liegt, so ist

$$u = u_0+\lambda_1.\Delta u_0-\tfrac{1}{8}\lambda_2.\Delta_2 u_0+\tfrac{1}{15}\lambda_3.\Delta_3 u_0-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{5n}\lambda_n.\Delta_n u_0,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ positive Brüche bedeuten. Dieser Satz ermöglicht oft den Nachweis, ob u zwischen u_0 und $u_1=f(x_0+h)$ das Zeichen wechselt. Mn. (Lp.)

Ch. de la Vallée-Poussin. Sur une démonstration des formules de Fourier généralisée. Brux. S. sc. XV A. 39-41.

Verallgemeinerung der Darstellungsart des Herrn Jordan (Cours d'analyse, 1ère éd. T. II. 216-226). Mn. (Lp.)

A. Bassani. Sur l'application d'un développement des fonctions implicites à une extension du problème universel de Wronski. Teixeira J. X. 81-96.

Indem der Verf. eine Formel verallgemeinert, welche Hr. F. G. Teixeira im Journ. de Math. (3) VIII und (4) V gegeben hat (F. d. M. XXI. 1889. 239), gewinnt er die Entwickelung einer beliebigen Function $F(u, v)$ zweier Variabeln u und v nach den Potenzen von x und y unter der Annahme

$$u = a+x\varphi_1(u, v)+x^2\varphi_2(u, v)+\cdots+x^n\varphi_n(u, v),$$
$$v = b+y\psi_1(u, v)+y^2\psi_2(u, v)+\cdots+y^n\psi_n(u, v).$$

Die erhaltene Entwickelung umfasst als besonderen Fall die von Laplace und Jacobi herrührende Erweiterung der Lagrange'schen Formel für den Fall zweier unabhängigen Variabeln.

Zur Anwendung betrachtet der Verf. die nachstehende Aufgabe. Es seien die Beziehungen gegeben:

$$f(z, t) = x_1 f_1(z, t) + x_2 f_2(z, t) + \cdots + x_n f_n(z, t),$$
$$F(z, t) = y_1 F_1(z, t) + y_2 F_2(z, t) + \cdots + y_m F_m(z, t);$$

eine beliebige Function $\theta(z, t)$ der unabhängigen Variabeln z und t nach den Potenzen und Producten der Variabeln $x_1, x_2, \ldots,$ $y_1, y_2, \ldots$ zu entwickeln. Die gefundene Entwickelung verallgemeinert das Universalproblem Wronski's. Tx. (Lp.)

M. MARTONE. Introduzione alla teoria delle serie. Parte prima. I determinanti Wronskiani e la legge suprema. Catanzaro. Maccarone. 1891. 43 S. 4°.

Parte seconda. Il problema universale del Wronski e la risoluzione algebrica delle equazioni. Catanzaro. Astori. 1892. 42 S. 4°.

Auseinandersetzung der Grundlagen der Wronski'schen Theorien. Vi.

C. A. LAISANT. Note sur l'interpolation successive. S. M. F. Bull. XIX. 121-123.

Um die langen Rechnungen abzukürzen, welche sich bei der Anwendung der Interpolationsformeln z. B. auf physikalische Erscheinungen ergeben, stellt der Verfasser folgende Formel auf:

$$(1) \qquad y = u + k(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n);$$

es wird dabei angenommen, dass y eine Function von x und ihr Wert für n Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ resp. gleich $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gegeben sei; wenn dann u diesen Bedingungen genügt, so thut es auch der obige Ausdruck von y. Wenn nun der Wert y_{n+1} einem neuen Werte x_{n+1} entspricht, so bestimmt sich hieraus k:

$$k = \frac{y_{n+1} - u_{n+1}}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\ldots(x_{n+1}-x_n)},$$

worin u_{n+1} den Wert bezeichnet, den u für $x = x_{n+1}$ annimmt.

Geht man von $n = 2$ aus, so kann man nach und nach das physikalische Gesetz, das durch (1) dargestellt wird, mit immer grösserer Annäherung erhalten. Wz.

C. A. LAISANT. Nouvelles remarques sur le problème de l'interpolation. Assoc. Franç. Marseille XX. 222-224.

Indem der Verf. sich die Aufgabe stellt, eine lineare und homogene Function von n Variabeln zu bestimmen, welche für n Systeme dieser Variabeln n gegebene Werte annimmt, gelangt er zu der sofort einzusehenden Darstellung der Function mittels der Unterdeterminanten einer Determinante. Verfügt man dann über die n Variabeln auf passende Weise, so erhält man eine beliebige ganze Function mehrerer Variabeln zur Interpolation, ähnlich wie die Lagrange'sche Formel. Lp.

C. A. LAISANT. Remarque sur l'interpolation. S. M. F. Bull. XIX. 44-48.

Ist u eine Function von x, welche für $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ die Werte $u_1, u_2, \dots, u_n$ annimmt, so lautet die Lagrange'sche Interpolationsformel

$$u = X_1 u_1 + X_2 u_2 + \cdots + X_n u_n,$$

wo $X_1, X_2, \dots, X_n$ Functionen von x sind, die für $x = a_k$ gleich Eins werden, für die übrigen Werte $a_1, a_2, \dots, a_n$ jedoch verschwinden. Ist nun $t = \varphi(z)$ eine willkürliche Function, φ^{-1} durch die Bedingung $z = \varphi^{-1}(t)$ bestimmt, so kann man die Lagrange'sche Formel zu folgender verallgemeinern:

$$\varphi^{-1}[X_1 \varphi(u_1) + X_2 \varphi(u_2) + \cdots + X_n \varphi(u_n)].$$

Wz.

R. RADAU. Études sur les formules d'interpolation. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

E. CESÀRO. Nouvelles remarques sur divers articles concernant la théorie des séries. Teixeira J. X. 57-71.

Abgedruckt aus Nouv. Ann. (3) IX. 353-367 (F. d. M. XXII. 1890. 247).

Capitel 2.
Besondere Reihen.

H. W. Richmond. The sum of the cubes of the coefficients in $(1-x)^{2n}$. Mess. (2) XXI. 77-78.

Neuer Beweis, dass die in Rede stehende Summe den Wert $(-1)^n(3n)!/(n!)^3$ hat. Vergl. Dixon, F. d. M. XXII. 1890, wo das Zeichen + hinter $(-1)^n$ durch $\times$ zu ersetzen ist.

Lp.

C. A. Laisant. Propriété géométrique des coefficients du binôme. S. M. F. Bull. XIX. 4-5.

Legt man n ähnliche Dreiecke OA_0A_1, OA_1A_2, ... mit den gleichen Seiten zusammen, so dass man eine Reihe von Strahlen $OA_0 = 1$, $OA_1 = A$, $OA_2 = A^2$, ..., getrennt durch gleiche Winkel φ, erhält, und belastet die Endpunkte mit Gewichten im Verhältnis der Coefficienten der Entwickelung von $(1+x)^n$, so werden die Coordinaten des Schwerpunkts des Gewichtssystems dargestellt durch den complexen Ausdruck:

$$\left(\frac{1+Ae^{i\varphi}}{2}\right)^n.$$

Hierfür schreibt der Verfasser symbolisch $\left(\frac{1+A}{2}\right)^n$, ohne über den Sinn des Ausdrucks, den er den Schwerpunkt selbst nennt, Auskunft zu geben. Hieraus werden einige speciellere und erweiterte Resultate gezogen.

H.

C. A. Laisant. Formule concernant les nombres polygones. Soc. Philom. Bull. (8) III. 29-30.

Bedeutet a_α die Polygonalzahl von der Ordnung a, $\alpha+2$ die Anzahl der Seiten des Polygons, so ist

$$(a+b)_\alpha = a+\alpha\frac{a(a-1)}{2}+b+\alpha\frac{b(b-1)}{2}+\alpha ab,$$

oder:

$$(a+b)_a = a_a + b_a + aab.$$

Allgemein:

$$(a+b+c+\cdots+l)_a = \Sigma a_a + a\Sigma ab.$$

Wz.

C. A. Laisant. Tétraèdre arithmétique. S. M. F. Bull. XIX. 18-23.

Das arithmetische Tetraeder dient zur Bestimmung der Coefficienten von $(x+y+z)^n$. Für $n=7$ ist dasselbe:

y_0									
y^1	1	.	.	.	.	.	.	.	x^7
y^2	7	7	.	.	.	.	.	.	x^6
y^3	21	42	21	.	.	.	.	.	x^5
y^4	35	105	105	35	.	.	.	.	x^4
y^5	35	140	210	140	35	.	.	.	x^3
y^6	21	105	210	210	105	21	.	.	x^2
y^7	7	42	105	140	105	42	7	.	x^1
	1	7	21	35	35	21	7	1	x^0
	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	z^5	z^6	z^7.	

Man erhält z. B. den Coefficienten von x^2yz^4, indem man den Schnittpunkt der Linien x^2 und y nimmt, also 105, derselbe liegt auch auf der Linie z^4.

Diese Bestimmung der Coefficienten wird verallgemeinert für $(x+y+z+t)^n$. Wz.

C. A. Laisant. Propriétés du triangle arithmétique. Assoc. Franç. Marseille XX. 1-7.

C. A. Laisant. Sur le cube arithmétique. Ibid. 8-10.

In der ersten Note wird das Pascal'sche Dreieck und das Fermat'sche arithmetische Quadrat verallgemeinert und gezeigt, wie beide Figuren sich zu einer einzigen symmetrischen vereinigen lassen; auch wird eine neue Eigenschaft dritten Grades eines neben die erste Columne des arithmetischen Quadrates gelegten beliebigen Quadrates angegeben. Die zweite Note erläutert eine neue

Anordnung des arithmetischen Tetraeders (vergl. das vorangehende Referat). Der arithmetische Würfel bietet eine vollständige Analogie zu dem Fermat'schen arithmetischen Quadrate. Es folgen Ausdehnungen der Eigenschaften der Summentafeln auf die Kuben von Summen mit beliebigen Anfangselementen.

Lp.

C. M. Piuma. Intorno ai coefficienti polinominali. Batt. G. XXIX. 34-40.

Es sei m eine Primzahl und n eine beliebige ganze Zahl, welche im System von der Basis m mit den Ziffern $a_0, a_1, \ldots, a_k$ geschrieben wird (so dass also

$$n = \sum_{t=0}^{k} a_t m^t$$

ist); dann ist der Exponent der höchsten Potenz von m, welche in $n!$ enthalten ist, gleich

$$\frac{n - \sum_{t=0}^{k} a_t}{m-1}.$$

Sind $b_1, b_2, \ldots, b_s$ ganze Zahlen, von denen auch einige Null sein können, und für welche

$$\sum_{u=1}^{s} b_u = n$$

ist, bezeichnet $c_{u,t}$ die $(t+1)^{\text{te}}$ Ziffer von b_u, so dass

$$b_u = \sum_{t=0}^{k} c_{u,t} m^t \qquad (u = 1, 2, \ldots, s)$$

ist, bedeuten endlich $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{k-1}$ die grössten Ganzen, welche bezüglich in

$$\frac{\sum_{u=1}^{s} c_{u,0}}{m}, \quad \frac{l_0 + \sum_{u=1}^{s} c_{u,1}}{m}, \quad \frac{l_1 + \sum_{u=1}^{s} c_{u,2}}{m}, \quad \ldots, \quad \frac{l_{k-1} + \sum_{u=1}^{s} c_{u,k}}{m}$$

enthalten sind, so ist der Exponent der höchsten Potenz von m, welche in dem Binomialcoefficienten

$$\frac{n!}{\prod_{u=1}^{s} b_u!}$$

enthalten ist, gleich $l_0 + l_1 + l_2 + \cdots + l_{k-1}$.

Endlich wird die notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, dass dieser Binomialcoefficient nicht durch m teilbar sei, und es werden noch einige weitere Sätze abgeleitet.

Wz.

L. Schendel. Eine Verallgemeinerung des binomischen Satzes. Schlömilch Z. XXXVI. 60-64.

Herr Schlömilch hat im XXX. Bande seiner Zeitschrift S. 191 (F. d. M. XVII. 1885. 228) die Aufgabe gestellt, die ganzen algebraischen Functionen $f_0(n)$, $f_1(n)$, ... so zu bestimmen, dass der Function

$$f(n) = (r = 0, 1, \ldots) f_r(n) x^r$$

die Eigenschaft $f(n_1) f(n_2) = f(n_1 + n_2)$ zukommt, und dieselbe für $f_0(n) = 1$ behandelt. Die allgemeine Lösung ist:

$$(F(z))^n = (r = 0, 1, \ldots) n D_y^{r-1} (F(y))^{n-1} F'(y) . (\varphi(y))^r x^r : r!,$$
$$z = x\varphi(z) + y;$$

diese Reihe hat ausserdem noch die Eigenschaft, dass sie gleich dem Quotienten zweier Reihen ist, von denen die zweite aus der ersten für $n = 0$ hervorgeht.

Durch besondere Annahmen ergeben sich hieraus Resultate, die schon Herr Hurwitz (Schlömilch Z. XXXV. 56, F. d. M. XXII. 1890. 256) und Herr Saalschütz (Schlömilch Z. XXXII. 250, F. d. M. XIX. 1887. 234) abgeleitet hatten.

Wz.

N. H. Abel. Researches on the series

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \cdots.$$

Tokio Math. Ges. IV. 52-86.

Englische Uebersetzung der Abhandlung aus J. für Math. I. 311-339, von Hrn. K. Miwa geliefert.

Lp.

Fr. Rogel. Eine bemerkenswerte Identität. Hoppe Arch. (2) X. 110-111.

$$(n+1)^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} (n-r+1)^{n-r-1} (r-1)^{r-1}.$$

Wz.

E. Uhlich. Reihensummation auf geometrischem Wege. Festschr. d. Fürsten- u. Landessch. Grimma. 43-49. 4°.

Der Verfasser will einen Beitrag zur Beziehung von Arithmetik und Geometrie liefern und behandelt demgemäss drei Aufgaben. Die erste derselben lautet: „In einem Trapez $ABB'A'$ seien die Diagonalen gezogen und durch deren Schnittpunkt D_1 eine Parallele gelegt, welche die geneigten Seiten in B_1 und B_1' schneidet. Dasselbe Verfahren sei auf das neue Trapez $AB_1B'_1A'$ angewandt, wodurch die Punkte B_2 und B_2' entstehen, u. s. f. Betrachte die Zerschneidung der Linie AB durch die Punkte B_1, B_2, B_3, ...“. Sie ergiebt:

1) $$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{2^{\nu-1}}{[a+(2^{\nu-1}-1)b][a+(2^{\nu}-1)b]} = \frac{2^n-1}{a[a+(2^n-1)b]},$$

2) für $n=\infty$ hat die Reihe den Wert $\frac{1}{ab}$.

Wz.

G. Riboni. Sulle somme delle combinazioni dei numeri naturali. Periodico di Mat. VI. 186-189.

Bezeichnet K_p^n die Summe der Producte zu je p der Zahlen 1, 2, ..., n, so ist:

$$K_p^n = pK_{p-1}^{p-1} + (p+1)K_{p-1}^{p} + \cdots + 4K_{p-1}^{n-1} = K_p^{n-1} + nK_{p-1}^{n-1}.$$

Vi.

W. J. C. Miller, E. Lampe. Prove that $n! < 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$. Ed. Times LIV. 51.

Die Grenze, welche Hr. Miller in der elementar zu denkenden Aufgabe angegeben hat, kann, wie Ref. zeigt, leicht er-

niedrigt werden. Es sei $m = 2^p$ und α eine ganze Zahl $< 2^p$, $n = m + \alpha$, so ist

$$(m+\alpha)! < 2^{\alpha+1}(\tfrac{1}{2}m)^m \cdot m^\alpha.$$ Lp.

A. Hurwitz. Ueber den Vergleich des arithmetischen und des geometrischen Mittels. J. für Math. CVIII. 266-268.

Das arithmetische Mittel aus n positiven Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ hat, abgesehen von dem Falle, wo diese Grössen alle einander gleich sind, stets einen grösseren Wert als ihr geometrisches Mittel.

Der neue Beweis, den der Verf. für diesen Satz giebt, ist folgender: Setzt man

$$\sqrt[n]{a_1} = x_1, \quad \sqrt[n]{a_2} = x_2, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{a_n} = x_n,$$

so kann die Differenz

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n}{n} - x_1 x_2 \ldots x_n$$

auf die Form gebracht werden:

$$\frac{1}{2 \cdot n!}(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{n-1}),$$

wo

$$\varphi_1 = \Sigma(x_1^{n-2} + x_1^{n-3}x_2 + \cdots + x_2^{n-2})(x_1 - x_2)^2,$$
$$\varphi_2 = \Sigma(x_1^{n-3} + x_1^{n-4}x_2 + \cdots + x_2^{n-3})(x_1 - x_2)^2 x_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\varphi_{n-1} = \Sigma(x_1 - x_2)^2 x_3 x_4 \ldots x_n$$

ist und die Summation sich auf alle Glieder erstreckt, die aus den angedeuteten durch alle möglichen Permutationen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hervorgehen. Wz.

F. Rudio. Ueber die Convergenz einer von Vieta herrührenden eigentümlichen Productentwickelung. Schlömilch Z. XXXVI. Hl. A. 139-140.

Es handelt sich um die Convergenz des Ausdrucks:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}.$$

Dieser geht für $s = \frac{\pi}{2}$ aus dem von Euler für den Kreisbogen s gegebenen

$$s = \frac{\sin s}{\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s}{4}\cos\frac{s}{8}\cos\frac{s}{16}\cdots}$$

hervor; es handelt sich demnach um die Convergenz des unendlichen Productes, das den Nenner bildet, oder wenn

$$\cos u = 1-2\sin^2\frac{u}{2}$$

gesetzt wird, um

$$P = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-2\sin^2\frac{s}{2^{\nu+1}}\right).$$

Nun ist P convergent, weil die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2\sin^2\frac{s}{2^{\nu+1}}$$

convergirt; dies ist aber der Fall, weil der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder sich der Grenze $\frac{1}{4}$ nähert.

Wz.

F. J. Studnička. Kurzgefasste Ableitung einiger trigonometrischer Reihen. Casop. XX. 173. (Böhmisch.)

Verwendet die Reihen für

$$\frac{1}{2}l\frac{1+y}{1-y} \quad \text{und} \quad e^y-1,$$

indem darin gesetzt wird

$$y = ae^{ix},$$

um auf kürzestem Wege die Summenformeln für

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}\frac{\cos}{\sin}(2k+1)x,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\frac{\cos}{\sin}(kx),\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{\cos}{\sin}(2k+1)x,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}}{(2k)!}\frac{\cos}{\sin}(2kx),\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}}{(2k)!}\frac{\cos^2}{\sin^2}(kx)$$

abzuleiten. Std.

J. KRONTIL. Ableitung einiger unendlicher Reihen. Casop. XIX. 70. (Böhmisch.)

Unter Zugrundelegung eines dem Kreise einbeschriebenen oder umbeschriebenen regelmässigen Polygons werden 10 specielle Reihenformeln abgeleitet, wovon z. B. die letzte lautet:

$$\sin 2\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin \frac{2\alpha}{(k-1)^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \sin \frac{\alpha}{2^k} \cos \frac{3\alpha}{2^k}.$$

Std.

M. LERCH. Sur une série. Teixeira J. X. 103-105.

Aus dem Euler'schen Integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

leitet der Verf. einen einfachen Beweis für die Formel her:

$$\frac{2\pi i e^{2vw\pi i}}{e^{2w\pi i}-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2kv\pi i}}{w-k}.$$

Tx. (Lp.)

E. McCLINTOCK. On the algebraic proof of a certain series. American J. XIV. 67-71.

Untersuchung der Convergenz der Reihe

$$\log x = y + \frac{2a-1}{2} y^2 + \frac{2a-1}{2} \frac{2a-2}{3} y^3 + \cdots,$$

wo $y = x^{1-a} - x^{-a}$ ist, durch Vergleichung mit den Reihen

$$\log x = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots,$$
$$\log x = (1-x^{-1}) + \tfrac{1}{2}(1-x^{-1})^2 + \tfrac{1}{3}(1-x^{-1})^3 + \cdots.$$

Wz.

E. CAHEN. Note sur la série $\sum_1^{\infty} n^s u^n$. Nouv. Ann. (3) X. 476-477.

Bedeutet n eine ganze Zahl, die > 1 ist, so ist für jeden Wert von s

$$n^s = \frac{(s+1)(s+2)\dots(s+n)}{1.2.3\dots n} \frac{\Gamma(s+1)}{1+\varepsilon_n}, \qquad 0 < \varepsilon_n < 1.$$

Daher ist

$$\sum_1^\infty n^s u^n = u + \sum_2^\infty \frac{(s+1)(s+2)\dots(s+n)}{1.2\dots n}\,\frac{\Gamma(s+1)}{1+\varepsilon_n}\,u^n.$$

Sind nun α und β die Grenzen von $\frac{1}{1+\varepsilon_n}$, so dass:

$$\tfrac{1}{2} \leqq \alpha < \beta < 1,$$

so liegt die Reihe z zwischen den Grenzen

$$u + \alpha\Gamma(s+1)\left[\frac{1}{(1+u)^{s+1}} - 1 - (s+1)u\right]$$

und

$$u + \beta\Gamma(s+1)\left[\frac{1}{(1-u)^{s+1}} - 1 - (s+1)u\right].$$

Wz.

F. Giudice. Sui limiti. Periodico di Mat. VI. 62-64, 81-85, 125-131.

Einige Sätze und Kunstgriffe, welche zur Ermittelung der Grenzwerte gegebener Ausdrücke von Nutzen sind. Es mögen die folgenden Resultate als Beispiele angeführt werden:

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{kx}\right) = \log k,$$

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\frac{1}{x+2}\right)\cdots\left(1+\operatorname{arctg}\frac{1}{kx}\right) = k,$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}.$$

Vi.

G. Vivanti. Zur Aufstellung arithmetischer Identitäten. Schlömilch Z. XXXVI. 1-10.

Der Verfasser benutzt nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihen, durch welche dieselbe Function auf zwei verschiedene Weisen entwickelt werden kann, indem er die Coefficienten der verschiedenen Ausdrücke gleichsetzt, zur Auffindung von arithmetischen Identitäten, die meistenteils Summen von Binomialcoefficienten in mannigfaltigen Combinationen enthalten. Die nach Kugelfunctionen entwickelten Functionen sind

$$\sqrt{1-x^2},\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \arcsin x,\quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Doch finden sich auch zwei sehr complicirte Reihen für $x^m X^{(m)}$ und $X^{(m)} X^{(n)}$, welche neu sein dürften. Sn.

H. W. SEGAR. On the summation of certain series. Mess. (2) XX. 142-144.

Bemerkungen über die Summationen specieller Reihen, bei denen die aufeinander folgenden Glieder durch gewisse recurrirende Gesetze zusammenhängen. Lp.

A. BERGER. Recherches sur les nombres et les fonctions de Bernoulli. Acta Math. XIV. 249-304.

Die Bernoulli'schen Zahlen $B(0)$, $B(1)$, $B(2)$, $B(3)$, ... werden durch

$$B(0) = 1; \quad \sum_{k=1}^{m} \frac{B(m-k)}{1.2.3\ldots k} = 0 \quad \text{für} \quad m \geqq 2$$

definirt, die Bernoulli'schen Functionen $\varphi(z, 0)$, $\varphi(z, 1)$, $\varphi(z, 2)$, $\varphi(z, 3)$, ... für alle Werte der Veränderlichen z durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi''(z, m+1) &= \varphi'(z, m) \quad \text{für} \quad m \geqq 0, \\ \varphi(z, 0) &= 0; \\ \varphi(0, m) &= 0 \quad \text{für} \quad m \geqq 0, \\ \varphi(1, 1) &= 1; \\ \varphi(1, m) &= 0 \quad \text{für} \quad m \geqq 2. \end{aligned}$$

Es ergiebt sich:

$$\varphi(z, 0) = 0; \quad \varphi(z, m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{B(m-k)z^k}{1.2.3\ldots k} \quad \text{für} \quad m \geqq 1.$$

$$\varphi^k(z, m) = \varphi(z, m-k) + B(m-k) \quad \text{für} \quad 1 \leqq k \leqq m.$$

Ferner gilt Folgendes: Bedeutet m eine positive ganze Zahl, x und y zwei beliebige Grössen, so hat man

$$\varphi(x+y, m) - \varphi(x, m) - \varphi(y, m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi(x, m-k)y^k}{1.2.3\ldots k},$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi(x, m-k)y^k}{1.2.3\ldots k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi(y, m-k)x^k}{1.2.3\ldots k}.$$

Für $m \geqq 2$:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi(z, m-k)}{1.2.3 \ldots k} = \frac{z^{m-1}}{1.2.3 \ldots (m-1)} = \varphi(z+1, m) - \varphi(z, m),$$

$$\varphi(1-z, m) = (-1)^m \varphi(z, m).$$

Nach weiteren, teilweise schon früher behandelten Sätzen (vergl. F. d. M. XX. 1888. 266) entwickelt der Verfasser die Functionen in trigonometrische Reihen durch die Formel:

$$\varphi(z, m) = -B(m) - \frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2k\pi zi} + (-1)^m e^{-2k\pi zi}}{k^m},$$

wo m eine positive ganze Zahl bedeutet, z eine reelle Grösse von der Art, dass $0 < z < 1$ ist. Ist $m \geqq 2$, so gilt diese Entwickelung auch für $z = 0$ und $z = 1$.

Der Verfasser benutzt sodann die abgeleiteten Formeln zur Berechnung von einigen bestimmten Integralen und beweist unter anderem den Satz: Sind m und k zwei ganze positive Zahlen, $f(z)$ eine Function der reellen Veränderlichen z von der Art, dass $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$, ..., $f^{(m+1)}(z)$ zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = k$ endlich und stetig sind, so ist:

$$\sum_{h=0}^{k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{m} B(m)\{f^{(r)}(k) - f^{(r)}(0)\}$$
$$+ \frac{(-1)^m}{(2\pi i)^m} \int_0^k f^{(m+1)}(z) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{2sz\pi i} + (-1)^m e^{-2sz\pi i}}{s^m}\, dz.$$

In dem zweiten Teile seiner Arbeit definirt der Verfasser die verallgemeinerten Bernoulli'schen Zahlen und Functionen (cf. F. d. M. XX. 1888. 266) $B(0, \Delta)$, $B(1, \Delta)$, $B(2, \Delta)$, ...; $\varphi(z, 0, \Delta)$, $\varphi(z, 1, \Delta)$, $\varphi(z, 2, \Delta)$, ... und beweist unter anderen folgende Sätze:

$$B(m, \Delta) = \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta - 1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \quad \text{für} \quad m \geqq 0,$$

$$B(m, \Delta) = \sum_{k=1}^{m} \frac{B(m-k)}{1.2.3 \ldots k(\varepsilon\Delta)^k} \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta - 1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^k \quad \text{für} \quad m \geqq 1,$$

$$B(m, \Delta) = -\frac{\{1 + \varepsilon(-1)^m\}(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^m} \quad \text{für} \quad m \geqq 1.$$

Für die verallgemeinerten Bernoulli'schen Functionen ergiebt sich z. B.:

$$\varphi(z, 0, \Delta) = 0, \quad \varphi(z, m, \Delta) = \sum_{k=1}^{m} \frac{B(m-k, \Delta) z^k}{1.2.3 \ldots k} \quad \text{für} \quad m \geqq 1,$$

$$\varphi(0, m, \Delta) = 0 \quad \text{für} \quad m \geqq 0,$$

$$\varphi(z, m, \Delta) = -B(m, \Delta) + \sum_{1}^{\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \quad \text{für} \quad m \geqq 0,$$

$$\varphi'(z, m+1, \Delta) = \varphi(z, m, \Delta) + B(m, \Delta) \quad \text{für} \quad m \geqq 0,$$

$$\varphi(z+1, m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta) = \frac{1}{\Gamma(m)} \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}$$

$$\text{für} \quad m \geqq 1,$$

$$\varphi(-z, m, \Delta) = \varepsilon(-1)^m \varphi(z, m, \Delta) \quad \text{für} \quad m \geqq 0.$$

Ferner für

$$-\frac{1}{\varepsilon\Delta} < z < \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

$$\varphi(z, m, \Delta) = -B(m, \Delta) - \frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi z i} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m},$$

für $m \geqq 2$ gilt diese Formel auch für $z = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}$ und für $z = \frac{1}{\varepsilon\Delta}$.

Dabei ist ε das Vorzeichen von Δ, und der Wert der Quadratwurzel $(\sqrt{\Delta})$ wird durch die Formeln

$$(\sqrt{\Delta}) = |\sqrt{\Delta}| \quad \text{für} \quad \Delta > 0,$$
$$(\sqrt{\Delta}) = i\,|\sqrt{-\Delta}| \quad \text{für} \quad \Delta < 0$$

bestimmt. Wz.

Fr. Rogel. Transformationen der Potenzreihen ganzer und reciproker Zahlen. Hoppe Arch. (2) X. 169-208.

Im Abschnitt I handelt es sich um Reihen mit geradem Exponenten und Zeichenfolge und um Reihen mit ungeradem Exponenten und Zeichenwechsel, und zwar um:

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= 1^{2n}+2^{2n}+\cdots+j^{2n},\\
T_{2n} &= 1^{2n}+3^{2n}+\cdots+k^{2n},\\
U_{2n+1} &= 1^{2n+1}-3^{2n+1}+5^{2n+1}-\cdots+(-1)^{\frac{k-1}{2}}k^{2n+1},\\
V_{2n} &= 1^{2n}-2^{2n}+3^{2n}-\cdots+(-1)^{j+1}j^{2n}.
\end{aligned}$$

Differentiirt man die für jeden Wert von φ und für ungerade m gültige Formel

$$\begin{aligned}
\Phi \equiv \cos 2\varphi+\cos 4\varphi+\cdots+\cos(m-1)\varphi &= -\tfrac{1}{2}+\frac{\sin m\varphi}{2\sin\varphi}\\
&= m-\frac{m(m^2-1^2)}{3!}\sin^2\varphi+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}\sin^4\varphi-\cdots\\
&\quad +(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^2-[m-2]^2)}{m!}\sin^{m-1}\varphi
\end{aligned}$$

$2n$- und $(2n+1)$-mal nach φ und setzt dann $\varphi = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}$, so erhält man Reihen für S_{2n}, V_{2n}, U_{2n+1}, die für ungerade m gelten, z. B.:

$$\begin{aligned}
S_{2n} = \frac{m}{4}\Bigg\{&\frac{m^2-1^2}{3!}+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}\,\frac{2^{2n}-\binom{4}{1}}{2!}\\
&+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{7!}\,\frac{3^{2n}-\binom{6}{1}2^{2n}+\binom{6}{2}}{2^4}\\
&+\cdots+\frac{(m^2-1^2)\ldots(m^2-[m-2]^2)}{m!}\\
&\times\frac{\frac{(n-1)^{2n}}{2}-\binom{m-1}{1}\frac{(m-3)^{2n}}{2}+\cdots+(-1)^{\frac{m-3}{2}}\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}}}{2^{m-3}}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Diese Reihen werden mittels der Relationen

$$\frac{(m^2-1^2)}{2^2.3!} = \tfrac{1}{3}\binom{\frac{m+1}{2}}{3};\quad \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4.5!} = \tfrac{1}{5}\binom{\frac{m+3}{2}}{4};\quad \cdots$$

. . . .

$$\frac{1}{2^{m-1}m!}\{(m^2-1^2)\ldots(m^2-[m-2]^2)\} = \frac{1}{m}\binom{m-1}{m-1} = \frac{1}{m}$$

umgeformt; so wird

$$S_{2n} = m\left\{\frac{1}{3}\binom{\frac{m+1}{2}}{2}+\frac{1}{5}\binom{\frac{m+3}{2}}{4}\left[2^{2n}-\binom{4}{1}\right]\right.$$

$$+\frac{1}{7}\binom{\frac{m+5}{2}}{6}\left[3^{2n}-\binom{6}{1}2^{2n}+\binom{6}{2}\right]+\cdots$$

$$\left.+\frac{1}{m}\binom{m-1}{m-1}\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)^{2n}-\binom{m-1}{1}\left(\frac{m-3}{2}\right)^{2n}\cdots\pm\binom{m-1}{\frac{m-3}{3}}\right]\right\}.$$

Setzt man jetzt

$$S_{2n} = \frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\cdots+\frac{1}{j^{2n}},$$

$$T_{2n} = \frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots+\frac{1}{k^{2n}},$$

$$U_{2n+1} = \frac{1}{1^{2n+1}}-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\cdots+\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^{2n+1}},$$

$$V_{2n} = \frac{1}{1^{2n}}-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\cdots+\frac{(-1)^{j+1}}{j^{2n}},$$

integrirt Φ $2n$-mal und $(2n+1)$-mal nach φ zwischen den Grenzen 0 und φ und setzt dann $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, so erhält man Beziehungen zwischen T und S einerseits und zwischen U und S andererseits; durch Vergleichung der von π unabhängigen Glieder gewinnt man Ausdrücke für T_{2n} und U_{2n+1}, durch Vergleichung der $\frac{1}{2}\pi$ enthaltenden Glieder dagegen eine Entwickelung von S_{2n}. Es ist z. B. für ein ungerades m:

$$S_{2n} = \frac{m(m^2-1^2)}{4}\left\{\frac{1}{3!}\binom{2}{0}-\frac{m^2-3^2}{2^2.5!}\left[\binom{4}{1}-\binom{4}{0}\frac{1}{2^{2n}}\right]\right.$$

$$+\frac{(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^4 7!}\left[\binom{6}{2}-\binom{6}{1}\frac{1}{2^{2n}}+\binom{6}{0}\frac{1}{3^{2n}}\right]$$

$$-\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{(m^2-3^2)\ldots(m^2-[m-2]^2)}{m!2^{m-3}}$$

$$\left.\times\left[\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}}-\binom{m-1}{\frac{m-5}{2}}\frac{1}{2^{2n}}-\cdots+\frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^{2n}}\right]\right\}.$$

Auch diese Gleichungen werden mittels derselben Relationen umgeformt.

Im Abschnitt II behandelt der Verfasser Reihen mit ungeradem Exponenten und Zeichenfolge, sowie Reihen mit geradem Exponenten und Zeichenwechsel in ähnlicher Weise, wobei er von bekannten Formeln für

$$\cos\varphi - \cos 3\varphi + \cos 5\varphi - \cdots + (-1)^{\frac{m-2}{2}} \cos(m-1)\varphi$$

und

$$\sin 2\varphi - \sin 4\varphi + \sin 6\varphi - \cdots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \sin(m-1)\varphi$$

ausgeht. Wz.

Fr. Rogel. Ueber den Zusammenhang der Facultäten-Coefficienten mit den Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen. Hoppe Arch. (2) X. 318-332.

Bedeutet C_k^n den k^{ten}, aus den Elementen 1, 2, 3, ..., $n-1$ gebildeten Facultäten-Coefficienten, B_1, B_2, ... die Bernoulli'schen Zahlen, so ergiebt sich aus der bekannten Formel

$$C_k^n = (-1)^k \binom{a-1}{k} \left[D^k \left(\frac{v}{e^v - 1} \right)^n \right]_{v=0}$$

die Relation:

$$C_k^n = (-1)^k \binom{n-1}{k} k! \, \Sigma \frac{n! \left(\frac{B_1}{2!}\right)^\gamma \left(-\frac{B_2}{4!}\right)^\delta \cdots \left((-1)^{r+1} \frac{B_r}{(2r)!}\right)^\varkappa}{\alpha! \, (-2)^\beta \beta! \, \gamma! \, \delta! \, \ldots \, \varkappa!},$$

wo $n = \frac{k}{2}$ und $\frac{k-1}{2}$ ist, je nachdem k gerade oder ungerade ist, und für α, β alle möglichen, für γ, δ, .., alle möglichen geraden, den Bedingungen

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots + \varkappa = n,$$
$$\beta + 2\gamma + 4\delta + \cdots + 2r\varkappa = k$$

entsprechenden ganzen Zahlen zu setzen sind.

Eine andere Darstellung von C_k^n durch die Bernoulli'schen Zahlen ist

$$C_k^n = k! \, n! \binom{n-1}{k} \Sigma \frac{(-1)^{\frac{\varrho}{2}+r} B_{\frac{\varrho}{2}-r+1}}{2^\sigma (\sigma!)^s r! \, (s-\sigma)!},$$

wo r, s und ϱ, σ den Bedingungen

$$r+s=n, \quad \varrho \geqq 2r$$

und gerade

$$\varrho+\sigma=k, \quad \sigma \leqq s$$

zu genügen haben.

Beide Formeln werden specialisirt.

Bezeichnen E_1, E_2, ... die Euler'schen Zahlen, so ist für $r=4\nu$

$$E_1 C_{4\nu-2}^{4\nu} - E_2 C_{4\nu-4}^{4\nu} + E_3 C_{4\nu-6}^{4\nu} - \cdots + E_{2\nu-1} C_2^{4\nu} - E_{2\nu} C_0^{4\nu}$$
$$= (-1)^{\nu+1} \frac{(4\nu)!}{4^\nu};$$

für $r = 4\nu+1$, $4\nu+2$, $4\nu+3$ ergeben sich ähnliche Relationen.

Wz.

W. J. C. Miller, Fr. Rogel. Solution of question 7099. Ed. Times LIV. 92-93.

Die ursprünglich von Hrn. Miller gestellte und schon früher von mehreren Mathematikern gelöste Aufgabe (vgl. F. d. M. XV. 1883. 199) verlangte die Summation der Reihe

$$\frac{\sin^3\theta}{1^4} - \frac{\sin^3 3\theta}{3^4} + \frac{\sin^3 5\theta}{5^4} - \cdots$$

und Herleitung eines Ausdrucks für π^4 aus der Summenformel. Hr. Rogel verallgemeinert die Aufgabe durch Einführung der Bernoulli'schen Function $\varphi(\theta, 2n)$, gewinnt dadurch allgemeinere Reihen und mit Hülfe derselben die Formeln:

$$\pi^{2n} = \frac{(2n)!\sqrt{2}}{(-1)^{n-1}[2^{2n}\varphi(\frac{1}{8}, 2n) - \varphi(\frac{1}{4}, 2n)] + (2^{2n}-1)B_n}$$
$$\times \left\{\frac{1}{1^{2n}} - \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}} - - \cdots\right\},$$

$$\pi^{2n-1} = \frac{(2n-1)!\sqrt{2}}{2^{2n-1}\varphi(\frac{1}{8}, 2n-1) - \varphi(\frac{1}{4}, 2n-1)}$$
$$\times \left\{\frac{1}{1^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} - \frac{1}{5^{2n-1}} - \frac{1}{7^{2n-1}} + + \cdots\right\}.$$

Lp.

O. Sonat. Summirung n^{ter} Potenzen ganzer natürlicher Zahlen. Pr. Brzezavy. 1890. 3-18. (Polnisch.)

Alex. Berger. Om en användning af de Bernoulliska funktionerna vid några serientvecklingar. Stockh. Öfv. XLVIII. 523-540.

Wenn eine Function $g(h)$ für alle ganzen positiven h und k die Bedingung $g(h)g(k)=g(hk)$ erfüllt und $g(1)=1$ ist, so gilt für eine beliebige Function $f(x)$ die Formel

$$f(x)=\sum_{h=1}^{h=\infty}\varepsilon_h g(h)\sum_{k=1}^{k=\infty}g(k)f(hkx)$$

für alle x, welche absolute Convergenz geben ($\varepsilon_h=0,\ +1,\ -1$, je nachdem h gleiche Factoren >1 enthält, oder eine gerade resp. ungerade Anzahl durchaus verschiedener Primfactoren >1 hat; $\varepsilon_1=1$). Nachdem der Verf. dies bewiesen und einige Mitteilungen über Bernoulli'sche Functionen gemacht hat, werden diese Functionen benutzt, um in speciellen Fällen, z. B. für

$$g(h)=\frac{1}{h^m},\quad f(x)=e^{2\pi xi}+(-1)^m e^{-2\pi xi}\qquad (m>1),$$

die obige Doppelreihe auf eine einfache Reihe zu reduciren.

Bdn.

J. W. L. Glaisher. Note on the sums of even powers of even and uneven numbers. Mess. (2) XX. 172-176.

Hr. Glaisher macht auf den Umstand aufmerksam, dass die beiden Summen:

$$2^{2r}+4^{2r}+6^{2r}+\cdots+k^{2r},$$
$$1^{2r}+3^{2r}+5^{2r}+\cdots+k^{2r},$$

in deren erster k eine gerade Zahl bedeutet, während es in der zweiten ungerade ist, denselben Summenausdruck haben:

$$\frac{1}{2(2r+1)}\Big\{k^{2r+1}+\binom{2r+1}{1}k^{2r}+\binom{2r+1}{2}2^2B_1k^{2r-1}-\binom{2r+1}{4}2^4B_2k^{2r-3}$$
$$+\binom{2r+1}{6}2^6B_3k^{2r-5}-\cdots\pm\binom{2r+1}{2r}2^{2r}B_rk\Big\}.$$

Dem Beweise dieses Satzes folgen Bemerkungen über den Unterschied der ungeraden Potenzen sowie über gerade Potenzen der Glieder arithmetischer Progressionen ganzer Zahlen mit den Differenzen 3, 4, ... Lp.

H. W. RICHMOND. Note on the sum of functions of quantities which are in arithmetical progression. Mess. (2) XXI. 29-34.

Verallgemeinerung des von Hrn. Glaisher (vergl. das vorangehende Referat) gefundenen Satzes: „Wenn

$$\varphi(0)+\varphi(q)+\varphi(2q)+\cdots+\varphi(n)$$

als eine Function von n ausgedrückt wird, so ist die Summe der Reihe

$$\varphi(r)+\varphi(r+q)+\varphi(r+2q)+\cdots+\varphi(r+n)$$

dieselbe Function von n, vermehrt um eine numerische Constante“. Nach dem Beweise dieses Satzes wird jene Constante in mehreren Fällen bestimmt. Lp.

J. W. L. GLAISHER. On the sums of the inverse powers of the prime numbers. Quart. J. XXV. 347-362.

Es handelt sich um die Reihen:

$$(1)\qquad \Sigma_n = \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots,$$

$$(2)\qquad S_n = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\cdots.$$

Auf Grund der Formel

$$S_{2n} = \tfrac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2n}B_n}{(2n)!},$$

worin B_n die n^{te} Bernoulli'sche Zahl bezeichnet, werden die Werte von $\log S_{2n}$ bis auf 24 Stellen berechnet für $n=1, 2, 3, \ldots, 11$; sodann wird der Wert von S_{2n} für $n=12, 13, \ldots$ aus der Reihe (2) ermittelt:

$$S_{2n} = 1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\cdots$$

und daraus mittels der Correction

$$-\tfrac{1}{2}\frac{1}{4^{2n}}-\frac{1}{6^{2n}}-\tfrac{2}{3}\frac{1}{8^{2n}}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{9^{2n}}$$

$\log S_{2n}$ für $n = 12, 13, \ldots, 40$ bis auf 24 Stellen berechnet.

Zum Vergleiche wurde die angenäherte Formel

$$\log S_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\tfrac{1}{2}\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\tfrac{1}{3}\frac{1}{8^{2n}}+\tfrac{1}{2}\frac{1}{9^{2n}}+\frac{1}{10^{2n}}$$

benutzt. —

Auf Grund der Formel:

$$\Sigma_n = \log S_n-\tfrac{1}{2}\log S_{2n}-\tfrac{1}{3}\log S_{3n}-\tfrac{1}{5}\log S_{5n}+\tfrac{1}{6}\log S_{6n}-\tfrac{1}{7}\log S_{7n} +\tfrac{1}{10}\log S_{10n}-\tfrac{1}{11}\log S_{11n}-\cdots$$

werden sodann die Werte von Σ_n für $n = 2, 4, 6, \ldots, 80$ gleichfalls bis auf 24 Stellen berechnet. Zum Vergleiche wurde die Reihe (1) benutzt. Zur weiteren Verificirung wird von den Formeln

$$\Sigma_2-\tfrac{1}{2}\Sigma_4+\tfrac{1}{3}\Sigma_6-\tfrac{1}{4}\Sigma_8+\cdots = \log\left(\frac{15}{\pi^2}\right),$$

$$\Sigma_2+\tfrac{1}{2}\Sigma_4+\tfrac{1}{3}\Sigma_6+\tfrac{1}{4}\Sigma_8+\cdots = \log S_2$$

Gebrauch gemacht, und es werden die Werte von $\frac{1}{n}\Sigma_n$ für $n = 2, 4, \ldots, 74$ berechnet.

Nach einigen historischen Bemerkungen über Euler's und Merrifield's Zahlen werden noch Ausdrücke für

$$\frac{1}{B_n},\quad \frac{B_n}{B_{2n}},\quad \frac{B_n^2}{B_{2n}},$$

z. B.

$$2\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\cdot\frac{1}{B_n} = \left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\cdots,$$

und schliesslich die Formeln gegeben:

$$\Sigma_{2n}+\Sigma_{4n}+\Sigma_{6n}+\cdots = \frac{1}{2^{2n}-1}+\frac{1}{3^{2n}-1}+\frac{1}{5^{2n}-1}+\cdots,$$

$$\Sigma_{2n+2}+\Sigma_{2n+4}+\Sigma_{2n+6}+\cdots = \frac{1}{1.2^{2n}.3}+\frac{1}{2.3^{2n}.4}+\frac{1}{4.5^{2n}.6}+\cdots.$$

Wz.

J. W. L. GLAISHER. Calculation of the hyperbolic logarithm of π to thirty decimal places. — Addition to the paper. Quart. J. XXV. 362-368, 384.

In der an anderer Stelle (vgl. das vorangehende Referat) abgeleiteten Formel

$$2\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\frac{1}{B_n}=\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\cdots,$$

worin B_n die n^{te} Bernoulli'sche Zahl bedeutet, wird $n=10$ und 11 und resp.

$$B_{10}=\frac{283\times 617}{2.3.5.11},\quad B_{11}=\frac{11\times 131\times 593}{2\times 3\times 23}$$

gesetzt und $\log\pi$ bis auf 30 Stellen berechnet.

Der Verfasser bemerkt dazu, dass er selbst bereits früher (F. d. M. XV. 1883. 997) $\log\pi$ bis auf 48 Stellen berechnet habe (vergl. Euler's Introductio in analysin I, § 190 u. II, § 529).

Wz.

J. W. L. GLAISHER. On the series $\frac12+\frac13+\frac15+\frac17+\frac{1}{11}+$etc. Quart. J. XXV. 369-375.

Die Reihe:

$$\psi(x)=\tfrac12+\tfrac13+\tfrac15+\tfrac17+\cdots+\tfrac1x$$

ist gleich

$$g+\log\log x-\tfrac12\operatorname{li}x^{-\frac12}-\tfrac13\operatorname{li}x^{-\frac23}-\tfrac15\operatorname{li}x^{-\frac45}+\tfrac16\operatorname{li}x^{-\frac56}-\tfrac17\operatorname{li}x^{-\frac67}$$
$$+\tfrac{1}{10}\operatorname{li}x^{-\frac{9}{10}}\cdots,$$

wo g eine Constante ist. Für ein hinreichend grosses x kann man sich auf die beiden ersten Glieder beschränken.

Ebenso ist

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\cdots+\frac{1}{x^n}=g_n+\operatorname{li}x^{-n+1}-\tfrac12\operatorname{li}x^{-n+\frac12}-\tfrac13\operatorname{li}x^{-n+\frac13}$$
$$-\tfrac15\operatorname{li}x^{-n+\frac15}+\tfrac16\operatorname{li}x^{-n+\frac16}-\tfrac17\operatorname{li}x^{-n+\frac17}+\cdots,$$

wo

$$g_n=\Sigma_n=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots$$

ist. Ferner

$$\tfrac21\cdot\tfrac32\cdot\tfrac54\cdot\tfrac76\cdots\frac{x}{x-1}=a\log x\,(1-\tfrac12\operatorname{li}x^{-\frac12}-\tfrac13\operatorname{li}x^{-\frac23}-\cdots);$$

nach Legendre ist dies Product für einen grossen Wert von x angenähert gleich

$$\frac{A}{\log x - 0{,}08366}.$$

Setzt man für A den Wert 1,104, so ergiebt sich

$$a = \frac{2}{A} = 1{,}812.$$

Wz.

J. W. L. GLAISHER. On the series $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \cdots$. Quart. J. XXV. 375-383.

Es handelt sich um die Reihe

$$Y_1 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{19} + \tfrac{1}{23} - \cdots,$$

in welcher die Nenner die Primzahlen sind und das Vorzeichen + oder − ist, je nachdem diese Nenner $\equiv 3$ oder $\equiv 1$ (mod. 4) sind. Durch Y_n wird diejenige Reihe bezeichnet, welche hieraus entsteht, wenn jede Primzahl durch ihre n^{te} Potenz ersetzt wird.

Setzt man

$$u_n = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} + \cdots,$$

$$U_n = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \cdots,$$

so ist, falls n eine gerade Zahl ist:

$$Y_n = -\log u_n + \tfrac{1}{3}\log u_{3n} + \tfrac{1}{5}\log u_{5n} + \tfrac{1}{7}\log u_{7n} + \tfrac{1}{11}\log u_{11n} + \cdots$$
$$+ \tfrac{1}{2}\log U_{2n} - \tfrac{1}{6}\log U_{6n} - \tfrac{1}{10}\log U_{10n} - \tfrac{1}{14}\log U_{14n} - \tfrac{1}{22}\log U_{22n} - \cdots.$$

Der Verfasser beschäftigt sich dann auch mit den Reihen Y_n für ein ungerades n; berechnet $-\log u_n$ für $n = 1, 3, 5, \ldots, 25$, $\log U_n$ für $n = 2, 6, 10, 14, 18, 22$ und Y_n für $n = 1, 3, 5, \ldots, 25$.

Wz.

E. HUEBNER. Ueber die Umformung unendlicher Reihen und Producte mit Beziehung auf elliptische Functionen. Königsberg. 41 S. 4°.

F. THOMAN. Theory of compound interest and annuities, with a series of logarithmic tables. 4th ed. London.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Émile Picard. Traité d'Analyse. Tome I. Intégrales simples et multiples. L'équation de Laplace et ses applications. Développements en séries. Applications géométriques du calcul infinitésimal. Paris. Gauthier-Villars et Fils. XII u. 457 S. gr. 8°.

Obgleich über dem obigen Titel auch noch die Worte stehen: „Cours de la Faculté des Sciences de Paris", so haben wir es nicht mit einem Cours d'Analyse in der gewöhnlichen Bedeutung dieser Bezeichnung zu thun. Der Verf. will nicht einen Lehrgang der Differential- und Integralrechnung liefern, sondern ein grösseres Werk über die Theorie der Differentialgleichungen, welcher er ja seit einer Reihe von Jahren seine Thätigkeit zugewandt hat. Weil er hierzu aber manche Theorien braucht, die in einem ersten Vortrage über die Infinitesimalrechnung oft nur gestreift oder auch ganz vernachlässigt werden, so hat er den vorliegenden Band als einleitenden Teil zu jenem grösseren Werke geschrieben, das den Titel „Traité d'Analyse" führen soll. Bei dem Leser wird mindestens die Kenntnis der Differentialrechnung vorausgesetzt.

Von den drei Abschnitten des Bandes giebt der erste ein Darstellung der Grundlagen der Integralrechnung und verwei besonders bei der Entwickelung der Begriffe der bestimmte Integrale sowie der über eine Curve und eine Fläche zu er streckenden Integrale. Der zweite Abschnitt behandelt als An wendungen dieser allgemeinen Begriffe die Laplace'sche Diffe rentialgleichung und die Haupteigenschaften des Potentials, ferne manche Reihenentwickelungen, besonders die trigonometrische Reihen. Der dritte Abschnitt, ein Abdruck des lithographirte Cours des Verfs. von 1886/87, ist den geometrischen Anwen dungen der Infinitesimalrechnung gewidmet.

In mancher Hinsicht ähnelt dieser erste Band dem Cour d'Analyse des Herrn Hermite von 1873. Der Verf. will de Gegenstand nicht erschöpfen, wohl aber die verschiedenen Ge sichtspunkte beleuchten, unter denen der Stoff in der Neuzei betrachtet worden ist. Die Untersuchung ist nicht darauf ge richtet, alle für die Anwendungen wichtigen Sätze und Formeln fertig zu entwickeln, sondern bezweckt, dem Leser ein Bild von dem jetzigen Zustande der mathematischen Forschung vor die Augen zu stellen. Wo man nur in dem Buche zu lesen anfängt, überall spürt man die Arbeit des kenntnis- und gedankenreiche Functionentheoretikers, der einmal einen Gegenstand in ein ihm eigentümlichen Weise behandelt, ein anderes Mal die Er gebnisse der neueren Forschung anderer Geometer vorträg dann auch wieder zwar dem hergebrachten Wege folgt, dab aber neues Licht auf manche Punkte fallen lässt und Ausblic auf andere Gebiete eröffnet. Der angehende Mathematiker ka aus der Beschäftigung mit diesem Buche viele Anregung e halten. Lp.

H. Laurent. Traité d'analyse. Tome VII. Calc intégral. Applications géométriques de la théorie d équations différentielles. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 339 S.

Der gegenwärtige siebente Band macht den Beschluss d umfangreichen Werkes, über dessen Fortschreiten seit d

Erscheinen des ersten Bandes (F. d. M. XVII. 1885. 236) regelmässig berichtet worden ist.

Das erste Capitel behandelt die Untersuchung der Curven, die man auf einer gegebenen Oberfläche ziehen kann. Das zweite ist der sphärischen Geometrie gewidmet. Das dritte beschäftigt sich mit den krummlinigen Coordinaten auf einer Oberfläche, das vierte mit denen im Raume. Die Theorie der geradlinigen Oberflächen giebt das Thema des fünften Capitels und die Liniengeometrie für das sechste.

Wie man sieht, behandelt dieser Band zum Teil Gebiete, in denen Hr. Darboux mit seinem Werke Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal als unbestrittener Meister gilt. — Wenn Ref. in der Anzeige des ersten Bandes seine abweichende Meinung in Betreff der Citate glaubte aussprechen zu müssen, so bietet die historische Note über Liniengeometrie Veranlassung, dieses Urteil zu wiederholen. Zunächst hebt der Verf. Monge als Schöpfer der Congruenzen, Malus als den der Complexe hervor. Dann giebt er eine Liste der Werke, die man zu Rate ziehen könne, in der neben Hamilton, Kummer (Nouv. Ann. von 1860, 61, 62 als Quelle, also fehlen die algebraischen Strahlensysteme), Plücker, Klein genannt werden: Picard, Koenigs, Ribaucour, Genty, Léauté. Wie viele Namen müssten wir ergänzen, wenn wir alle Verfasser von Arbeiten nennen wollten, die wenigstens eben so viel für die Liniengeometrie geleistet haben wie diese letzten französischen Geometer! Lp.

Ch. Hermite. Cours de la Faculté des Sciences de Paris sur les intégrales définies, la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, et les fonctions elliptiques. Rédigé par M. Andoyer. 4e éd., entièrement refondue. Paris. Hermann. Lithographié. 294 S. 4°.

Anzeige in Darboux Bull. (2) XV. 253-255. „Die vierte Auflage dieses Lehrganges, für den es sehr unnütz ist, von neuem eine Bewunderung auszusprechen, die jetzt allgemein

besteht, ist von seinem erlauchten Verfasser mit sehr wichtigen Zusätzen bereichert worden". Lp.

A. G. GREENHILL. Differential and integral calculus, with applications. Second edition. London. Macmillan and Co. XIX + 455 S. 8°.

Das vorliegende Lehrbuch soll die Infinitesimalrechnung in möglichster Vollständigkeit und Fasslichkeit nicht bloss für den Mathematiker vortragen, sondern auch für Techniker und Offiziere, also für solche Berufszweige, in denen die Mathematik als Hülfswissenschaft auftritt. Der Verfasser, Professor der Mathematik an der Seniorenklasse der Artillerie-Offiziere zu Woolwich, hat offenbar gerade für das in dieser letzteren Hinsicht Notwendige viele Erfahrungen gesammelt, und sein Werk trägt den Stempel einer energischen und zielbewussten Lehrerpersönlichkeit.

Legt man an sein Buch den Massstab strenger Wissenschaftlichkeit, etwa in dem Geiste von Harnack's Elementen der Differential- und Integralrechnung, so wird man vieles zu tadeln haben und der schneidigen Kritik zustimmen müssen, welche Hr. Chrystal in Nature XLIV. 170-172 ausgesprochen hat, und die darin gipfelt, dass Hr. Chrystal meint, zur Abfassung eines solchen Buches bedürfe es nicht eines Gelehrten von dem Range des Herrn Greenhill. Ref. erlaubt sich, darin anderer Meinung zu sein, und gesteht unumwunden, trotz oder vielleicht wegen einer nun zwanzigjährigen Thätigkeit an einer militärischen Unterrichtsanstalt doch vieles aus dem Buche gelernt zu haben, und empfiehlt es seinen deutschen Collegen zu häufigem Gebrauche. Gerade weil manches abweichend von dem Lehrgange in den üblichen Musterlehrbüchern dargestellt ist, regt dieser Lehrgang zur Prüfung des Vorhandenen an, und das Praktische an ihm, welches offenbar schon oft erprobt ist, wird nicht verfehlen, zur Belebung und Umgestaltung manches Einzelnen beizutragen.

Der Inhalt verteilt sich auf sieben Capitel: I. Differentiation. II. Integration. III. Höhere Differentialquotienten. IV. Entwickelung der Functionen. V. Partielle Differentiation und Inte-

gration. VI. Curven im allgemeinen. VII. Integration im allgemeinen. Dieser mageren Aufzählung sieht man nicht an, welche Menge von Stoff abgehandelt ist. In jedem Capitel werden die Anwendungen auf die Analysis, Geometrie, Mechanik, Astronomie sofort herbeigezogen und bis auf neueste Erscheinungen erläutert. Eine grosse Zahl von Uebungsaufgaben wird dem Leser zur Bearbeitung vorgelegt; bei den schwierigeren werden die Lösungen beigegeben. Die Hyperbelfunctionen sind durchweg neben den Kreistranscendenten behandelt und in ihrer praktischen Verwendbarkeit für Geometrie und Mechanik beleuchtet. Bei der Integralrechnung, die als Umkehrung der Differentialrechnung gleich im zweiten Capitel gelehrt wird, findet man sofort die bekannten geometrischen Anwendungen, Bestimmungen von Schwerpunkten und Trägheitsmomenten. Im vierten Capitel über die Reihenentwickelungen sind die Tangenten- und Secanten-Reihen abgeleitet nebst den Bernoulli'schen Zahlen, endlich die ersten Glieder vieler Entwickelungen, wie z. B. $\operatorname{tg}(\sin x)$, $\sin(\operatorname{tg} x)$, $\sqrt[x]{1+x}$ u. s. w. Wenn neben den infinitesimalen Methoden zur Lösung einer Aufgabe andere zu empfehlen sind, so unterlässt der Verfasser nicht, darauf hinzuweisen und ihre Vorzüge zu erörtern. Ref. ist überzeugt, dass ein Studirender, der dieses Lehrbuch durchgearbeitet hat, in den sicheren Besitz des Mechanismus der elementaren Differential- und Integralrechnung gekommen ist, und dass er ausserdem sein Wissen in der Geometrie und Mechanik bedeutend erweitert hat. Es ist erfreulich, dass aus dem Vaterlande Newton's ein vorzugsweise praktisches Werk über die Differentialrechnung zu uns kommt. Die Schärfung der Begriffe pflegt bei unseren Studenten ja auch erst in den Collegien über Functionentheorie zu kommen. Lp.

Axel Harnack. An introduction to the study of the elements of the differential and integral calculus. From the German of the late A. H. With the permission of the author. London and Edinburgh. William and Norgate. X + 404 S. gr. 8°.

Hr. George L. Cathcart, der Uebersetzer der Harnack'schen Elemente der Differential- und Integralrechnung, teilt in der Vorrede den Brief vom 15. März 1888 mit, in welchem der schon dem Tode geweihte jugendliche Verfasser seine Einwilligung zur Uebersetzung sowie das Versprechen gab, die ihm nötig scheinenden Abänderungen in dem Masse zu senden, wie die Uebersetzung fortschritte. Der am 3. April 1888 eingetretene Tod bereitete diesen Plänen wie so manchen anderen ein jähes Ende. Hr. Voss, der Freund und Biograph des Verstorbenen, konnte dem Uebersetzer nur wenige Blätter senden, die in der That fertig gemacht worden waren, und die in die englische Uebersetzung Aufnahme gefunden haben. Obschon in der von Harnack besorgten deutschen Uebersetzung von Serret's Cours de calcul différentiel et intégral manche ausführlichen Zusätze die Richtung angaben, nach der in dem eigenen Werke des Verfassers Aenderungen hätten gemacht werden können, hat der Uebersetzer in Uebereinstimmung mit Hrn. Voss es mit Recht vorgezogen, unter den gegebenen Umständen lieber den ursprünglichen Text wiederzugeben. Dass sich in England jetzt Liebhaber für diese strenge Richtung der Mathematik finden, ist ein bedeutsames Zeichen für die Rückwirkung der deutschen Mathematik auf das grossbritannische Inselreich. Lp.

F. Frenet. Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal à l'usage des candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale, des élèves de ces écoles, et des aspirants à la licence ès sciences mathématiques. Ve édition, augmentée d'un appendice sur les résidus, les fonctions elliptiques, les équations aux dérivées partielles, les équations aux différentielles totales, par M. H. Laurent. Paris. Gauthier-Villars et Fils. XIV u. 536 S. gr. 8°.

Unter den Aufgabensammlungen für die Infinitesimalrechnung nimmt die Frenet'sche seit ihrem ersten Erscheinen (1856) eine hohe Stelle ein; sie verdient die allgemeine Wertschätzung wegen

der Reichhaltigkeit und Mannigfaltigkeit der Beispiele, wegen ihrer sorgfältigen Anordnung, die stufenweise von den blossen Rechenaufgaben zu den schwierigeren Anwendungen führt, und wegen der vielen litterarischen Notizen, welche dieses Werk zu einer vortrefflichen Ergänzung jedes Lehrbuchs machen.

Die erste Auflage enthielt Anwendungen mancher Theorien, welche damals noch nicht in den französischen Prüfungsprogrammen gefordert wurden. Infolge der inzwischen erhöhten Anforderungen sind aber nicht nur jene Theorien in die Programme aufgenommen worden, sondern die Prüfungsordnungen gehen sogar darüber hinaus und enthalten jetzt u. a. die Eigenschaften der Functionen einer complexen Veränderlichen, die Integration auf beliebig vorgeschriebenem Wege und die Elemente der Theorie der elliptischen Functionen. Herr H. Laurent, der bekannte Mathematiker und Verfasser des eben beendigten siebenbändigen Traité d'Analyse, hat sich auf die Bitte des Herrn F. der Mühe unterzogen, die Sammlung nach dieser Richtung hin zu vervollständigen. Ein Anhang mit Aufgaben (Nr. 687-725) über die Residuenrechnung, über die elliptischen Functionen und über partielle und totale Differentialgleichungen ist daher neu hinzugekommen, sodass der Band gegen 458 Seiten der vierten Auflage jetzt 536 umfasst. Für die ausgedehnten Theorien ist dieser Anhang zwar nur kurz, immerhin aber ein dankenswerter Anfang zu Uebungsaufgaben. Lp.

H. Dölp. Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten und den zur Lösung nötigen theoretischen Erläuterungen. Fünfte Auflage. Giessen. J. Ricker'sche Buchh. IV + 209 S. 8°.

Als gut geordnete Sammlung von nicht zu schweren Beispielen, deren Lösung für einen ersten Cursus in der Differential- und Integralrechnung ausreicht, hat sich das vorliegende Werk neben der reichhaltigeren Sammlung von Sohncke sowie neben den weiteren von Schlömilch und Fuhrmann behauptet. Vielleicht kommt dem Buche auch zu statten, dass es in den den Aufgaben

vorangeschickten Lehren eine Art kurz gefasstes Lehrbuch enthält. Jedenfalls ist daraus zu ersehen, dass ein recht elementar abgefasstes Werk den Bedürfnissen vieler Studirenden entgegenkommt. Lp.

F. Bergbohm. Neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik. Stuttgart. Selbstverlag. 30 S. gr. 8°.

Die beim Differentiiren und Integriren geübten infinitesimalen Operationen hält der Verfasser im weiteren Umfange für unbekannt, weil er sie nur für diesen Zweck angewandt gefunden hat, und giebt ihnen neue Namen. H.

P. Mansion. Limite de la somme, du produit, ou du quotient d'un nombre fini de variables. Mathesis (2) I. 35-39, 63-66, 113-115, 139-141, 246-251.

Elementare Darstellung, auch für den Fall incommensurabler Variabeln. Mn. (Lp.)

Weitere Lehrbücher.

F. d'Arcais. Corso di calcolo infinitesimale. Vol. I. Padova. Draghi. 622 S. gr. 8°. [Rivista di Mat. I. 19-21.]

Boucharlat. Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral. 9e éd., revue et annotée par H. Laurent. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Demartres. Cours d'analyse. Partie I. Fonctions de variables réelles. Lille. 194 S. lith.

T. Hugh Miller. An introduction to the differential and integral calculus. London. Percival and Co. 92 S. 8°. [Nature XLV. 52.]

G. A. Osborne. Elementary treatise on the differential and integral calculus. Boston. XI + 292 S. 8°.

STOFFAES. Cours de mathématiques supérieures à l'usage des candidats à la licence ès sciences physiques. Paris. VII + 431 S. gr. 8°.

B. WILLIAMSON. Elementary treatise on the integral calculus. 6th ed. London. 476 S. 8°.

Capitel 2.
Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

E. CARVALLO. Formule des différences et formule de Taylor. Nouv. Ann. (3) X. 24-29.

Giebt man in der Function $u = f(x)$ dem Argument x die Werte x, $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$, ..., $x+n\Delta x$ und bildet die Werte der Function und ihrer successiven Differenzen, so erhält man die Formel:

$$u_n = u_0 + C_n^1 \Delta u_0 + C_n^2 \Delta^2 u_0 + \cdots + C_n^{p-1} \Delta^{p-1} u_0 + Q_p,$$

wo

$$Q_p = C_{n-1}^{p-1} \Delta^p u_0 + C_{n-2}^{p-1} \Delta^p u_1 + \cdots + C_{p-1}^{p-1} \Delta^p u_{n-p}.$$

Hieraus kann man die Taylor'sche Reihe herleiten; es ergieb sich z. B.

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + R_3,$$

$$R_3 = \int_x^{x+h} dz \int_x^z dz \int_x^z f'''(z)\, dz.$$

Der Verfasser hält es überhaupt für vorteilhaft, die Differential- und Integral-Rechnung durch die Differenzenrechnung zu begründen. Wz.

FR. ROGEL. Ableitungen von Identitäten. Hoppe Arch. (2) X. 209-219.

Der n^{te} Differentialquotient einer Function, die sich in eine Reihe

$$ax^r + bx^{r+k} + \cdots$$

entwickeln lässt, verschwindet gleichzeitig mit x, wenn $n < r$ ist. Dies kann zur Ableitung von Identitäten benutzt werden. Derartige Functionen können aus elementaren gebildet werden, 1) dadurch dass das Argument y einer Function

$$\varphi(y) = 1 + \alpha y + \beta y^2 + \cdots$$

durch die r^{te} Potenz einer zweckmässig gewählten Function $ax + bx^2 + \cdots$ ersetzt wird, 2) dadurch dass eine Function $\psi(x)$ selbst zur r^{ten} Potenz erhoben wird.

Mittels der Functionen

$$[(1+x)^{-n} - 1]^r, \quad (e^x - 1)^r, \quad (e^{k \arcsin x} - 1)^r, \quad \sin^r x;$$
$$\cos\mu x, \quad \sin\mu x, \quad \sin\mu x \sec x, \quad \cos\mu x \sec x,$$
$$2 \frac{1+x}{2+2x+x^2}, \quad \frac{\log(1+x)}{x}$$

werden einige Identitäten abgeleitet. Wz.

E. B. Elliott. On the reversion of partial differential expressions with two independent and two dependent variables. Lond. M. S. Proc. XXII. 79-104.

Zwischen den 4 Variabeln x, y, x', y' sind 2 Relationen gegeben, vermöge deren x und y als Functionen der Unabhängigen x', y' und x' und y' als Functionen der Unabhängigen x, y betrachtet werden. Es werden sehr viele Beziehungen zwischen den partiellen Differentialquotienten von x, y in ersterer und denen der x', y' in letzterer Auffassung gefunden, die in symbolischer Form ziemlich einfach dargestellt erscheinen.

H.

G. B. M. Zerr, H. J. Woodall, J. L. Kitchin. Solution of question 10482. Ed. Times LIV. 38.

Bezeichnet man $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ durch y, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x - xy \,.\, lx}.$$

Die gleiche Ableitung nach x besitzen auch a^y und e^y.

Lp.

A. CAYLEY, J. D. H. DICKSON. Solution of question 10682. Ed. Times LIV. 90-91.

Ist ω eine imaginäre Kubikwurzel aus 1 und

$$y = \frac{(\omega-\omega^2)x+\omega^2x^2}{1-\omega^2(\omega-\omega^2)x^2},$$

so ist

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+\omega y^2)}} = \frac{(\omega-\omega^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+\omega x^2)}}.$$

Lp.

R. HOPPE. Relation der Flächenwinkel des Tetraeders. Hoppe Arch. (2) X. 102-110.

R. HOPPE. Maximum der Ecken eines Tetraeders für den Fall ihrer Gleichheit. Hoppe Arch. (2) X. 111-112.

R. HOPPE. Momentane Variation der Eckensumme bei Deformation des regelmässigen Tetraeders. Hoppe Arch. (2) X. 220-221.

Die Flächenwinkel eines Tetraeders seien α, β, γ, δ, ε, ζ, ihre Cosinus a, b, c, d, e, f, und zwar sei die um $2R$ vermehrte Ecke

$$A = \beta+\gamma+\delta;\quad B = \gamma+\alpha+\varepsilon;\quad C = \alpha+\beta+\zeta;\quad D = \delta+\varepsilon+\zeta.$$

Die ebenen Winkel seien nach den Kanten der Flächenwinkel benannt, so dass

$$\text{Winkel } (\beta\gamma)+(\gamma\alpha)+(\alpha\beta) = 2R.$$

Da nun nicht mehr als 5 Winkel des Tetraeders unabhängig sein können, so muss zwischen den 6 Flächenwinkeln des Tetraeders eine Relation bestehen. Es ist folgende:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2-(a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)$$
$$+2(bcd+cae+abf+def)+2(be.cf+cf.ad+ad.be) = 1.$$

Durch Discussion dieser Gleichung ergiebt sich weiter: Wenn a, b, c, d, e, f Cosinus reeller Winkel sind und diese Gleichung erfüllen, so entsprechen je drei, die kein Paar Gegenwinkel enthalten, bedingungslos einer reellen Ecke, mithin alle zusammen einem reellen Tetraeder.

Es entsteht die Frage: Wenn 5 Grössen Cosinus sind, d. h. zwischen 1 und -1 liegen, ob auch die resultirende 6[te] diese Bedingung erfüllt.

Ist $a = b = c = d = e$, so ergiebt sich: Sind die Ecken eines Tetraeders von gleicher Grösse, so sind sie auch congruent; zugleich sind dann auch die Seiten des Tetraeders congruent.

Weiter wird bewiesen, dass die Summe der Cosinus der 6 Flächenwinkel für das regelmässige Tetraeder ein Maximum ist. Es ist jedoch hieraus nicht zu folgern, dass die Summe der Flächenwinkel, mithin auch die Summe der 4 Ecken ein Minimum sei. Denn das Differential der letzten Summe ist zwar Null, dagegen sind die übrigen Bedingungen des Minimums nicht erfüllt. Hieraus ersieht man, dass sich das ganze System der möglichen Variationen in Bezirke teilt, in deren einigen jene Grösse ein Maximum, in allen übrigen mit Ausschluss der Grenzen ein Minimum ist. Wz.

E. M. Langley, R. Chartres, J. J. Barniville. Solution of question 10210. Ed. Times LIV. 43-44.

Einen Punkt E innerhalb eines Dreiecks ABC zu finden, sodass $l.AE + m.BE + n.CE$ ein Minimum ist, während l, m, n drei positive Zahlen sind, von denen je zwei zusammen grösser als die dritte sind. — Ueber BC construire man nach aussen ein Dreieck BCD, sodass $BC : CD : DB = l : m : n$, beschreibe den Umkreis von BCD, dann ist der Schnittpunkt E der Geraden AD mit diesem Umkreise der verlangte Punkt ($l.AE + m.BE + n.CE$ ist dann gleich $l.AD$). Auf die sonstigen Schwierigkeiten der Aufgabe, die von dem Falle $l = m = n$ her bekannt sind (vergl. Sturm, „Ueber den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten", J. für Math. XCVII. 49-61), ist nicht weiter eingegangen. In Ed. Times LV. 38 wird zufolge der Frage 10418 dieser bekannte Umstand wieder erörtert. Lp.

E. Catalan, Anderson, J. Beyens. Solution of question 10593. Ed. Times LIV. 91-92.

Einem Kreisvierecke kann man bekanntlich unendlich viele Vierecke kleinsten Umfanges einbeschreiben; dieses Minimum des Umfanges ist die vierte Proportionale zu dem Radius und den beiden Diagonalen. Lp.

P. Schiermacher. Kriterien des Maximums und Minimums einer Function zweier unabhängigen Veränderlichen für den Fall, wenn $\frac{1}{2}d^2f$ ein vollständiges mit einer Constante multiplicirtes Quadrat ist. Kiew Univ. Nachr. 1891. No. 9. 1-12.

Für diesen zuerst von Herrn G. Peano (A. Genocchi's Calcolo differenziale. Pubblicato con aggiunte dal G. Peano, 1884) hervorgehobenen, dann von Herrn Posse (Mosk. Math. Samml. XIV. 591-599, F. d. M. XXII. 1890. 286) besprochenen Fall werden von Herrn P. Schiermacher folgende Kriterien aufgestellt:

$$(1) \qquad \frac{1}{2.3}d^3f = \omega_1.\omega_2,$$

wo

$$d^2f = Ah^2+2Bhk+Ck^2 = A\left(h+\frac{B}{A}\right)^2 = A.\omega_1^2;$$

$$(2) \qquad \frac{A}{2.3.4}d^4f - \frac{\omega_2^2}{4} > 0 \quad \text{für} \quad h = -\frac{B}{A}k.$$

Ist

$$\frac{A}{2.3.4}d^4f - \frac{\omega_2^2}{4} < 0,$$

so hat die Function weder Maximum noch Minimum. Der Fall

$$\frac{A}{2.3.4}d^4f - \frac{\omega_2^2}{4} = 0 \quad \text{für} \quad h = -\frac{B}{A}k$$

bedarf weiterer Betrachtungen. Wenn das Zeichen von Gliedern $(2n)^{\text{ter}}$ Ordnung abhängt, d. h. wenn sich

$$\tfrac{1}{2}d^2f+\frac{1}{2.3}d^3f+\cdots+\frac{1}{(2n-3)!}d^{2n-3}f+\frac{1}{(2n-2)!}d^{2n-2}f$$

von

$$A\left[\omega_1+\frac{\omega_2}{2A}+\frac{\omega_3}{2A}+\cdots+\frac{\omega_{2n-4}}{2A}+\frac{\omega_{2n-3}}{2A}\right]^2$$

nur in Gliedern $(2n-1)^{\text{ter}}$ und höherer Ordnungen unterscheidet, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein, damit $f(x, y)$ ein Maximum oder Minimum habe; für $h = -\frac{B}{A}k$:

$$(1) \qquad \frac{1}{(2n-1)!}d^{2n-1}f - \frac{1}{4A}\sum_{r=2}^{r=2n-3}\omega_r.\omega_{2n-1-r} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{Ad^{2n}f}{2n!} - \tfrac{1}{4}\sum_{r=2}^{r=2n-2}\omega_r.\omega_{2n-r} > 0.$$

Hier sind:

$$\frac{1}{4!}d^4f - \frac{\omega_2^2}{4A} = \omega_1\omega_3; \quad \frac{1}{5!}d^5f - \frac{\omega_2\omega_3}{2A}\omega_1\omega_4;$$

$$\frac{1}{6!}d^6f - \frac{\omega_2\omega_4}{2A} - \frac{\omega_3^2}{4A} = \omega_1.\omega_5 \quad \text{u. s. w.}$$

Si.

O. Stolz. Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen. Wien. Ber. C. 1167-1181.

Nach einigen Bemerkungen und Zusätzen zu einer früheren, auf die Scheeffer'sche Methode zur Bestimmung der Maxima und Minima von Functionen bezüglichen Mitteilung (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 285) geht der Verfasser dazu über, eine demselben Zwecke dienende neue Methode zu entwickeln, deren Grundgedanke von Barbera herrührt. Es handle sich zunächst um eine Function von zwei Veränderlichen $f(x, y)$. Die Function sei in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ stetig und erreiche ihre obere Grenze, falls x constant gesetzt und y auf das Intervall $(-x, x)$ beschränkt wird, für $y = \varphi(x)$, und ebenso, falls y constant gesetzt und x auf das Intervall $(-y, y)$ beschränkt wird, für $x = \psi(y)$. Die Function $f(x, y)$ hat nun für $x = y = 0$ ein Maximum stets, und nur dann, wenn es eine positive Zahl δ von der Eigenschaft giebt, dass für $0 < |x| < \delta$ und $0 < |y| < \delta$ sowohl $f(x, \varphi(x))$ wie auch $f(\psi(y), y)$ kleiner als $f(0, 0)$ ist. Ein analoger Satz entscheidet über den Eintritt eines Minimums. Diese Sätze reichen nun vollständig aus, wenn $f(x, y)$ eine ganze rationale Function ist. Es müssen dabei (ähnlich wie bei der Scheeffer'schen Methode) die Puiseux'schen

Entwickelungen zu Hülfe gezogen werden. Auf den Fall, wo es sich um eine ganze rationale Function handelt, lässt sich sodann der andere, wo $f(x, y)$ nach Potenzen von x und y entwickelbar ist, vielfach zurückführen auf Grund eines vom Verfasser entwickelten Theorems. Der Verfasser erläutert die erhaltenen Resultate an mehreren Beispielen und legt schliesslich näher dar, wie die angestellten Betrachtungen auf Functionen von mehreren Variabeln übertragen werden können. Hz.

Ch. Cellérier. Note sur la détermination d'un minimum géométrique remarquable. Darboux Bull. (2) XV. 167-196.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, ein System von n inhaltsgleichen Körpern so zu bestimmen, dass die Gesamtoberfläche ein Minimum sei. Zur Erleichterung der in aller Strenge schwer lösbaren Aufgabe nimmt der Verfasser als selbstverständlich an, dass alle Körper völlig convex sind. Da die Körper lückenlos aneinander stossen sollen, so ist dies nur möglich, wenn alle Begrenzungsflächen Ebenen sind; und es wird bewiesen, dass in einer Kante sich stets drei unter 120° gegen einander geneigte Ebenen schneiden. Die vorkommenden körperlichen Ecken sind entweder drei-, vier- oder fünfkantig; doch wird im weiteren Verlauf gezeigt, dass die letzteren auszuschliessen sind. Auf die einzelnen Berechnungen der Seiten einzugehen, dürfte zu weit führen; es ergiebt sich schliesslich, dass die betreffenden Körper von je 12 Flächen begrenzt sind, von denen an entgegengesetzten Enden je drei Rhomben sich befinden, zwischen denen sich entweder wieder sechs Rhomben oder sechs gerade Trapeze, die auch in gleichschenklige Dreiecke degeneriren können, befinden.

Sh.

J. Petzoldt. Maxima, Minima und Oekonomie. (Sonderdruck.) Altenburg. Schnuphase'sche Hofbuchh. 78 S. 8°.

Capitel 3.

Integralrechnung.

E. Hossenfelder. Ueber die Reihenfolge gewisser Grenzoperationen in der Integralrechnung. Pr. (No. 41) Gymn. Strassburg i. Westpr. 27 S. 4°.

Es wird die Frage untersucht, unter welchen Bedingungen der Grenzwert des Integrals einer mit einem Parameter variirenden Function gleich ist dem Integral des Grenzwerts der Function. Mit dieser Frage haben sich bereits Stolz und Harnack beschäftigt, auf deren Arbeiten der Verfasser in jedem Punkte eingeht; ausserdem wird eine von U. Dini angeführt. Von den häufigen Anwendungen der genannten Gleichheit ohne Erwähnung ihrer bedingten Geltung und ohne Beweis ihrer Richtigkeit in den betreffenden Fällen führt er kein Beispiel an. Da selbst Gauss in seiner bekannten Darstellung des Euler'schen Integrals als Grenzwert eines unendlichen Products die Frage mit Stillschweigen übergeht, so bedarf es wohl keines weiteren Nachweises für die Aussage des Verfassers, dass die Begründung bisher gefehlt hat. Im Gegenwärtigen wird nun die Erledigung der Frage im weitesten Umfang in Angriff genommen. Aus dem Begriffe des Grenzwertes folgt schon, dass für das Integral $\int_a^b f(x, q)dx$ die geforderte Gleichheit besteht, wenn $f(x, q)$ für alle x zwischen a und b gleichmässig gegen seinen Grenzwert convergirt, d. h. wenn bei hinreichender Annäherung von q an seine Grenze die Curven $y = f(x, q)$ für alle x in unendlich naher Umgebung von q zwischen denselben Grenzcurven liegen. Zur Vereinfachung des Ausdrucks entspricht hier stets $q = \infty$ dem Grenzwert von f. Es handelt sich nun um die Bedingungen jener Gleichheit für Fälle, wo das Intervall der x Punkte, umgeben von unendlich kleinen Intervallen ungleichmässiger Convergenz, enthält. Sind diese Punkte in unendlicher Anzahl vorhanden, so sind neue Unterscheidungen nötig. Die Praxis der Integralrechnung hat

nun eine Anzahl besonderer Fragen herbeigeführt, welche in der anfangs aufgestellten enthalten oder mit ihr verwandt sind. Von diesen werden folgende untersucht und zur Entscheidung gebracht. Die erste betrifft die Integration einer unendlichen Reihensumme durch Integration der Glieder, die zweite die Differentiation eines bestimmten Integrals, ausgeführt unter dem Integralzeichen, die dritte die Integration nach einem Parameter, die vierte das Doppelintegral über einen Flächenraum, ausgeführt durch zwei successive Integrationen, die fünfte die Vertauschung der Integrationsfolge bei unendlichen Grenzen. Gefragt wird, ob die angedeuteten Transformationen zulässig sind. Für sämtliche werden ausreichende Bedingungen ermittelt. H.

F. Mertens. Ueber eine Substitution zur Rationalmachung von Differentialausdrücken, welche eine Quadratwurzel aus einer Function zweiten Grades enthalten. Monatsh. f. Math. II. 217-224.

Die Integration von Differentialen der 4 Formen

$$\frac{dx}{\sqrt{R}},\quad \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}},\quad \frac{dx}{R'\sqrt{R}},\quad \frac{x\,dx}{R'\sqrt{R}},$$

wo R und R' ganze Functionen zweiten Grades bezeichnen, wird durch Einführung der zwei Variabeln

$$s = \frac{1}{\sqrt{R}},\qquad t = \frac{x}{\sqrt{R}}$$

für x vollzogen. H.

C. A. Laisant. Détermination directe de l'intégrale

$$\int (\cos mx)^p (\cos m'x)^{p'} \dots (\sin nx)^q (\sin n'x)^{q'} \dots dx.$$

S. M. F. Bull. XIX. 8-11.

Die Cosinus und Sinus werden durch Exponentialfunctionen, und diese nach Ausführung aller Multiplicationen wieder durch Cosinus und Sinus dargestellt (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 269).

H.

J. L. W. V. JENSEN. Udvidelse af en Satning af Tschebyscheff. Nyt Tidss. IIB. 1-3.

Hr. Tschebyscheff hat den folgenden Satz bewiesen:

Wenn u und v positive Functionen von x sind, und wenn u und v in dem Intervall $a \dots b$ für wachsende x immer abnehmen, dann hat man

$$(b-a)\int_a^b uv\,dx > \int_a^b u\,dx \int_a^b v\,dx;$$

wenn dagegen die eine Function wächst, die andere abnimmt, so ist

$$(b-a)\int_a^b uv\,dx < \int_a^b u\,dx \int_a^b v\,dx.$$

Dieser Satz ist ein specieller Fall des folgenden Satzes:

Wenn $u_1, u_2, \dots; v_1, v_2, \dots; w_1, w_2, \dots$ drei Reihen positiver Grössen von der Beschaffenheit sind, dass

$$u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq \cdots \quad \text{und} \quad \frac{v_1}{w_1} \geqq \frac{v_2}{w_2} \geqq \frac{v_3}{w_3} \geqq \cdots,$$

dann hat man

$$\sum_1^n u_\nu v_\nu : \sum_1^n v_\nu > \sum_1^n u_\nu w_\nu : \sum_1^n w_\nu.$$

V.

J. DERUYTS. Rapport sur le mémoire de M. Beaupain intitulé: Sur quelques formules de calcul intégral. Belg. Bull. (3) XXI. 417-419.

Besprechung dieser Abhandlung, die in einer der Akademieschriften in 4° erscheinen soll. Mn. (Lp.)

Capitel 4.

Bestimmte Integrale.

M. LERCH. Zur Theorie der unendlichen Reihen. Prag. Ber. 250-254.

Die Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$, $h(x)$ seien im Intervalle $(a \dots \infty)$ positiv und im Endlichen integrabel; $\varphi(x)$ habe ausserdem im Intervalle $(a \dots \infty)$ überall einen positiven integrabeln Differentialquotienten und befriedige die Ungleichung $\varphi(x) > x$. Dann gilt der Satz:

Giebt es für eine gegebene Function $f(x)$ eine andere $h(x)$ und eine positive Constante μ, so dass die Ungleichung besteht:

$$\frac{f(x)h(x)}{\varphi'(x)f(\varphi)} - h(\varphi) > \mu \qquad (a \leqq x \leqq \infty),$$

so existirt das Integral:

$$\int_a^\infty f(x)dx.$$

Bezeichnet m_0 irgend eine Grösse, die $\varphi(a)$ übertrifft, und wird im Intervalle $(a \dots \infty)$ die unendliche Wertmenge $m_0, m_1, \dots, m_\nu, \dots$ durch die Gleichungen

$$m_1 = \varphi(m_0), \quad m_2 = \varphi(m_1), \quad m_3 = \varphi(m_2), \dots$$

definirt, bezeichnet endlich $h(m_\nu \dots m_{\nu+1})$ die obere Grenze der Werte, welche die Function $h(x)$ im Intervalle $(m_\nu \dots m_{\nu+1})$ annimmt, so gilt der Satz:

Wenn im Intervalle $(a \dots \infty)$ die Ungleichung

$$\frac{f(x)h(x)}{\varphi'(x)f(\varphi)} - h(\varphi) \leqq 0$$

besteht, und wenn ausserdem die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{h(m_\nu \dots m_{\nu+1})}$$

divergirt, so ist der Grenzwert des Integrals

$$\int_a^u f(x)dx$$

für $u = \infty$ nicht endlich.

Ausserdem verteidigt der Verfasser eine von ihm angegebene Reihe (vergl. F. d. M. XXI. 1889. 232-233) gegen eine Bemerkung des Herrn Pringsheim (Math. Ann. XXXV. 308).

Wz.

M. Lerch. Sur une extension de la formule de Frullani.
Prag. Akad. Verh. I₂. 123-131. (Böhmisch, mit franz. Résumé.)

Der Verfasser beweist die Frullani'sche Formel und ihre Verallgemeinerung:

$$\int_a^b [f(x)-f(\varphi)\varphi'(x)]dx = A\log\varphi'(a) - B\log\varphi'(b),$$

wo

$$A = \lim_{x=a}(x-a)f(x), \quad B = \lim_{x=b}(x-b)f(x)$$

ist und vorausgesetzt wird, dass $\varphi'(x)$ im Intervall $(a\ldots b)$ positiv ist. Hieraus ergiebt sich, wenn $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x)-x=0$ sind,

$$\int_{a_m}^{a_n} [F(x)-F(\varphi)\varphi'(x)]dx = A_m\log\varphi'(a_m) - A_n\log\varphi'(a_n),$$

wo

$$A_\alpha = \lim_{x=a_\alpha}(x-a_\alpha)F(x)$$

ist; ferner, wenn

$$F(x) = \frac{\Phi(x)}{\psi(x)-x}$$

gesetzt wird, worin $\psi(x)$ die Umkehrung von $\varphi(x)$ (also $\varphi(\psi)=x$) und Φ endlich ist,

$$\int_{a_m}^{a_n}\left[\frac{\Phi(x)}{\psi(x)-x} + \frac{\Phi(\varphi)\varphi'(x)}{\varphi(x)-x}\right]dx = \Phi(a_m)\log\frac{\varphi'(a_m)}{\psi'(a_m)-1} - \Phi(a_n)\frac{\log\varphi'(a_n)}{\psi'(a_n)-1}.$$

Endlich ist das Zeichen der reellen Grösse u

$$\operatorname{sgn} u = \frac{1}{\log a}\int_0^\infty \left(\frac{e^{aux}-1}{e^{aux}+1} - \frac{e^{ux}-1}{e^{ux}+1}\right)\frac{dx}{x};$$

und das Integral

$$\frac{1}{\log a}\int_0^\infty \frac{\left(\sin^2\frac{u\pi}{2}\right)^{ax} - \left(\sin^2\frac{u\pi}{2}\right)^x}{x}dx$$

hat den Wert 1, wenn u eine ungerade ganze Zahl ist, während es in allen andern Fällen verschwindet. Wz.

Worontzoff. Sur le développement des intégrales en séries. Nouv. Ann. (3) X. 158-162.

Durch Taylor'sche Reihenentwickelung wird folgender Ausdruck gewonnen:

$$\int_{a_0+b_0}^{a+b} F(x)dx = \int_{a_0}^{a} F(x)dx + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{b^k}{1.2\ldots k} F^{(k-1)}(a)$$

$$- \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{b_0^k}{1.2\ldots k} F^{(k-1)}(a_0) + h,$$

$$h = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\Big[\int_0^b F^{(n-1)}(a+b+z)z^{n-1}dz$$

$$- \int_0^{b_0} F^{(n-1)}(a_0+b_0-z)z^{n-1}dz\Big];$$

hieraus für $a+b = a_0+b_0 = c$ eine Formel für $\int_{a_0}^{a} F(x)\,dx$, daraus für $c = a+a_0$ ($b = a_0$, $b_0 = a$) eine andere, für $c = 0$ ein Satz von Bernoulli. Es folgen noch einige Specialisirungen und Transformationen des Restes. H.

R. Fujisawa. Note on a definite integral. Tokio Math. Ges. IV. 343.

Es ist:

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2a},$$

wie man leicht sieht, wenn man $x - \frac{a}{x} = y$ setzt. R. M.

E. Phragmén. Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de Riemann. Stockh. Öfv. XLVIII. 599-616.

Es wird Folgendes bewiesen:

Es sei $\varphi(x)$ eine reelle Function der reellen Variable x, a eine positive Constante $\geqq 1$; ferner nehme man an, dass

das Integral

$$\int_a^\infty \varphi(x) x^{-s-1} dx$$

endlich sei für alle s, deren reeller Teil positiv ist, und in der Nähe von $s=1$ durch eine Potenzreihe in $s-1$ mit Convergenzradius >1 sich darstellen lasse; wenn x_0 und δ beliebige positive Grössen sind, ist es nicht möglich, dass $|\varphi(x)|>\delta$ ist für jeden x-Wert $>x_0$. Die Function $\varphi(x)$ besitze ferner unendlich viele Discontinuitätspunkte x_ν, welche so beschaffen sind, dass, wenn m_ν eine positive Grösse ist $<$ alle Werte von $\varphi(x_\nu+h)-\varphi(x_\nu-0)$ für $0<h<h_\nu$, m_ν und h_ν so gewählt werden können, dass $x_\nu+h_\nu \leqq x_{\nu+1}$ wird und die Reihe $\Sigma \frac{x_\nu+h_\nu}{m_\nu h_\nu}$ divergirt; dann muss $\varphi(x)$ unendlich oft das Zeichen wechseln für x-Werte, welche grösser sind als eine beliebig grosse positive Zahl.

Nachher wird gezeigt, dass

$$\varphi(x) = f(x) - Li x + \log 2$$

sein kann, wo $Li x$ der „Integrallogarithmus" und $f(x)$ die von Riemann so bezeichnete zahlentheoretische Function ist.

Ausserdem betrachtet der Verf. gewisse andere Specialfälle des allgemeinen Satzes. Bdn.

E. Phragmén. Ueber die Berechnung der einzelnen Glieder der Riemann'schen Primzahlformel. Stockh. Öfv. XLVIII. 721-744.

Es wird gezeigt, wie man die Berechnung des „Integrallogarithmus" und einiger nahestehender Functionen auf das Tabuliren von zweckmässig gewählten verwandten Functionen reduciren kann. Für $Li x$ wird $e^{-x} Li e^x$ benutzt, für

$$\psi(\varkappa, x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^z \sin \varkappa z}{z} dz$$

zwischen gewissen Grenzen $\int_{-\infty}^1 \frac{e^{xz} z\, dz}{x^2+z^2}$ u. s. w.

Die hergeleiteten Formeln für $\psi(x, s)$ werden ausserdem benutzt, um die Riemann'sche Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\log\zeta(s)}{s}x^s ds$$

strenge zu beweisen. Bdn.

Frech. Integration einiger bestimmten Integrale auf complexem Wege. Pr. (No. 26) Gymn. Deutsch-Krone. 16 S. 4°.

Es wird die Theorie discutirt, und für jeden Fall die Rechnung an einem Beispiele in Ausführung gebracht. H.

M. Marie. Observations sur un mémoire de M. Henri Poincaré, publié en 1887, dans les „Acta Mathematica" de Stockholm, et relatif aux résidus des intégrales doubles. Nouv. Ann. (3) X. 77-82.

Der Verfasser bestreitet zwei Aufstellungen in der citirten Abhandlung des Hrn. Poincaré: 1) Die Perioden des Doppelintegrals $\iint\frac{PdXdY}{QR}$ seien die gemeinsamen der Residuen J und J'; 2) das Doppelintegral $\iint\frac{Pd\xi d\eta}{Q-\alpha}$ sei gleich dem einfachen Abel'schen Integral $J = 2i\pi\int\frac{Pd\xi}{\frac{\partial Q}{\partial\eta}}$ bezüglich auf die algebraische Curve $Q=\alpha$, indem er beide durch Beispiele, in denen sie sich ungültig zeigen, widerlegt. H.

Th. S. Fiske. On certain space and surface integrals. Annals of Math. VI. 61-63.

Es wird folgende, von Hrn. Peirce in Ed. Times, Febr. 1891, angezeigte Reduction eines Integrals über ein Körpervolumen auf ein Integral über seine Oberfläche mitgeteilt:

$$\iiint h_1 h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{W}{h_2 h_3}\right)dv = \iint W\cos a\, d\sigma,$$

wo p_1, p_2, p_3 orthogonale (krummlinige) Coordinaten bezeichnen, h_1, h_2, h_3 die analogen Werte:

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_1}{\partial z}\right)^2; \quad \text{etc.}$$

haben, v das Volumen, σ die Oberfläche, α der Winkel zwischen der äusseren Normale und der Linie constanter p_2, p_3, stumpf bei deren Richtung von aussen nach innen, ist. H.

R. Hoppe. Quadrable Cylinderflächenstücke. Hoppe Arch. (2) X. 222-224.

Verfasser sucht Klassen von Cylinderflächen auf algebraischer Basis, auf denen durch zwei Cylinderseiten und zwei Ebenen, deren Schnittlinie senkrecht zur Cylinderseite steht, Vierecke von quadrablem Inhalte herausgeschnitten werden. Ist die y-Axe die Schnittlinie beider Ebenen, die z-Axe parallel den Cylinderseiten, bezeichnet s einen Bogen der Basis und sind $z = cx$ und $z = c_1 x$ die Gleichungen der Ebenen, so ergiebt sich für den Inhalt des Vierecks $V = (c - c_1)\int x\,ds$. Setzt man nun $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$, so ergeben sich für $u = \left(\frac{x}{a}\right)^\mu$ quadrable Formen, wofern μ weder 1 noch 2 und $2^n.\mu$ eine positive ganze Zahl ist. Ausser dem obigen Werte von $\frac{dy}{dx}$ bieten sich noch einige andere Specialfälle dar, in denen V quadrabel ist.

Sh.

E. Czuber. Zur Theorie zweier vielfachen Integrale. Monatsh. f. Math. II. 119-124.

Das erste der beiden Integrale ist von Todhunter zur Verallgemeinerung eines Beweises von Laplace verwandt und durch Induction berechnet worden. Es lautet:

$$U = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u}\cos v\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

wo u eine quadratische Form der n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$:

$$u = \Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

von positiver Determinante R der Coefficienten, und v eine lineare Form derselben Elemente:

$$v = \Sigma h_i x_i$$

bezeichnet. Im Gegenwärtigen leitet der Verfasser ohne Induction in unmittelbar allgemeinem Verfahren den folgenden Wert her:

$$U = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{R}} e^{-\frac{x}{4}}; \quad x = \frac{-1}{R} \begin{vmatrix} 0 & h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ h_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ h_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Das zweite der berechneten Integrale nebst dessen gefundenem Werte ist

$$V_n = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty x_n e^{-u} dx_n dx_1 \dots dx_{n-1} = \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sqrt{a_{nn}}}{2R}$$

bei gleicher Bedeutung der a_{ik}, u, R. H.

L. Pochhammer. Ueber ein vielfaches, auf Euler'sche Integrale reducirbares Integral. J. für Math. CVII. 246-253.

Durch Reihenentwickelung der Potentialfunction und gliedweise Integration ergiebt sich:

$$\int_0^\infty s^{-a} ds \int_0^1 e^{-st} t^b (1-t)^{c-1} dt = \Gamma(1-a) E(a+b, c),$$

worin E das Euler'sche Integral erster Art bedeutet. Durch den Schluss von n auf $n+1$ ergiebt sich hieraus:

$$\int_0^\infty s^{-a} ds \int_0^1 S_1 ds_1 \dots \int_0^1 S_{m-1} ds_{m-1} \int_0^1 e^{-s s_1 \dots s_m} S_m ds_m$$
$$= \Gamma(1-a) E(a+b_1, c_1) \dots E(a+b_m, c_m),$$

worin $S_\mu = s_\mu^{b_\mu}(1-s_\mu)^{c_\mu - 1}$ bedeutet. Schliesslich wird der Integrationsweg der Variable s dahin abgeändert, dass er, am unendlich entfernten Punkte der negativen reellen Axe beginnend und endigend, einen positiven Umlauf um den Nullpunkt ausführt, während die übrigen Variabeln ihren Integrationsweg be-

halten. Setzt man für den erwähnten Weg von s:

$$\int e^s s^{q-1} ds = \overline{\Gamma}(q),$$

so folgt:

$$\int s^{-a} ds \int_0^1 S_1 ds_1 \dots \int_0^1 e^{s s_1 \dots s_m} S_m ds_m$$

$$= \overline{\Gamma}(1-a) E(a+b_1, c_1) \dots E(a+b_m, c_m).$$

Für die ersten Gleichungen muss der reelle Bestandteil von $1-a$ positiv sein, die letzte Gleichung ist von dieser Beschränkung frei. Sh.

N. N. Zinine. Ueber die Formeln von Ostrogradsky in der Theorie der mehrfachen Integrale und über ihre Anwendung. Mosk. Math. Samml. XV. 645-683. (Russisch.)

Die allgemeinen Formeln von Ostrogradsky, welche von ihm im Jahre 1834 (Mémoire sur le calcul des variations des intégrales multiples. Mémoires de l'Acad. de St. Pétersb. 1838) gegeben wurden, enthalten an sich mehrere interessante Resultate, von denen einige nachher von Kronecker, Borchardt u. a. gefunden worden sind. So kann man aus der Formel Ostrogradsky's für die Transformation des n-fachen Integrals

$$S = \int \frac{\partial \omega}{\partial x_k} dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

auf das Gebiet $L(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ erstreckt, falls man das Integral auf die Grenze dieses Gebietes ausdehnt, die Formel von Borchardt für die Quadratur der Oberflächen erhalten, ebenso die Verallgemeinerung der Gauss'schen Methode für die Berechnung der Attractionscomponenten des homogenen Ellipsoids auf n-fache Mannigfaltigkeiten, sowie des Gauss'schen Theorems vom Integrale $\int \frac{\cos\varphi \, . \, d\sigma}{r^2}$. Aus dieser letzten Verallgemeinerung erhält man die Formeln von Jacobi (Werke Bd. III, p. 255-260). Für die erste dieser Jacobi'schen Formeln war der Uebergang vom Gauss'schen Theorem durch den Referenten gezeigt (F. d. M. XVIII. 1886. 264).

Die zweite Formel von Ostrogradsky für die Differentiation

des Integrals

$$S_1(t) = \int f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) dv,$$

erstreckt auf das Gebiet $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) < 0$, nach dem Parameter t:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = -\int f_1 \frac{\partial L}{\partial t} \cdot \frac{d\sigma}{R}$$

$$\left(\text{wo } R = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial L}{\partial x_n}\right)^2}\right)$$

giebt z. B. unmittelbar die Formel für den Differentialparameter des verallgemeinerten Potentials von Kronecker (Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln. Berl. Monatsb. 1869) und andere Formeln, die später vom Referenten (Theorie der Trennung der Wurzeln der Systeme algebraischer Gleichungen, F. d. M. XVI. 1884. 66) abgeleitet wurden. Der Verfasser giebt noch in seiner interessanten und umfangreichen Abhandlung die Anwendung der Formeln von Ostrogradsky für die Berechnung der Oberfläche des Ellipsoids und für die Verallgemeinerung der Green'schen Formeln. Wi.

P. A. Nekrassoff. Ueber die Reduction mehrfacher Integrale. Mosk. Math. Samml. XVI. 81-88. (Russisch.)

Die Note enthält die Zusammenstellung der Resultate des Verfassers aus seiner Abhandlung: „Die Anwendung des allgemeinen Differentiirens auf die Aufgabe der Reduction der vielfachen Integrale" (F. d. M. XXI. 1889. 288) mit den Resultaten des Herrn Sonine (daselbst S. 287). Wi.

P. Mansion. Sur la formule de quadrature de Gauss. Brux. S. sc. XV A. 57-59.

Ausdehnung der Formel auf den Fall, bei welchem die Werte der Function beliebigen $n+1$ Werten der Variable entsprechen; Berechnung des Restes vermittelst des grössten Moduls der Function innerhalb einer gewissen Fläche.

Mn. (Lp.)

J. Perott. The Gaussian interpolation theory, formulae for $n = 7$, 8, and 9. Quart. J. XXV. 200-202.

Im Anschluss an Gauss' „Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi“ (Werke, III. 163-169) werden für $n = 7, 8, 9$ die Ausdrücke für U und U', die Werte von $a, a', a'', \ldots, a^{IX}$; $R, R', R'', \ldots, R^{IX}$ und der allgemeine Ausdruck der Coefficienten angegeben. Wz.

A. Sommerfeld. Ueber eine neue Integrirmaschine. Königsberg. Schriften d. Phys.-ökon. Gesellsch. XXXII. 1-6.

Durch diese Maschine werden die Coefficienten der Fourier'schen Entwickelung einer beliebigen Function $f(x)$ ermittelt. Sie vollzieht nach einander zwei Arbeiten in zwei zu einem Apparat vereinigten Werken. Zuerst zeichnet sie aus einer Reihe gegebener Werte von $f(x)$ die Curve der Projectionen $f(x)\cos nx$ und $f(x)\sin nx$; dann vollzieht sie deren Quadratur zwischen $x = 0$ und $x = 2\pi$ nebst Division durch π. Zu gleichem Zwecke existirt bereits W. Thomson's „Harmonic Analyzer“ (vgl. Treatise on nat. philos. I. App. B III, IV, VII; F. d. M. X. 1878. 293), eine Maschine, die jedoch nur die fünf ersten Coefficienten, für $n = 0, 1, 2$, und zwar mittels fünf neben einander gestellter, gleichzeitig arbeitender Integratoren angiebt. H.

E. Catalan. Quelques théorèmes sur les intégrales eulériennes. Belg. Bull. (3) XXII. 459-460.

Auszug aus einer umfangreichen Abhandlung, die später erscheinen soll. Mn. (Lp.)

H. S. White. Algebraische Integrale auf singularitätenfreien etc. Curven eines beliebig ausgedehnten Raumes. Diss. Göttingen. 4°.

Referat in Abschnitt VII.

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

W. HEYMANN. Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen. Leipzig. B. G. Teubner. X und 436 S. 8°.

Das Werk enthält eine Reihe von Untersuchungen, die der Verfasser in verschiedenen Zeitschriften veröffentlicht hat; sie stehen mit einander in losem Zusammenhang und sollen als ein Supplement zu den sonst vorhandenen Lehrbüchern über Diffetial- und Differenzengleichungen dienen, weshalb solche Sätze, die sich anderswo finden, möglichst ausgeschlossen sind. Den einzelnen Studien ist meist die Angabe der Zeitschriften angefügt, in welchen sie zuerst erschienen sind. Das Werk enthält 22 Studien, in vier Capitel eingeteilt.

Das erste Capitel behandelt zunächst die Transformation der Differentialgleichungen von Punkt- und Liniencoordinaten, wobei auch von homogenen Coordinaten Gebrauch gemacht wird. An Beispielen wird gezeigt, wie dadurch die Integration verschiedenartiger Differentialgleichungen auf einander zurückgeführt werden kann. Es folgen dann Beiträge zur Integration der Gleichung $Mdx+Ndy=0$, worin M und N Polynome zweiter Ordnung in x und y sind. Hier ist besonders der Satz interessant, dass, falls die Gleichung zwei parallele Gerade als particuläre Integrale besitzt, ihre Integration auf die Form

$$(a+2bx+cx^2)dy+(Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F)dx=0$$

gebracht und als solche integrirt werden kann. Eine besondere Studie ist den linearen Differentialgleichungen gewidmet, denen durch hypergeometrische Functionen genügt wird. Bemerkenswert in diesem Capitel ist besonders eine Art der Transformation der hyperelliptischen Differentiale, welche auf einer Eigenschaft der Discriminante $\Delta(x)$ der Gleichung $\varphi(v)=x$ (φ eine rationale Function) beruht, und durch welche in gewissen Fällen die Reduction der hyperelliptischen Differentiale auf elliptische gelingt;

ferner eine zweite Art, durch welche die Transformation derselben in zwei niedere erfolgt, wobei auch eine einfachere Zerlegung des elliptischen Integrals erster Gattung mit complexem Modul, als die von Jacobi angegebene, abgeleitet wird. Das zweite Capitel beschäftigt sich mit der Integration linearer nicht homogener Differentialgleichungen, bei denen die zu dem vollständigen Integral der reducirten Gleichung hinzutretenden „Supplementintegrale" ohne Anwendung der Variation der Constanten gefunden werden können. Durch Methode und Resultate bemerkenswerte Entwickelungen enthält das dritte Capitel, welches von transcendenten Auflösungen algebraischer Gleichungen und der Theorie der Differentialresolventen handelt. Es werden zunächst trinomische Gleichungen, die stets auf gewisse Fundamentalformen mit einem einzigen Parameter ξ reducirt werden können, durch Reihen und bestimmte Integrale gelöst, wobei sich von wesentlicher Bedeutung die „Differentialresolvente" erweist, die Differentialgleichung nämlich, der die m^{ten} Potenzen der Wurzeln als Functionen des Parameters genügen; sie hat die Form

$$\frac{d^n\zeta}{d\xi^n} = a_n \xi^n \frac{d^n\zeta}{d\xi^n} + a_{n-1}\xi^{n-1}\frac{d^{n-1}\zeta}{d\xi^{n-1}} + \cdots + a_0\zeta = 0$$

und lässt sich durch bestimmte Integrale sowie durch hypergeometrische Reihen integriren. Die transcendenten Lösungen der trinomischen Gleichungen führen dann zu einer Hypothese über die Form der Lösungen der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades, die betreffs der Grenzen ihrer Gültigkeit discutirt wird. Das vierte Capitel ist den linearen Differenzengleichungen gewidmet. Sie werden mit entsprechenden linearen Differentialgleichungen dadurch in Zusammenhang gebracht, dass letztere h-mal nach der unabhängigen Variable x differentiirt und die so erhaltene Recursionsformel zwischen den Ableitungen $y^{(h+n)}, y^{(h+n-1)}, \ldots, y^{(h)}$ als Differenzengleichung mit der unabhängigen Veränderlichen h betrachtet wird. Hiernach werden hypergeometrische Differenzengleichungen und simultane Systeme solcher, sowie lineare Differenzengleichungen mit Coefficienten zweiten Grades integrirt. Der am Schlusse folgende Anhang

bringt eine Reihe von Aufgaben, die mit den vorhergehenden verwandt und deren Lösungen angedeutet sind.

Bei der grossen Reichhaltigkeit und Mannigfaltigkeit des in dem Buche Dargebotenen mussten wir hier auf jeden Versuch einer Vollständigkeit der Analyse verzichten und uns auf die Hervorhebung solcher Punkte beschränken, die uns besonders bemerkenswert erschienen. Hr.

É. Picard. Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires. S. M. F. Bull. XIX. 61-64, Nouv. Ann. (3) X. 197-201.

Der Beweis für die Existenz der Integrale des Systems

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots, w), \quad \dfrac{dv}{dx} = f_2(x, u, v, \ldots, w), \ \ldots, \\ \qquad\qquad \dfrac{dw}{dx} = f_m(x, u, v, \ldots, w) \end{cases}$$

wird unter der Voraussetzung geführt, dass die f continuirliche reelle Functionen der reellen Grössen $x, u, v, \ldots, w$ in der Umgebung von $x_0, u_0, v_0, \ldots, w_0$ sind, und dass m positive Grössen $A, B, \ldots, L$ sich so bestimmen lassen, dass in einem gewissen Bereiche

$$|f(x, u', v', \ldots, w') - f(x, u, v, \ldots, w)| < A|u'-u| + B|v'-v| + \cdots + L|w'-w|.$$

Das Beweisverfahren besteht im Fortschreiten durch successive Approximationen, indem der Reihe nach die Systeme

$$\frac{du_i}{dx} = f_1(x, u_{i-1}, v_{i-1}, \ldots, w_{i-1}), \ \ldots, \qquad \frac{dw_i}{dx} = f_m(x, u_{i-1}, v_{i-1}, \ldots, w_{i-1})$$

für $i = 1, 2, \ldots$, in inf. betrachtet werden; daraus ergeben sich durch Quadraturen die Functionen $u_1, v_1, \ldots, w_1$; $u_2, v_2, \ldots, w_2$ u. s. f., indem man noch bestimmt, dass $u_i = u_0$, $v_i = v_0$, $\ldots$, $w_i = w_0$ für $x = x_0$ werde. Es wird dann gezeigt, dass $u_i, v_i, \ldots, w_i$ bei unbegrenzt wachsendem i sich Grenzen nähern,

welche die Integrale von (1) darstellen mit den Anfangswerten $u_0, v_0, \dots, w_0$ für $x = x_0$. Hr.

PICARD's demonstration of the general theorem upon the existence of integrals of ordinary differential equations. Translated by Th. S. Fiske. New York M. S. Bull. I. 12-16.

Uebersetzt aus S. M. F. Bull. XIX, vergl. das vorangehende Referat.

E. PHRAGMÉN. Zur Theorie der Differentialgleichung von Briot und Bouquet. Stockh. Öfv. XLVIII. 623-668.

Der Zweck dieses Aufsatzes ist eine Ergänzung der bekannten Briot-Bouquet'schen Theorie der Differentialgleichung

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0.$$

Einerseits wird strenge bewiesen (was Briot und Bouquet stillschweigend annehmen), dass von dem Bereich, für welchen u als eine monogene Function von z definirt werden kann, kein zweidimensionales Stück der z-Ebene ausgeschlossen bleibt, und dass diese Function sich immer einem bestimmten Werte nähert, wenn z auf einem gegebenen Wege einen gegebenen Wert annimmt.

Andererseits beschäftigt sich der Verf. mit dem Falle, dass die Function u nicht eindeutig ist, und beleuchtet durch mehrere Beispiele die Schwierigkeiten, welche mit der Mehrdeutigkeit verknüpft sind, namentlich die Notwendigkeit, auf „die arithmetische Beschaffenheit" der Constanten der Differentialgleichung Rücksicht zu nehmen. Bdn.

W. G. IMSCHENETZKY. Ueber die Integration linearer homogener Gleichungen mit Hülfe der particulären Lösungen anderer Gleichungen derselben Form und gleicher oder niedrigerer Ordnung. Petersb. Abh. LXIV. 1-47 (Russisch.)

Wenn

$$(1) \qquad \eta_1 y^{(n-1)} + \eta_2 y^{(n-2)} + \cdots + \eta_{n-1} y' + \eta_n y = \text{Const.}$$

das erste Integral einer linearen Differentialgleichung

$$(2) \qquad P(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

ist, so erhält man für die Bestimmung der Coefficienten η_1, η_2, ..., η_n das System von Gleichungen

$$(3) \qquad P_1(\eta_1) = 0, \quad \ldots, \quad P_n(\eta_n) = 0,$$

von denen die erste „l'équation adjointe de Lagrange" ist. Die Integration jeder dieser Hülfsgleichungen giebt einen integrirenden Factor der Gleichung (2).

Im § II zeigt der Verfasser umgekehrt, dass die allgemeinen Lösungen der Gleichung $P(y) = 0$ die allgemeinen Lösungen des Systems (3) geben. Für die vollständige Integration der $n+1$ Gleichungen $P(y) = 0$, $P_1(\eta_1) = 0$, ..., $P_n(\eta_n) = 0$ genügt es vollständig, eine derselben zu integriren. Die unvollständige Integration der Hülfsgleichungen, d. h. die Kenntnis einer kleineren Anzahl als n von particulären Lösungen einer oder mehrerer Gleichungen:

$$P_1(\eta_1) = 0, \quad \ldots, \quad P_n(\eta_n) = 0,$$

ermöglicht eine Erniedrigung der Ordnung der Gleichung $P(y) = 0$.

Im § III werden die Fälle $n = 2, 3, 4$ ausführlich behandelt.

Am Ende der Abhandlung werden die Berührungspunkte der Untersuchungen des Verfassers mit einer Abhandlung von Hrn. Cels (C. R. CXI, F. d. M. XXII. 1890. 309) gezeigt.

Wi.

W. G. Imschenetzky. Notiz über die linearen Differentialgleichungen, welche sich durch allgemeine hyperbolische Sinus integriren lassen. Mosk. Math. Samml. XVI. 177-186. (Russisch.)

Wenn die convergente Reihe

$$\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+k}}{(n+k)!} + \frac{x^{2n+k}}{(2n+k)!} + \cdots$$

mit $S_k(x)$ bezeichnet wird (die Function $S_k(x)$ ist der allgemeine hyperbolische Sinus), so ist

$$y = C_0 S_0(x) + C_1 S_1(x) + \cdots + C_{n-1} S_{n-1}(x)$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$S_{n-k-1}(-x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + S_{n-k-2}(-x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + S_1(-x)\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} + S_0(-x)\frac{d^k y}{dx^k} + \cdots + S_{n-k}(-x).y = 0$$

und

$$y = C_0 S_0(-x) + C_1 S_1(-x) + \cdots + C_{n-1} S_{n-1}(-x)$$

das Integral der Gleichung:

$$S_{n-k-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - S_{n-k-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + (-1)^{n-k-1} S_0(x)\frac{d^k y}{dx^k} + (-1)^{n-k} S_{n-1}(x)\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} + \cdots + (-1)^{n-1} S_{n-k}(x) y = 0.$$

Wi.

P. A. Nekrassoff. Notiz über die linearen Differentialgleichungen, welche durch bestimmte Integrale integrirt werden. Mosk. Math. Samml. XV. 608-610. (Russisch.)

Eine Ergänzung der grossen Abhandlung des Verfassers (Mosk. Math. Samml. XV, F. d. M. XXII. 1890. 320). Es wird bemerkt, dass zwischen den Integralen

$$y = \int_L f dz \quad \text{und} \quad Y = \int_L f\varphi dz,$$

wo φ ein Polynom ist, ein Zusammenhang in der Form der Gleichung:

$$Y = X_0 y + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + X_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

besteht. Die Gleichungen, welche durch Integrale $\int_L f dz$ integrirt werden, sind Grundgleichungen, auf welche die anderen Gleichungen sich reduciren. Wi.

P. A. Nekrassoff. Ueber lineare Differentialgleichungen, welche mittelst bestimmter Integrale integrirt werden. Math. Ann. XXXVIII. 509-560.

Die Resultate dieser Abhandlung sind vom Verfasser bereits in Mosk. Math. Samml. XV publicirt worden (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 320). Hinzugefügt sind Verweisungen auf Arbeiten anderer, welche in der Wahl der Integrationswege dieselben oder ähnliche Tendenzen wie der Verf. verfolgen. Bdt.

N. W. Bugaieff. Princip der höchsten und niedrigsten Exponenten in der Theorie der Differentialgleichungen. Die ganzen particulären Integrale. Mosk. Math. Samml. XVI. 39-81. (Russisch.)

N. W. Bugaieff. Die particulären fractionären Integrale der Differentialgleichungen. Petersb. Abh. LXVII. 1-12. (Russisch.)

In der ersten Abhandlung giebt der Verfasser die Anwendung seines „Princips der höchsten und niedrigsten Exponenten“ (F. d. M. XXII. 1890. 103), das, im Grunde genommen, mit der Methode der unbestimmten Coefficienten und Exponenten identisch ist, für die Auffindung der ganzen Integrale einer Differentialgleichung und eines Systems simultaner Differentialgleichungen. Der Verfasser behandelt auch die anderen Methoden für die Auffindung des ganzen Integrals, insbesondere die Derivationsmethode. In der zweiten Abhandlung wird dasselbe Verfahren zur Auffindung der fractionären particulären Integrale der Differentialgleichungen angewandt. Wi.

H. von Koch. Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires. Acta Math. XV. 53-63.

Herr Hill hat zuerst (Cambridge U. S. A. 1877 und Acta Math. VIII, s. F. d. M. IX. 1877. 795 u. XVIII. 1886. 1106) zur

Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ein System unendlich vieler linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten benutzt. Die hierbei unterlassene Prüfung der Gültigkeit der Grenzprocesse führte später Herr Poincaré aus (S. M. F. Bull. XIV, F. d. M. XVIII. 1886. 117), indem er die Bedingungen der Convergenz einer Determinante von unendlich hoher Ordnung untersuchte, und stellte die Gesetzlichkeit des von Herrn Hill angewandten Verfahrens fest.

Im vorliegenden Aufsatze wird davon eine höchst bemerkenswerte Anwendung gemacht auf die Theorie der Darstellung der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten in der Umgebung singulärer Punkte. Die vorgelegte Differentialgleichung sei

$$(1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_n(x)y = 0;$$

$P_r(x)$ habe in der Umgebung von $x=0$ die Entwickelung

$$P_r(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} a_{r\lambda}x^\lambda \qquad (r = 2, 3, \ldots, n),$$

deren Convergenz (unbeschadet der Allgemeinheit) noch für $x = 1$ bestehe. Bekanntlich existirt eine der Differentialgleichung genügende Reihe von der Form

$$y = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} g_\lambda x^{\varrho+\lambda}.$$

Zur Bestimmung der Grössen g_λ und ϱ dienen die Gleichungen in unendlicher Anzahl

$$\varphi(\varrho+m)\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \psi_{m\lambda}(\varrho)g_\lambda = 0,$$

worin

$$\varphi(\varrho) = \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+1)+\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+3)a_{2,-2}+\cdots + a_{n,-n} = 0,$$

$$\psi_{m\lambda}(\varrho).\varphi(\varrho+m) = (\varrho+\lambda)(\varrho+\lambda-1)\ldots(\varrho+\lambda-n+3)a_{2,m-\lambda-2} + (\varrho+\lambda)\ldots(\varrho+\lambda-n+4)a_{3,m-\lambda-3}+\cdots+a_{n,m-\lambda-n} \qquad (m \lesseqgtr \lambda),$$

$$\psi_{m,m} = 1.$$

Bildet man die unendliche Determinante

$$\Omega(\varrho) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & 1 & \cdots & \psi_{-m,0} & \cdots & \psi_{m,m} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & \psi_{0,-m} & \cdots & 1 & \cdots & \psi_{0,m} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & \psi_{m,-m} & \cdots & \psi_{m,0} & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich, dass diese Determinante convergent ist, und dass $\Omega(\varrho)$ eine analytische Function von ϱ mit der Periode 1 ist, die in der Umgebung jedes Punktes holomorph ist mit Ausnahme derjenigen, die einer der Gleichungen

$$(2) \qquad \varphi(\varrho+m) = 0 \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

genügen, in der Umgebung der letzteren aber den Charakter einer rationalen Function hat. Innerhalb eines Streifens, der von zwei um die Einheit entfernten verticalen Geraden begrenzt ist, hat $\Omega(\varrho)$ n Nullstellen. Nennt man $\Psi_{m,\lambda}(\varrho)$ den Quotienten von $\psi_{m,\lambda}(\varrho)$ in der Entwickelung von $\Omega(\varrho)$ nach den Elementen der m^{ten} Zeile, so erhält man, unter der Bedingung, dass die Wurzeln der Gleichung $\varphi(\varrho) = 0$ ungleich und nicht um ganze Zahlen verschieden sind und die Nullstellen von $\Omega(\varrho)$ innerhalb des gedachten Streifens sämtlich verschieden sind, ein Fundamentalsystem von n Integralen in der Form

$$y_s = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \Psi_{p_s\lambda}(\varrho_s) x^{\varrho_s+\lambda} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ die n incongruenten Wurzeln von $\Omega(\varrho) = 0$ bedeuten und der Index p_s so zu wählen ist und stets so gewählt werden kann, dass y_0 nicht identisch verschwindet. Wegen der Eigenschaft

$$\Psi_{m\lambda}(\varrho+p) = \Psi_{m+p,\lambda+p}(\varrho)$$

kann den Integralen die einfachere Form gegeben werden

$$y_s = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \Psi_{0,\lambda}(\varrho_s+p) x^{\varrho_s+p_s+\lambda}.$$

Hr.

A. Markoff. Sur les équations différentielles linéaires. C. R. CXIII. 685-688.

Der Verfasser giebt eine Methode an, diejenigen Integrale der Differentialgleichung

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + X_n y = 0,$$

in welcher die Coefficienten X_0, X_1, ..., X_n ganze Functionen von x bedeuten, zu ermitteln (falls solche vorhanden sind), deren logarithmische Ableitungen rationale Functionen sind, und erläutert dieselbe an einigen Beispielen; diese Methode ist derjenigen analog, durch welche die „rationalen" Integrale einer solchen Differentialgleichung aufgefunden werden. Wbg.

A. Markoff. Sur la théorie des équations différentielles linéaires. C. R. CXIII. 790-791.

Die Resultate der oben besprochenen Abhandlung werden zu einer eleganten Lösung des von Herrn E. Fabry (C. R. CVI, F. d. M. XX. 1888. 318) behandelten Problems der Reductibilität linearer homogener Differentialgleichungen benutzt

Wbg.

A. Markoff. Sur la théorie des équations différentielles linéaires. C. R. CXIII. 1024-1025.

Der Verfasser bringt ein neues, sorgfältig durchgeführtes Beispiel zu der in seiner oben besprochenen Arbeit (C. R. CXIII. 685-688) enthaltenen Methode. Wbg.

P. Painlevé. Remarque sur une Communication de M. Markoff, relative à des équations différentielles linéaires. C. R. CXIII. 739-740.

Die Methode Markoff's (C. R. CXIII. 685-688) ist in einem allgemeineren Problem enthalten, welches Hr. Painlevé bereits früher (C. R. CV, F. d. M. XIX. 1887. 335) gelöst hat.

Wbg.

P. Painlevé. Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VIII. 9-58, 103-140, 201-226, 267-284.

Herr Fuchs hat bekanntlich zuerst die Bedingungen dafür festgestellt, dass eine Differentialgleichung erster Ordnung nur feste Verzweigungspunkte besitze (Berl. Ber. 1884, F. d. M. XVI. 1884. 284). Dabei ist bereits auf die Bedeutung hingewiesen, die dem Geschlechte p der durch die Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ gegebenen algebraischen Relation zwischen y und y' (x als constant betrachtet) zukommt. Eine nähere Discussion hat dann Herrn Poincaré zu dem Satze geführt, dass für $p > 1$ die Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten stets algebraisch integrirbar sind (Sur un théorème de M. Fuchs, Acta Math. VII, F. d. M. XVII. 1885. 279). Die vorliegende, von der Pariser Akademie der Wissenschaften preisgekrönte Arbeit bezweckt die Erweiterung der betreffenden Untersuchungen auf den Fall, dass die in y und y' algebraische Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$, deren Coefficienten von x beliebig abhängen, ausser den festen noch bewegliche Verzweigungspunkte habe, derart jedoch, dass ein beliebiges Integral y nur eine endliche Anzahl n von Werten in einem Punkte x annimmt, falls man durch einen Schnitt, der durch sämtliche feste Verzweigungspunkte in der x-Ebene geführt wird, die unabhängige Variable verhindert, bei ihren Umläufen einen der festen Verzweigungspunkte zu umkreisen. Der Verf. bedient sich dafür der Bezeichnung, dass das allgemeine Integral nur n Werte um bewegliche Verzweigungspunkte habe. Sind $y_1, \ldots, y_n$ die n Werte, so wird jede symmetrische Function derselben einer Differentialgleichung mit nur festen Verzweigungspunkten genügen und daher eine rationale Function von y_0, y'_0 (x als constant betrachtet), wo y_0 und y'_0 der Gleichung $f(x_0, y_0, y'_0) = 0$ unterworfen sind. Das allgemeine Integral kann daher in der Form geschrieben werden

$$y^n + R_{n-1}(y_0, y'_0, x_0, x)y^{n-1} + \cdots + R_0(y_0, y'_0, x_0, x) = 0$$

oder

$$y_0^n + R_{n-1}(y, y', x, x_0)y_0^{n-1} + \cdots + R_0(y, y', x, x_0) = 0,$$

worin die R rationale Functionen von y_0, y'_0, resp. y, y' bezeichnen.

Hiernach sind

$$R_i(y,\ y',\ x,\ x_0) = C_i$$

und allgemein

$$r = \varphi\left(R_1,\ R_2,\ \ldots,\ \frac{\partial R_1}{\partial x_0},\ \frac{\partial R_2}{\partial x_0},\ \ldots\right) = c$$

Integrale der Gleichung („constante Integrale"). Zwei von ihnen

$$i = r(y,\ y',\ x),\quad i_1 = r_1(y,\ y',\ x)$$

sind durch eine algebraische Relation $H(i, i_1, x) = 0$ verknüpft, die man erhält, wenn y und y' aus den vorstehenden Gleichungen und der vorgelegten Differentialgleichung $f(y, y', x) = 0$ eliminirt werden; die anderen drücken sich rational durch c und c_1 aus. Zwischen den Punkten (c, c_1) der Curve $H = 0$ und den Punkten (y, y') der Curve $f = 0$ (x als constant betrachtet) besteht eine rationale Transformation von der Ordnung n, in dem Sinne, dass n Punkte (y, y') einem Punkte (c, c_1) entsprechen. Eine ausführliche Untersuchung der Eigenschaften dieser Transformation ergiebt, falls w das Geschlecht von $H = 0$, p das von $f = 0$ bedeutet, folgendes Resultat:

1) w ist höchstens gleich p.

2) Zwischen den Zahlen n, p, w besteht, falls $w > 1$ ist, die Beziehung $n = \frac{p-1}{w-1}$, so dass, wenn $w > 1$, n ein Teiler von $p-1$ ist. Man kann ferner alle Klassen von Curven des Geschlechts $w > 1$, die eine rationale Transformation in $f = 0$ gestatten, berechnen (ihre Anzahl ist endlich) und daher durch algebraische Operationen erkennen, ob eine Curve $H = 0$ mit $w > 1$ existirt. In diesem Falle erhält man das Integral selbst auf algebraischem Wege. Ist $w = 1$, dann muss ein Abel'sches Integral erster Gattung von $f = 0$ existiren, das nur zwei Perioden hat, und um dieses zu erhalten, bedarf es der Lösung einer linearen Differentialgleichung höchstens $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Alsdann ergiebt sich das Integral der vorgelegten Gleichung durch Quadratur. Der Fall $w = 0$ entzieht sich gänzlich dieser Methode, die n nicht als bekannt voraussetzt. Der Verfasser giebt jedoch einen Weg an, mittels einer begrenzten Anzahl von algebraischen Operationen zu entscheiden, ob das allgemeine Integral von $f = 0$

zur n Werte um bewegliche Verzweigungspunkte habe, falls die Zahl n im voraus gegeben ist. Die Integration wird dann auf die einer Gleichung mit nur festen Verzweigungspunkten, deren Geschlecht w ist, zurückgeführt. Ist nun $w = 0$, so lässt sich diese bekanntlich auf eine Riccati'sche Gleichung zurückführen.

Hr.

H. Poincaré. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. C. R. CXII. 761-764, Palermo Rend. V. 161-191.

Die Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades wird nach dem Vorgange des Herrn Darboux auf die homogene Form

$$(1)\qquad (yN-zM)dx+(zL-xN)dy+(xM-yL)dz = 0$$

gebracht, wo L, M, N ganze homogene Polynome in x, y, z vom Grade m bezeichnen; m heisst die Dimension der Gleichung. Wenn das Integral algebraisch ist, so hat sie die Form $f+C\varphi = 0$, wo C eine willkürliche Constante und f und φ homogene Polynome von der Ordnung p in x, y, z sind. Es wird vorausgesetzt, dass diese Form die einfachste ist; es ist dann die Zahl der „merkwürdigen" Werte von C, d. h. derjenigen, für die $f+C\varphi$ reductibel wird, endlich. Die singulären Punkte der Gleichung (1) sind durch die Gleichungen

$$\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}$$

gegeben; ihre Zahl ist m^2+m+1. Sie werden alle verschieden vorausgesetzt. In der Umgebung eines singulären Punktes x_0, y_0, z_0 kann das Integral auf die Form

$$X_1^{-S_1} X_2^{S_2} = \text{const.}$$

gebracht werden, wo X_1, X_2 Reihen sind, geordnet nach wachsenden Potenzen von $\frac{x}{x_0}-\frac{z}{z_0}$, $\frac{y}{y_0}-\frac{z}{z_0}$. Diese Form ist eine notwendige Bedingung dafür, dass die Gleichung (1) algebraisch integrirbar sei; ferner muss für alle singulären Punkte ihr „Exponent" $S_1 : S_2$ reell und commensurabel sein. Die Punkte, für

welche dieser Exponent positiv ist, heissen „noeuds"; die, für welche er negativ ist, „cols". Wenn für gewisse Punkte der Exponent 1 ist, dann hat das Integral im allgemeinen die Form

$$\frac{X_1}{X_2} + A \log X_1 = \text{const.}$$

Soll es algebraisch sein, so muss $A = 0$ sein; der Punkt heisst dann „dicritique". Sind alle singulären Punkte letzterer Art, und hat in einem solchen Punkte $f + C\varphi = 0$ λ verschiedene Zweige, so gelten die Formeln

$$p^2 = \Sigma\lambda^2, \quad (m+2)p = 2\Sigma\lambda,$$

wo die Summationen sich über alle singulären Punkte erstrecken. Für das Geschlecht q der Integralcurve findet man

$$q = \tfrac{1}{4}(m-4)p + 1.$$

Im Falle, wo alle singulären Punkte „noeuds", aber nicht sämtlich „dicritiques" sind, habe der Exponent des Punktes, auf die kleinste Benennung gebracht, die Form $\mu : \nu$. Es gelten dann die Formeln

$$p^2 = \Sigma\lambda^2\mu\nu \quad \text{und} \quad (m+2)n = \Sigma\lambda(\mu+\nu)$$

und für das Geschlecht q:

$$q = 1 + \Sigma\frac{\lambda}{2}\left[(\mu+\nu)\frac{m-1}{m+2} - 1\right].$$

Die Formeln für das Geschlecht enthalten die Lösung des von Herrn Painlevé gestellten Problems, „zu erkennen, ob das allgemeine Integral eine algebraische Curve von gegebenem Geschlechte ist", allemal, wo die Dimension m der Differentialgleichung grösser als 4 ist.

Was den Hauptzweck der vorliegenden Arbeit betrifft, nämlich die Bestimmung einer oberen Grenze für den Grad p der Integralgruppe, so wird sie in dem besonderen Falle, dass für alle „cols" der Exponent gleich -1 ist, durch die Formel

$$m + 2 = p\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right),$$

wo α_1 und α_2 relative Primzahlen sind, vollständig gelöst. In diesem Falle ist es daher möglich, zu entscheiden, ob die Gleichung (1) algebraisch integrirbar ist. Für die grosse Zahl ein-

zelner wichtiger Bemerkungen, die diese Arbeit noch enthält, müssen wir auf das Original verweisen. Hr.

P. Painlevé. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre. C. R. CXII. 1190-1193.

Im Anschluss an die Sätze des Herrn Poincaré (s. das vorhergehende Referat) bezüglich der algebraischen Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades untersucht der Verf. die nämliche Frage für eine beliebige Differentialgleichung erster Ordnung

$$f(x, y, y') = 0,$$

wo f ein irreductibles Polynom in x, y, y' und vom Grade q in y' ist. Wenn das Integral algebraisch ist, handelt es sich um das Geschlecht w der Relation zwischen den „constanten Integralen" (wegen der Bezeichnung vergl. das Referat S. 317 über die Arbeiten des Verf.). Dort ist auch gezeigt, wie man auf algebraischem Wege bestimmen kann, ob das Integral algebraisch ist und der Voraussetzung $w >$ oder $= 1$ entspricht. Hier werden nun Bedingungen angegeben, unter denen man algebraisch erkennen kann, ob das Integral algebraisch ist und dem Falle $w = 0$ entspricht. Hr.

J. Cels. Sur les équations différentielles linéaires ordinaires. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VIII. 341-415.

J. Cels. Sur une classe d'équations différentielles linéaires ordinaires. C. R. CXII. 985-988.

Bilden $z_1, \dots, z_n$ ein Fundamentalsystem von Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, die z als Function von x bestimmt, so genügen die logarithmischen Ableitungen der Determinante

$$\varDelta = |z_\lambda^{(\varkappa-1)}| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots, n),$$

nach den Elementen der $\varkappa^{\text{ten}}$ Zeile genommen:

$$u_\lambda = \frac{\partial \log \varDelta}{\partial z_\lambda^{(\varkappa-1)}} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

ebenfalls einer linearen Differentialgleichung $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung, welche „die Adjungirte der $\varkappa^{\text{ten}}$ Zeile" genannt wird. Für $\varkappa = n$ fällt sie mit der Lagrange'schen Adjungirten zusammen. Wie für die letztere, gilt für die Adjungirte der $\varkappa^{\text{ten}}$ Zeile der Satz, dass man, wenn man von ihr die Adjungirte der $\varkappa^{\text{ten}}$ Zeile bildet, wieder auf die ursprüngliche Gleichung zurückkommt. Der Verf. bildet nun folgende, nach beiden Seiten ins Unendliche gehende Reihe von Differentialgleichungen:

$$\ldots,\ E_{-(2q+1)},\ E_{-2q},\ \ldots,\ E_{-1},\ E,\ E_1,\ \ldots,\ E_{2p},\ E_{2p+1},\ \ldots.$$

Hierin bedeutet E die vorgelegte Differentialgleichung, E_1 die Lagrange'sche Adjungirte von E, E_2 die der ersten Zeile von E_1, E_3 die Lagrange'sche Adjungirte von E_2 u. s. f.; ferner E_{-1} die der ersten Zeile von E, E_{-2} die Lagrange'sche Adjungirte von E_{-1}, E_{-3} die der ersten Zeile von E_{-2} u. s. f.

Die entsprechenden Lösungen dieser Gleichungen hängen nun in folgender Weise zusammen. Bedeutet z eine Lösung von $E=0$, z_p die entsprechende von $E_p = 0$, und ist l der Coefficient von z in E, l_p derselbe Coefficient in E_p, so gelten die Beziehungen

$$(1)\quad \begin{cases} z = \dfrac{1}{l_1}\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{l_3}\dfrac{d}{dx}\cdots\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{l_{2p-1}}\dfrac{d}{dx}z_{2p}, \\ z = \displaystyle\int l_{-1}\,dx\int l_{-3}\,dx\ldots\int l_{-(2q-1)}z_{-2q}\,dx \\ \text{und} \\ z_1 = \dfrac{1}{l}\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{l_{-2}}\dfrac{d}{dx}\cdots\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{l_{-2q}}\dfrac{d}{dx}z_{-(2q+1)}, \\ z_1 = \displaystyle\int l_2\,dx\int l_4\,dx\ldots\int l_{2p}z_{2p+1}\,dx, \end{cases}$$

so dass die Kenntnis einer particulären Lösung irgend einer der Gleichungen der Reihe die entsprechende von E selbst bestimmt, wenn jene Gleichung einen geraden Index, und die der Lagrange'schen Adjungirten von E bestimmt, wenn sie einen ungeraden Index hat. — Die erste Anwendung betrifft eine Gleichung von der Form

$$az^{(n)} + bz^{(n-1)} + \cdots + lz = 0,$$

wo a ein Polynom in x vom Grade n, b vom Grade $n-1$ u. s. f., l eine Constante ist. Es ergiebt sich, dass auch $l_{\pm p}$ für be-

liebiges p constant ist. $l_{2p} = 0$ stellt die determinirende Fundamentalgleichung von E im Punkte $z = \infty$ dar. Hieraus wird der bereits von Herrn Heffter gefundene Satz abgeleitet, dass, wenn diese Gleichung ganze negative Wurzeln besitzt, der absolut kleinsten derselben ein Polynom als Lösung entspricht. Das Resultat wird weiter dahin ausgedehnt, dass, wenn alle Wurzeln der determinirenden Gleichung ganz sind, und wenn die Bedingungen erfüllt sind, dass die Logarithmen in den zugehörigen Entwickelungen verschwinden, die Gleichung $E = 0$ sich in endlicher Form oder durch Quadraturen integriren lässt. Die Methode wird ferner auf die Gleichung

$$x^{n-1}z^{(n)} + ax^{n-2}z^{(n-1)} + \cdots + hz' + x^{n-1}z = 0$$
$$(a,\ b,\ \ldots,\ h \text{ Constanten}),$$

die eine Verallgemeinerung der Bessel'schen ist, angewandt, und in zwei besonderen Fällen deren Integration angegeben.

Endlich wird der Fall in Betracht gezogen, wenn in der aufgestellten Reihe eine Periodicität der Art stattfindet, dass $E = E_{2n}$ ist. Vermöge der Relationen (1) lassen sich dann Differentialgleichungen ableiten, die mit der vorgelegten $E = 0$ eine Lösung gemein haben. Der Verfasser schliesst daraus, dass die Gleichung $E = 0$ durch Quadraturen integrirt werden kann. Hierzu würde jedoch noch der Nachweis notwendig sein, dass die betreffende Gleichung mit $E = 0$ nur eine Lösung gemeinsam hat. Dies ist übrigens, wie sich leicht zeigen lässt, stets der Fall, wenn die Wurzel s_i der dort auftretenden Gleichung einfach ist. Hr.

E. Vessiot. Sur les équations différentielles linéaires. C. R. CXII. 778-780.

Es sei die lineare Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^n x}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + p_n x = 0$$

gegeben, alsdann gelten folgende, dem Galois'schen Theorem in der Theorie der algebraischen Gleichungen analoge Sätze:

1. Jeder Gleichung (1) entspricht eine Gruppe Γ von infinitesimalen linearen und homogenen Transformationen derart, dass

jede algebraische Function von t, $p_1, \ldots, p_n$ und ihren Derivirte die Gruppe Γ gestattet, und jede Function, die diese Grupp zulässt, eine algebraische Function der genannten Argumente is

2. Es giebt eine Gruppe G von endlichen linearen un homogenen Transformationen, die jede „rationale" Function R jener Argumente zulässt, und jede Function R, die diese Grupp gestattet, ist eine rationale Function der genannten Argumente Die Gruppe G ist bereits von Herrn Picard (C. R. XCVI, F. d M. XV. 1883. 258) die Transformationsgruppe der Gleichung genannt worden. Die Kenntnis der Gruppe Γ oder G gestatte die Entscheidung, ob die Gleichung (1) durch Quadraturen inte grabel sei, und die Zurückführung ihrer Integration auf die einer Reihe einfacherer Gleichungen. Hr.

P. Günther. Ueber die Bestimmung der Fundamentalgleichungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. J. für Math. CVII. 298-318.

Die von Herrn Fuchs in den Annali di Mat. IV (F. d. M. II. 1870. 175) gegebene Darstellung der Integrale linearer homogener Differentialgleichungen in überall convergenten Reihen hatte bereits der Verf. in einer Notiz über denselben Gegenstand (J. für Math. CVI, F. d. M. XXII. 1890. 308) dazu benutzt, Ausdrücke für die Coefficienten der zu einem singulären Punkte gehörigen Fundamentalgleichung zu erlangen. In der vorliegenden Abhandlung werden auf Grund derselben Reihen nach einer zweiten Methode Ausdrücke für die genannten Coefficienten entwickelt, die für gewisse Anwendungen Vorteile bieten. Aus dieser Bestimmungsmethode, die an dem Beispiele der Differentialgleichungen zweiter Ordnung näher ausgeführt wird, ergiebt sich unmittelbar der von Herrn Poincaré bewiesene Satz: „Die Coefficienten der zu $x = a_i$ gehörigen Fundamentalgleichungen in der Differentialgleichung

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} p_\varkappa(x)\frac{d^{n-\varkappa}y}{dx^{n-\varkappa}} = 0, \quad p_0(x) = 1, \quad p_\varkappa(x) = \sum_{h,i}\frac{A_{\varkappa hi}}{(x-a_i)^h}$$

sind ganze transcendente Functionen der Grössen A_{hki}. Denkt man sie sich nach Potenzen dieser letzteren Grössen entwickelt, so kann der Coefficient jedes einzelnen Gliedes durch iterirte Integrale ausgedrückt werden". Nach Herrn Poincaré werden diese iterirten Integrale mit Hülfe der Transcendenten

$$\varDelta(x;\ a_1, \ldots, a_m) = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-a_m} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-a_{m-1}} \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-a_1}$$

dargestellt. Die Bestimmung expliciter Ausdrücke der Coefficienten der Fundamentalgleichungen mit Hülfe dieser Transcendenten ist jedoch mit grossen Schwierigkeiten verknüpft und würde wahrscheinlich solche Entwickelungen erfordern, wie sie der Verf. ausgeführt hat. Diese aber kann man direct vornehmen, ohne erst die Ausdrücke der iterirten Integrale durch $\varDelta$-Functionen aufzustellen. Durch die dargelegte Methode erkennt man ferner, dass die Coefficienten in der Potenzreihe der $A_{h,k,i}$ durch Summen unendlich vieler rationalen Functionen der a_i dargestellt werden. Diese Summen aber reduciren sich, wie der Verf. zeigt, im allgemeinen nicht auf rationale Functionen der a_i, wodurch eine Bemerkung des Herrn Mittag-Leffler in den Acta Math. XV. 22 (vergl. das bezügliche Referat S. 327 d. B.) berichtigt wird. Zum Schluss wird die Verallgemeinerung eines von Herrn Bruns (Astr. Nachr. 2533, 2553, F. d. M. XV. 1883. 980) für eine Differentialgleichung der Störungstheorie ausgesprochenen Satzes abgeleitet. Hr.

J. Horn. Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen. I. Math. Ann. XXXIX. 391-408.

Der Verfasser untersucht die Form der regulären Lösungen eines Differentialgleichungssystems von der Gestalt

$$x\frac{dy_\alpha}{dx} = \Sigma(a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}x + \cdots)y_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m),$$

indem er, abweichend von den Herren Sauvage, Grünfeld und Königsberger, deren Arbeiten direct an die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen anknüpfen, sich lediglich

auf die Weierstrass'sche Theorie der bilinearen Formen stützt, insbesondere auf die von diesem eingeführte Normalform sowie die zugehörige Determinante mit ihren Elementarteilern, durch welche die Form der Lösungen wesentlich bedingt wird (§ 3 u. § 4), zum Ausgangspunkt seiner Betrachtungen macht. Zur Ermittelung der Form und zur Berechnung der Lösungen des obigen Differentialgleichungssystems bedient sich der Verfasser, ebenso wie Herr Grünfeld, des von Herrn Frobenius (J. für Math. LXXVI) für die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen angegebenen Verfahrens (§ 2); die vorliegende Untersuchung ist aber insofern allgemeiner als die des Herrn Grünfeld, als der letztere dieselbe nur unter der Voraussetzung durchführt, dass das in Rede stehende System aus einer Fuchs'schen Differentialgleichung hervorgeht. **Wbg.**

F. Gerbaldi. Sulle equazioni differenziali lineari.

Rivista di Mat. I. 125-126.

Im Cours d'analyse des Herrn Jordan (III. 177-178) kommt es beim Beweise für die Convergenz der Reihen, durch welche die Fundamentalintegrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung eines singulären Punktes, falls sie daselbst regulär sind, nach dem Fuchs'schen Theorem dargestellt werden können, darauf an, zu zeigen, dass eine Folge von positiven Grössen d_μ eine obere Grenze habe. Diese Eigenschaft der Grössen d_μ wird allein aus der Ungleichheit

$$(1) \qquad d_\mu < \frac{4\vartheta}{\mu} \sum_{0}^{\mu-1} d_\lambda,$$

wo 4ϑ eine positive Constante ist, abgeleitet. Der Verf. zeigt an einem Beispiele, dass die blosse Ungleichheit (1) hierzu nicht ausreicht. Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit die der Ungleichheit (1) genügenden Grössen d_μ eine obere Grenze haben, ist, dass $4\vartheta \leqq 1$. Diese Bedingung wird aber in dem citirten Beweise des Herrn Jordan nicht berücksichtigt.

Hr.

G. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène. Acta Math. XV. 1-32.

Die Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten erfahren eine lineare Substitution, wenn die unabhängige Variable x einen geschlossenen Weg beschreibt, der einen oder mehrere Verzweigungspunkte umgiebt. Die Berechnung der Coefficienten dieser Substitution aus der Differentialgleichung ist in dem Falle, dass es sich nur um einen solchen Punkt handelt und die Integrale in ihm alle „regulär" sind, längst von Herrn Fuchs erledigt. Von andern Fällen hat zunächst Herr Hamburger (J. für Math. LXXXIII, vgl. F. d. M. IX. 1877. 289) den Fall in Angriff genommen, dass jener Weg innerhalb eines Ringes zwischen zwei concentrischen Kreisen verläuft; er setzte, unter x_0 eine Stelle dieses Ringgebietes verstanden, $x = x_0 e^{\tau}$ und entwickelte die Integrale nach Potenzen von τ. Convergiren die erhaltenen Reihen noch für $\tau = 2\pi i$, so führen sie zur Lösung der Aufgabe; convergiren sie nicht so weit, so kann man sich mit Einschaltung von Zwischenwerten behelfen, die, wie der Verf. zeigt, gerade bei diesem Ansatz weniger Verwickelung bedingt als sonst. Herr Poincaré (Acta Math. IV, vgl. F. d. M. XVI. 1884. 252) setzte statt dessen:

$$x = x_0(1+t)^{\frac{2h}{\pi i}}(1-t)^{-\frac{2h}{\pi i}},$$

(mit anderen Worten, er bildete den unendlich oft überdeckt gedachten Kreisring auf einen Vollkreis ab) und entwickelte nun nach Potenzen von t. Der Verf. des vorliegenden Aufsatzes verfolgt die bei beiden Methoden erforderlichen Rechnungen ins einzelne und beseitigt die scheinbare Abhängigkeit der Resultate von x_0 durch Entwickelung der Schlussformeln nach Potenzen dieser Grösse und Beibehaltung nur des constanten Gliedes. Ein Schlussparagraph erweitert die Resultate auf Ringgebiete zwischen confocalen Ellipsen. (Vergl. das Referat über Günther, oben S. 324.) Bdt.

L. Autonne. Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. Journ. de l'Éc. Pol. LXI. 85-122.

Der Verf. beschäftigt sich mit den Differentialgleichungen der Form $Md\xi + Nd\eta = 0$, in welcher M, N rationale Functionen von ξ, η bedeuten. Durch Einführung homogener Veränderlicher führt er sie nach dem Vorgange von Clebsch über in die Gleichung eines Connexes erster Klasse, beliebiger Ordnung; die Integralcurven der Differentialgleichung erscheinen dann als Hauptcoincidenzcurven des Connexes. Die dreifach unendlich vielen Linienelemente (Punkt und Gerade in vereinigter Lage) der Ebene werden durch eine birationale Transformation mit den Punkten eines dreifach ausgedehnten Raumes in Beziehung gesetzt; dem Connexe, bezw. seiner Hauptcoincidenz, entspricht dabei eine bestimmte Fläche $\mathfrak{F}$; den Integralcurven diejenigen Curven auf $\mathfrak{F}$, deren Tangenten einem bestimmten linearen Complexe („complexe capital“) angehören. In dem speciell vorliegenden Falle eines Connexes erster Klasse ist $\mathfrak{F}$ unicursal (S. 66). Für die weitere Untersuchung werden diejenigen Punkte von $\mathfrak{F}$ wesentlich, deren Tangentialebenen zugleich ihre Polarebenen in Bezug auf den complexe capital sind („points nodaux“); deren Anzahl ist im allgemeinen endlich, in speciellen Fällen treten Curven solcher Punkte auf (S. 88). Diese sind dann Asymptotencurven von $\mathfrak{F}$ und entsprechen particulären Integralcurven.

Diese Ansätze führen auf eine Klassification der Differentialgleichungen nach der Natur der Fläche $\mathfrak{F}$ und ihrer etwaigen Nodalcurve. Von den so entstehenden Fällen untersucht der Verf. nur diejenigen, in welchen $\mathfrak{F}$ eine Ebene, eine Fläche zweiter Ordnung, eine windschiefe Fläche dritter Ordnung oder eine mit einer Nodalcurve versehene allgemeine Fläche dritter Ordnung ist. In den meisten dieser Fälle gelingt die Integration der vorgelegten Differentialgleichung durch algebraische Functionen oder durch Quadraturen über solche; der Fall der windschiefen Fläche dritter Ordnung führt auf eine Riccati'sche Gleichung (S. 93); in dem der allgemeinen Fläche dritter Ordnung

mit einer geraden Nodallinie hat der Verf. zwar eine Reduction der Ordnung des zugehörigen Connexes, aber keinen weiteren Aufschluss über die Natur der Integrale erreichen können (S. 107).

Bdt.

C. Bigiavi. Sopra una classe di equazioni differenziali lineari reducibili. Annali di Mat. (2) XIX. 97-143.

Die Frage, ob eine gegebene lineare Differentialgleichung eine in der ganzen Ebene eindeutige Function mit nur einem Punkte der Unbestimmtheit, der ins Unendliche verlegt werden kann, zu ihrem allgemeinen Integrale habe, lässt sich nach den Fuchs'schen Principien lediglich durch die Untersuchung der Wurzeln der determinirenden Gleichungen für die einzelnen singulären Punkte, also durch rein algebraische Operationen entscheiden. Die blosse Betrachtung der einzelnen singulären Punkte genügt im allgemeinen nicht mehr, wenn es sich darum handelt, zu erkennen, ob die Gleichung überhaupt überall eindeutige Integrale habe. Für die Gleichungen indes, deren Coefficienten doppeltperiodisch sind, lässt sich ein Fall angeben, wo man die Existenz einer Gruppe von eindeutigen Integralen allein durch die Natur der singulären Punkte feststellen kann. Dieser Fall bietet sich dar, wenn die Gleichung, die von n^{ter} Ordnung sei, innerhalb des Periodenparallelogramms nur einen singulären Punkt besitzt, derart, dass die Wurzeln der bezüglichen determinirenden Gleichung ganze Zahlen und $n-1$ der zu diesem Punkte gehörigen Fundamentalintegrale von Logarithmen frei sind. Die Gleichung besitzt dann eine Gruppe von überall eindeutigen Integralen, und es lässt sich leicht zeigen, dass eine solche Gleichung vollständig integrabel ist. Die hier in Betracht kommende Frage, wann in einer Gruppe von λ Integralen, die zu einer Gruppe von λ bloss um ganze Zahlen sich unterscheidenden Wurzeln der determinirenden Gleichung gehören, mehr als ein vom Logarithmus freies Integral existirt, wird im ersten Teile der Arbeit eingehend behandelt, und die Bedingungen dafür, dass alle λ, und die, dass $\lambda-1$ Integrale

von Logarithmen frei sind, explicite angegeben. Die Bedingungen des ersteren Falls stimmen mit den bereits von Herrn Fuchs angegebenen überein. Zum Schluss werden einige Beispiele von Gleichungen zweiter und dritter Ordnung mit doppeltperiodischen Coefficienten behandelt, welche die obigen Bedingungen erfüllen.

Hr.

R. Güntsche. Zur Integration der Differentialgleichung $\frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3$. Diss. Jena. B. Engau. 25 S. 4°.

Vorstehende Gleichung hat für den Fall, dass die Coefficienten p, abgesehen von einem gemeinsamen, von z abhängigen Factor, constant sind, offenbar eine Integralgleichung, die im allgemeinen die Form hat

$$(A_1+y)^{h_1}(A_2+y)^{h_2}(A_3+y)^{h_3} = cB,$$

wo B eine Function von z, und A_1, A_2, A_3, h, c Constanten sind. Diese Form untersucht nun der Verfasser für den allgemeineren Fall, dass A_1, A_2, A_3 Functionen von z sind, auf die Bedingungen, unter welchen sie einer Differentialgleichung obiger Form genügt. Es zeigt sich, dass eine solche stets durch geeignete Transformationen auf den Fall, dass die Coefficienten constant sind, zurückgeführt werden kann. Darauf wird eine Integralgleichung von der Form

$$(A_1+y)^{h_1}(A_2+y)^{h_2}(A_3+y)^{h_3}(A_4+y)^{h_4} = cB$$

nach demselben Gesichtspunkte behandelt. Die Functionen A_1, A_2, A_3, A_4 werden auf eine unabhängige zurückgeführt, und die entsprechenden Formen der Differentialgleichung aufgestellt.

Hr.

P. Benoit. Ueber Differentialgleichungen, welche durch doppeltperiodische Functionen zweiter Gattung erfüllt werden. Pr. (Nr. 94) Dorotheenst. Realgymn. Berlin. 19 S. 4°.

Der Verfasser untersucht die folgende, eine Verallgemeine-

rung der Lamé'schen Gleichung darstellende Differentialgleichung:

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{du^2} = [k_0 + k_1\wp u - m(n+1)\wp' u + \frac{m^2}{6}\wp'' u]y = \Phi(u)y,$$

worin $\wp(u)$ die Weierstrass'sche Function bedeutet, unter der Voraussetzung, dass die Gleichung ein eindeutiges Integral hat. Die angewandte Methode besteht darin, die doppeltperiodische Function erster Gattung $z = -\frac{d\log y}{du}$ einzuführen, die der Gleichung $\frac{dz}{du} - z^2 = \Phi(u)$ genügt. Mittels der von Hrn. Weierstrass gegebenen Darstellung jeder doppeltperiodischen Function erster Gattung mit nur einer wesentlich singulären Stelle im Unendlichen ergiebt sich für z die Form

$$z = r + n\frac{\sigma' u}{\sigma u} + m\wp u - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sigma'(u-b_i)}{\sigma(u-b_i)}.$$

Hierin sind $b_1, \ldots, b_n$ von Null verschiedene Unstetigkeitsstellen von z, die dadurch ermittelt werden, dass $\wp b_1, \wp b_2, \ldots, \wp b_n$ als Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades erscheinen, deren Coefficienten auf recurrentem Wege bestimmt werden. Dabei erhält man zugleich die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines eindeutigen Integrals in der Form $F(\underset{n+1}{k_0}, \underset{2n+2}{k_1}, \underset{4n+4}{m}) = 0$, wo F eine ganze rationale Function der Argumente bezeichnet und die Indices den Grad in k_0, k_1, m angeben. Ist z. B. k_1 und m gegeben, so lassen sich $n+1$ Werte von k_0 finden, die eindeutige Integrale liefern. Für die Constante r erhält man

$$r = \frac{k_1 - n(n+1)}{2m} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sigma' b_i}{\sigma b_i}.$$

Aus (2) folgt dann für das eindeutige Integral von (1) die Darstellung

$$y = Ce^{-ru + m\frac{\sigma' u}{\sigma u}} \frac{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n)}{(\sigma u)^n} = e^{m\frac{\sigma' u}{\sigma u}}\Psi(u).$$

$\Psi(u)$ ist eine doppeltperiodische Function zweiter Gattung, von der gezeigt wird, dass sie sich in der Form

$$s_0 R(u) + s_1\frac{dR(u)}{du} + \cdots + s_{n-1}\frac{d^{n-1}R(u)}{du^{n-1}}$$

darstellen lässt, wo

$$R(u) = -\frac{\sigma(u-b_1-b_2-\cdots-b_n)e^{-ru}}{\sigma(b_1+b_2+\cdots+b_n)\sigma u}$$

und s_0, s_1, ... Constanten sind. Die weitere Untersuchung erstreckt sich auf die besonderen Fälle, wo der Modul der elliptischen Function den Wert 1 oder Null erhält, $\wp u$ also in eine Exponential- oder trigonometrische Function übergeht. Zum Schluss wird gezeigt, dass die allgemeinere Gleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} = \Big[k_0+k_1\frac{\sigma' u}{\sigma u}+k_2\wp u-m(n+1)\wp' u+\frac{m^2}{6}\wp'' u$$
$$+k_1'\frac{\sigma'(u-c_1)}{\sigma(u-c_1)}+k_1''\frac{\sigma'(u-c_2)}{\sigma(u-c_2)}+\cdots+k_1^{(\tau)}\frac{\sigma'(u-c_\tau)}{\sigma(u-c_\tau)}\Big]y$$
$$(k_1+k_1'+''_1+\cdots+k_1^{(\tau)}=0,\ \tau<n)$$

eine gleiche Behandlung wie (1) gestattet. Hr.

E. A. Stenberg. Ueber die allgemeine Form der eindeutigen Integrale der linearen homogenen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten. Acta Math. XV. 259-278.

Herr Floquet hat in seinen Untersuchungen über die im Titel bezeichneten Integrale für die einzelnen Gruppen, in die sie zerfallen, eine besondere Form aufgestellt (Ann. de l'Éc. Norm. (3) I, F. d. M. XVI. 1884. 279). Diese sucht der Verfasser durch eine einfachere zu ersetzen, in der die Anzahl der doppeltperiodischen Functionen gleich der Anzahl m der die Gruppe bildenden Integrale ist, während sie bei der Form des Herrn Floquet $\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)$ beträgt. Sind $y_1, \ldots, y_m$ die Elemente der Gruppe, so lassen sie sich in folgender Gestalt darstellen:

$$y_1 = \varphi(x),\quad y_2 = \varphi(x)[A_{2,1}+\varphi_2(x)],$$
$$y_3 = \varphi(x)[A_{3,1}+A_{3,2}\varphi_2(x)+\varphi_3(x)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_m = \varphi(x)[A_{m,1}+A_{m,2}\varphi_2(x)+\cdots+A_{m,m-1}\varphi_{m-1}(x)+\varphi_m(x)],$$

wo $\varphi(x)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Art, ferner $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ doppeltperiodische Functionen erster Art bedeuten und $A_{\mu,\nu}$ ganze algebraische Functionen $(\mu-\nu)^{\text{ten}}$ Grades

von x und $\frac{\sigma'}{\sigma}(x-x_0)$ sind, die sich eindeutig bestimmen lassen, falls gewisse Constanten, an Zahl $m(m-1)$, gegeben sind.

Hr.

P. Appell. Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable. C. R. CXII. 34-37, Acta Math. XV. 281-315.

Der Verfasser bewirkt die Integration einer Klasse von linearen homogenen Differentialgleichungen, die u als Function von z bestimmen und die Eigenschaft haben, durch die Substitutionen

$$v = u\psi(z), \quad t = \varphi(z)$$

in sich selbst transformirt zu werden. $\varphi(z)$ wird als gegeben angenommen und durch folgende Eigenschaften charakterisirt: 1) $\varphi(z)$ ist eindeutig im Innern eines Gebiets R der z-Ebene. 2) Setzt man $z_1 = \varphi(z)$, $z_{i+1} = \varphi(z_i)$, so liegen alle Punkte z_1, $z_2, \ldots, z_p$ im Innern von R und convergiren gegen eine Grenze x, die kein wesentlich singulärer Punkt von $\varphi(z)$ ist. Nach den Untersuchungen des Herrn Königs (Ann. de l'Éc. Norm. (3) I Supplém., (3) II; F. d. M. XVI. 1884. 376, XVII. 1885. 370) ist x ein Punkt, für den $\varphi(z) = z$ und $|\varphi'(x)| < 1$ ist. $\varphi'(x)$ wird verschieden von Null und die Coefficienten der Differentialgleichung holomorph oder meromorph im Grenzpunkte x angenommen. Mit $\varphi(z)$ ist $\psi(z)$ bestimmt. Ist nämlich die Differentialgleichung von der n^{ten} Ordnung und auf die Form gebracht, in der der Coefficient von $u^{(n-1)}$ verschwindet, so ist $\psi(z) = \varphi'(z)^{\frac{n-1}{2}}$. Es giebt dann wenigstens ein Integral $F(z)$, welches die Relation

$$F(\varphi(z)) = A\varphi'(z)^{\frac{n-1}{2}} F(z) \qquad (A \text{ eine Constante})$$

erfüllt. Die Lösung dieser Functionalgleichung gelingt mittels der durch Herrn Königs eingeführten Function $B(z)$, welche durch die Gleichung

$$B(\varphi(z)) = \varphi'(x)B(z)$$

definirt ist, mit der Bestimmung, holomorph in x zu sein und für $z=x$ in der ersten Ordnung zu verschwinden. Es ist nämlich, abgesehen von einem constanten Factor:

$$F(z) = B(z)^r [B'(z)]^{\frac{1-n}{2}},$$

wo r die Ordnung des Verschwindens von $F(z)$ für $z=x$ angiebt. Die Coefficienten der Differentialgleichungen lassen sich rational durch die Function $B(z)$ und ihre Ableitungen ausdrücken. Hierbei zeigen sich die Differentialgleichungen im Punkte $z=x$ regulär. Ist $n=2$, also die Differentialgleichung von der Form

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0,$$

dann muss $f(z)$ die Relation erfüllen

$$f(\varphi(z)) = \frac{1}{\varphi'^2} f(z) - \frac{3\varphi''^2 - 2\varphi'\varphi'''}{4\varphi'^4} = \frac{1}{\varphi'^2} f(z) - \varpi(z).$$

Dieser Bedingung genügt die Reihe

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} [\varphi'(z)\varphi'(z_1)\dots\varphi'(z_\nu)]^2 \varpi(z_\nu),$$

welche, da $|\varphi'(x)| < 1$ ist, convergent und im Punkte x holomorph ist. Die allgemeinste Form für die Function $f(z)$ ist

$$f(z) = f_1(z) + \alpha \left[\frac{B'(z)}{B(z)}\right]^2 \qquad (\alpha \text{ eine Constante}).$$

Da $B(z)$ in x von der ersten Ordnung verschwindet, so ist offenbar die Gleichung (1) in $z=x$ regulär. Sind die Wurzeln der bezüglichen determinirenden Gleichung r_1 und r_2, so stellen

$$B^{r_1}(z)[B'(z)]^{-\frac{1}{2}}, \quad B^{r_2}(z)B'(z)^{-\frac{1}{2}}$$

zwei particuläre Integrale von (1) dar. Die Modification für den Fall $r_1 = r_2$ ergiebt sich ohne Schwierigkeit. Durch Substitution eines der Integrale in (1) für u erhält man für $f_1(z)$ eine zweite, in B und den Ableitungen von B rationale Darstellung

$$f_1(z) = \frac{3}{4}\left(\frac{B''}{B'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}.$$

Die Coefficienten der Gleichung werden constant durch die Substitution

$$t = \log B(z), \quad u = vB'(z)^{-\frac{1}{2}}.$$

Wenn $\varpi(z)$ identisch Null ist, dann wird $\varphi = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c,$

d constant) und $B(z)$ von derselben Form. Dieser Fall führt auf Gleichungen, deren Integration bekannt ist. Schreibt man für ein beliebiges n die Gleichung in der Form

$$\frac{d^n u}{dz^n} + \frac{n(n-1)}{1.2} P_2(z) \frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} P_3(z) \frac{d^{n-3}u}{dz^{n-3}} + \cdots + P_n(z) u = 0,$$

so bestehen für die Coefficienten Bedingungen der Art, dass $P_2(\varphi(z)), \ldots, P_n(\varphi(z))$ lineare Functionen von $P_2(z), \ldots, P_n(z)$ sind, deren Coefficienten die Derivirten von $\varphi(z)$ enthalten. Mit Hülfe dieser Relationen lassen sich die allgemeinsten Ausdrücke dieser Functionen bilden unter der Bedingung, dass sie meromorph in x sind. Hierbei ergiebt sich, dass $P_2(z)$ mit der oben bestimmten Function $f(z)$ bis auf einen constanten Factor identisch ist. Die Integration lässt sich mit Hülfe der Function $B(z)$ bewirken. Insbesondere gilt der Satz, dass die Substitution

$$t = a \log B(z), \quad v = u\left(\frac{B'}{B}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

die Gleichungen dieser Klasse in solche mit constanten Coefficienten zurückführt. Einige dieser Resultate lassen sich auf nicht lineare Gleichungen ausdehnen. Hr.

G. Vivanti. Sugl' integrali polidromi delle equazioni algebrico-differenziali del primo ordine. Annali di Mat. (2) XIX. 29-38.

In der Abhandlung „Zur Theorie der mehrwertigen Functionen“ (Schlömilch Z. XXXIV, F. d. M. XXI. 1889. 395) hat der Verf. die Functionen in zwei Familien eingeteilt. Diejenigen Functionen, deren Werte für einen beliebigen, aber bestimmten Wert der unabhängigen Variable durch einen in keinem Bereich dichte Punktmenge dargestellt werden, gehören zur ersten, alle übrigen zur zweiten Familie. Von den a. a. O. aufgestellten Sätzen wird hier eine Anwendung auf die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung gemacht und u. a. folgendes Resultat abgeleitet. Besteht eine solche Differential-

gleichung zwischen y und z, und haben y als Function von z und z als Function von y nur feste Verzweigungspunkte, so gehören diese Functionen, falls wenigstens einer der Verzweigungspunkte erster Art, d. h. für welche $\frac{dy}{dz}$ oder $\frac{dz}{dy} = \infty$ ist, für jede der beiden Functionen kein Punkt der Unbestimmtheit ist, zur ersten Familie wenigstens für einen beliebigen Wert der willkürlichen Constante. Hr.

Dietrichkeit. Ueber Invarianten der linearen Differentialgleichungen. Schlömilch Z. XXXVI. 311-315.

Bildung von Functionen der Coefficienten $p_0, \ldots, p_n$ einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in y, die bei einer Substitution der Form

$$y = zF(p_0, \ldots, p_n),$$

wo F einer gewissen Bedingung genügt, invariant bleiben.

Hr.

W. Heymann. Bemerkung zur Transformation der Differentialgleichungen von Punkt- in Liniencoordinaten. Schlömilch Z. XXXVI. 317-320.

In Schlömilch Z. XXXI (F. d. M. XVIII. 1886. 289) hat der Verfasser eine „Berichtigung" veröffentlicht, wonach es scheinen könnte (und so hat es auch Ref. aufgefasst), als ob das in einer Note derselben Zeitschrift XXIV aufgestellte Integral der Gleichung

$$x+y-(xy'-y)^m = 0$$

falsch wäre. Der Ausdruck ist jedoch nur vieldeutig und enthält, wie gezeigt wird, ausser der Lösung noch fremdartige Bestandteile. Die erwähnte Berichtigung sollte nur den Weg angeben, wie man direct auf die zulässige Lösung kommen und die fremdartigen von vorn herein vermeiden kann. Hr.

F. Klein. Ueber Normirung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Ann. XXXVIII. 144-152.

Die Arbeit reproducirt zunächst den ersten Teil der in den Gött. Nachr. 1890 erschienenen Note über Lamé'sche Functionen (F. d. M. XXII. 516). Daran schliessen sich weiter Angaben über die Einführung von homogenen Variabeln in bestimmte Integrale, insbesondere in diejenigen, welche Particularlösungen der hypergeometrischen Reihe darstellen. Verf. gelangt von der Riemann'schen P-Function durch Multiplication mit einem Factor $(xa)^l(xb)^m(xc)^n$ zu einer Form:

$$\Pi\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x_1, x_2 \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{matrix}\right|,$$

in der die Exponenten $\lambda', \ldots, \nu''$ keiner Bedingung unterliegen. Durch geeignete Wahl von l, m, n kann eine Normirung des Π erzielt werden: entweder so, dass $\lambda'+\lambda'' = \mu'+\mu'' = \nu'+\nu'' = 0$ wird [dann genügt es der in jener Note hergestellten normirten Differentialgleichung $(\Pi,f)_2 = \varphi\Pi$], oder so, dass $\lambda'' = \mu'' = \nu'' = 0$ wird [dann kann Π ohne weiteres durch ein bestimmtes Integral der erwähnten Art dargestellt werden]. Die am Schlusse in Aussicht gestellte, zusammenhängende Darstellung der Theorie der hypergeometrischen Function von dieser Definition aus ist inzwischen von Hrn. C. Schellenberg als Göttinger Dissertation (1892) veröffentlicht worden. Bdt.

L. Pochhammer. Ueber eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte. J. für Math. CVIII. 50-87.

Die Differentialgleichung, um welche es sich handelt, ist ein Grenzfall derjenigen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit zwei endlichen (und einem unendlich fernen) singulären Punkten, welche als Verallgemeinerungen der hypergeometrischen Differentialgleichung von Goursat (Ann. de l'École Norm. (2) XII. 1883) und dem Verf. (J. für Math. CII. 1888) aufgestellt und sowohl durch

Potenzreihen, wie durch bestimmte Integrale integrirt worden ist. Dem schliesst sich die vorliegende Abhandlung an; es werden nur, um allgemein gültige Resultate zu erlangen, die vom Verf. inzwischen (Math. Ann. XXXV, vgl. F. d. M. XXII. 1890. 407) eingeführten Integrale mit Doppelumlauf benutzt. Die erlangten Einzelresultate möge man in der Arbeit selbst einsehen.

Bdt.

L. POCHHAMMER. Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten. Math. Ann. XXXVIII. 225-246.

Im Anschluss an seine Abhandlung im XXXVI. Bande der Math. Ann. (F. d. M. XXII. 1890. 317) giebt der Verf. Darstellungen der Lösungen der genannten Gleichung durch Potenzreihen und durch bestimmte Integrale mit „doppeltem Umlauf“.

Bdt.

L. POCHHAMMER. Ueber eine binomische lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. Math. Ann. XXXVIII. 247-262.

Die Abhandlung stellt die Lösungen der Differentialgleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^p y$$

durch Potenzreihen und durch bestimmte Integrale dar.

Bdt.

L. POCHHAMMER. Ueber die Differentialgleichung der allgemeinen F-Reihe. Math. Ann. XXXVIII. 586-597.

Die Abhandlung geht aus von einer Verallgemeinerung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe und leitet die Differentialgleichung ab, welcher die durch dieselbe dargestellte Function genügt. Sie steht in naher Beziehung zu den in den vorangehenden Referaten besprochenen Arbeiten des Verfassers.

Bdt.

G. Pick. Ueber eine Normalform gewisser Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung. Math. Ann. XXXVIII. 139-143.

Zunächst wird für die Differentialgleichung dritter Ordnung, welche die Verallgemeinerung der Schwarz'schen s-Functionen auf den Fall beliebig vieler singulären Punkte bildet, eine Normalform aufgestellt. Die Differentialgleichung lautet:

$$(1)\qquad \frac{u'''}{u'}-\frac{3}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2 = R(x) = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{(1-\lambda_i)^2}{2(x-a_i)^2}+\frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

wo $a_1, \ldots, a_n$ ihre singulären Punkte, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zugehörigen Exponenten sind, $f(x) = \prod_{i=1}^{i=n}(x-a_i)$ und $\varphi(x)$ ein ganzes Polynom bedeutet, das der Bedingung unterworfen ist, dass $R(x)$ für $x=\infty$ von der vierten Ordnung verschwindet. Ist eine specielle Function $R(x) = H(x)$ gewählt, so erhält man die allgemeinste zu denselben Verzweigungswerten und Exponenten gehörige Function $R(x)$ durch Hinzufügung eines Bruches von der Form

$$\frac{c_0+c_1x+\cdots+c_{n-4}x^{n-4}}{f(x)}.$$

Für die Normalform wählt nun der Verfasser

$$H(x) = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1-\lambda_i^2}{2}\frac{1}{(x-a_i)^2}-\sum_{i,k}\frac{N_{ik}}{(x-a_i)(x-a_k)},$$

letztere Summe über alle Combinationen verschiedener i, k aus der Zahlenreihe $1, \ldots, n$ erstreckt. Hierin ist

$$N_{ik} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}\{\sigma^2-[2(n-2)-(n-1)(\lambda_i+\lambda_k)]\sigma$$
$$+(n-1)(n-2)(1-\lambda_i)(1-\lambda_k)\},$$

wo $\sum_{i=1}^{i=n}(1-\lambda_i)-2=\sigma$ gesetzt ist.

Von der Gleichung (1) geht man in bekannter Weise zur linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung über, welche die Verallgemeinerung der Gauss'schen bildet, und leitet die Normalform für diese aus der obigen ab. Hr.

M. P. Rudski. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Odessa Ges. XIII. 1-9. (Russisch.)

Die lineare Differentialgleichung

$$(1) \qquad \varphi_n \frac{d}{dx} \cdot \varphi_{n-1} \frac{d}{dx} \cdots \varphi_1 \frac{du}{dx} = u,$$

wo $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \ldots, \varphi_1$ Functionen von x sind, steht mit der Gesamtheit ähnlicher Functionen der Form

$$(2) \qquad \varphi_k \frac{d}{dx} \cdot \varphi_{k+1} \frac{d}{dx} \cdots \varphi_n \frac{d}{dx} \varphi_1 \frac{d}{dx} \cdots \varphi_{k-1} \frac{dv}{dx} = (-1)^n v$$

in Verbindung. Bezeichnen wir nämlich mit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein System n unabhängiger Lösungen von (1) und setzen

$$\mu_i^{(k+1)} = \varphi_{k+1} \frac{d\mu_i^{(k)}}{dx} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1),$$

$$\mu_i^{(1)} = \varphi_1 \frac{du_i}{dx},$$

so genügen die Minoren $M_{k,i}$ der Determinante

$$M = \begin{vmatrix} u_1 & \ldots & u_{i-1} & u_i & \ldots & u_n \\ \mu_1^{(1)} & \ldots & \mu_{i-1}^{(1)} & \mu_i^{(1)} & \ldots & \mu_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_1^{(k)} & \ldots & \mu_{i-1}^{(k)} & \mu_i^{(k)} & \ldots & \mu_n^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_1^{(n)} & \ldots & \mu_{i-1}^{(n)} & \mu_i^{(n)} & \ldots & \mu_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

den Differentialgleichungen (2). Der Beweis stützt sich auf zwei Gleichungen:

$$M_{k,i} = \varphi_k \frac{d}{dx} (M_{k+1,i}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

und

$$M_{k,i} = (-1)^n \varphi_n \frac{d}{dx} (M_{1,i}).$$

Die Determinanten $M_{1,i}$ sind auch als Quotienten gewisser Determinanten darstellbar. Dies folgt u. a. aus der letzten Bemerkung des Verfassers, dass die Gleichung (2) für $k = 1$ mit der adjungirten Gleichung von (1) zusammenfällt. Si.

G. Fouret. Sur les points singuliers des équations différentielles à deux variables du premier ordre et du premier degré. S. M. F. Bull. XIX. 128-132.

Die Differentialgleichung wird durch Einführung einer dritten Variable homogen gemacht und in der Form

$$(1) \qquad L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) + N(x\,dy - y\,dx) = 0$$

betrachtet, wo L, M, N ganze algebraische homogene Functionen von dem nämlichen Grad k bezeichnen. Die singulären Punkte von (1) sind durch die Gleichungen

$$\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}$$

gegeben. Ihre Zahl ist, wie Herr Darboux gezeigt hat, k^2+k+1. Für diesen Satz giebt der Verfasser einen neuen, sehr einfachen Beweis, woran u. a. folgende Bemerkungen geknüpft werden. Ist $k=2$, so ist durch die singulären Punkte das System der Integralcurven vollständig bestimmt. Man erhält nämlich die Tangente in einem beliebigen Punkte M an die durch ihn hindurchgehende Integralcurve, indem man diesen Punkt mit dem neunten Punkte verbindet, welchen der durch M und die sieben singulären Punkte festgelegte Büschel von Curven dritter Ordnung noch ausser diesen gemein hat. Wenn ferner mehr als $mk+n$ Punkte existiren, in welchen die hindurchgehenden Integralcurven von (1) eine algebraische Curve m^{ter} Ordnung und n^{ter} Klasse berühren, so stellt diese Curve ein particuläres Integral von (1) dar. Hr.

O. Venske. Integration eines speciellen Systems linearer homogener Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Functionen als Coefficienten. Gött. Nachr. 1891. 85-88.

Das System lautet:

$$\frac{dx}{dt} = 2a^2\Big(\frac{\eta z}{a^2+c^2} - \frac{y\zeta}{a^2+b^2}\Big), \quad \frac{dy}{dt} = 2b^2\Big(\frac{\zeta x}{b^2+a^2} - \frac{z\xi}{b^2+c^2}\Big),$$

$$\frac{dz}{dt} = 2c^2\Big(\frac{\xi y}{c^2+b^2} - \frac{x\eta}{c^2+a^2}\Big),$$

wo ξ, η, ζ elliptische Functionen von t bedeuten, die den Gleichungen

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{2a^2(b^2-c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\eta\zeta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{2b^2(c^2-a^2)}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}\zeta\xi,$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{2c^2(a^2-b^2)}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}\xi\eta$$

genügen. Ein particuläres Integralsystem ist offenbar $x_1 = \xi$, $y_1 = \eta$, $z_1 = \zeta$. Sind ferner x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 zwei beliebige andere Integralsysteme, so sind die Ausdrücke

$$\frac{x_i x_k}{a^2} + \frac{y_i y_k}{b^2} + \frac{z_i z_k}{c^2} = l_{i,k} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

von t unabhängig. Setzt man nun

$$l_{ii} = 1, \quad l_{i,k} = 0 \qquad (i \lesseqgtr k),$$

so wird

$$x_2 + ix_3 = e^{\int\left(-x_1\frac{dx_1}{dt} - 2i\epsilon a^2bc\left(\frac{\eta y_1}{b^2(a^2+c^2)} + \frac{\zeta z_1}{c^2(a^2+b^2)}\right)\right)\frac{dt}{a^2-x_1^2}}.$$

Mittels vorstehender Gleichungen erhält man aus dem bekannten Integralsystem $x_1 = \xi$, $y_1 = \eta$, $z_1 = \zeta$ zwei weitere von diesem und von einander linear unabhängige Integralsysteme, und damit die allgemeine Lösung. Hr.

E. Grünfeld. **Ueber die Darstellung der Lösungen eines Systems linearer Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes.** Schlömilch Z. XXXVI. 21-33.

Der Verf. wendet das vom Ref. im J. für Math. LXXXIII (F. d. M. IX. 1877. 289) bei der linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung eingeschlagene Verfahren an, um die Darstellung der Integrale des Systems

$$(1) \qquad A\frac{du_i}{dx} = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit eindeutigen Coefficienten in der Umgebung des Nullpunktes der x-Ebene für den allgemeinen Fall durchzuführen, dass die Entwickelungen der Fundamentalintegrale positive und negative

Potenzen von x in unendlicher Anzahl enthalten. Der Verf. setzt nun

$$A(x) = x(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n),$$

ohne zu bemerken, dass er damit in den von Herrn Sauvage in den Ann. de l'Éc. Norm. (3) III (F. d. M. XVIII. 1886. 283) behandelten Fall, in dem sämtliche Lösungen in der Umgebung des Nullpunktes regulär sind, geraten ist. Denn im allgemeinen Falle müsste die Potenz von x in A höher als die erste sein. Die Bemerkung im zweiten Abschnitt auf S. 28, dass die Coefficienten der Fundamentalgleichung nach ganzen positiven Potenzen von x_0 entwickelbar, d. h. also für $x_0 = 0$ endlich sind, ist auch nur dann richtig, wenn der Coefficient $a(x)$ in dem transformirten System von (1)

$$a(x)\frac{du_i}{d\log x} = a_{i1}(x)u_1 + \dots + a_{in}(x)u_n$$

für $x = 0$ von Null verschieden ist, wie es bei der gemachten Annahme über A allerdings der Fall ist. Die Gleichungssysteme (24), (24)', ... auf S. 28 und 29 zur Ermittelung der von x_0 freien Glieder in den Coefficienten der Fundamentalgleichung haben daher auch nur für den regulären Fall Gültigkeit. Für die Entwickelungen im ersten Abschnitte ist jedoch die vorausgesetzte Form für A ohne Einfluss. Hr.

G. Pennacchietti. Sugl'integrali comuni a più sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Atti dell' Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania. (4) III. 27 S.

Das Hauptproblem der früheren Schrift des Verfassers: Sugl'integrali delle equazioni della dinamica (Atti dell'Acc. Gioenia (4) II; F. d. M. XXII. 1890. 892) war die Bestimmung der ersten Integrale, welche zwei Systemen von je μ Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit ebenso vielen abhängigen und einer einzigen unabhängigen Veränderlichen gemeinschaftlich sind. Die dazu benutzte Methode wird hier auf die Aufsuchung der gemeinschaftlichen Integrale irgend welcher Ordnung zweier Systeme

von je μ Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit μ abhängigen und einer einzigen unabhängigen Veränderlichen angewandt.

Vi.

G. Haeuser. Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme. Schlömilch Z. XXXVI. 116-123.

Die symbolische Methode zur Auflösung von Differentialgleichungen wird auf die Integration linearer nicht homogener Differentialgleichungssysteme mit constanten Coefficienten angewandt, deren von den abhängigen Veränderlichen freie Glieder rational und ganz aus e^{ax}, $\sin nx$, $\cos nx$ und ganzen Functionen von x zusammengesetzt sind, wenn x die unabhängige Variable bedeutet. In dem besonderen Falle, dass diese nur aus ganzen Functionen bestehen, lässt sich ein particuläres Integralsystem in einer Form herstellen, die jene Functionen und ihre Ableitungen linear enthält, wofern nicht die Determinante der constanten Coefficienten verschwindet; bei verschwindender Determinante treten noch bis zu einem gewissen Grade iterirte Quadraturen jener Functionen hinzu.

Hr.

A. Guldberg. Ueber einen Punkt aus der Theorie der Differentialgleichungen. Monatsh. f. Math. II. 147-154.

Bekannte Sätze über das Verhalten der Integrale simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung solcher Punkte, wo die Ausdrücke für die Differentialquotienten die Form $\frac{0}{0}$ annehmen. S. Koenigsberger, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen S. 352ff.

Hr.

R. A. Roberts. On an algebraic integral of two differential equations. Lond. M. S. Proc. XXII. 28-34.

1. Eine durch Einfachheit bemerkenswerte Anwendung des Abel'schen Theorems auf die algebraische Integration des Diffe-

rentialgleichungssystems

$$\frac{dx_1}{\sqrt[3]{u_1 v_1^2}} + \frac{dx_2}{\sqrt[3]{u_2 v_2^2}} + \frac{dx_3}{\sqrt[3]{u_3 v_3^2}} = 0,$$
$$\frac{dx_1}{\sqrt[3]{u_1^2 v_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt[3]{u_2^2 v_2}} + \frac{dx_3}{\sqrt[3]{u_3^2 v_3}} = 0,$$

worin

$$u = lx^2 + mx + n, \quad v = l'x^2 + m'x + n',$$

x_1, x_2, x_3 drei Werte von x und (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) die entsprechenden Werte von u, v bezeichnen.

2. Zurückführung der Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{uv^2}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{u^2 v}}$$

auf elliptische. Hr.

A. Mayer. Ueber die Zurückführung eines vollständigen Systems auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Leipz. Ber. XLIII. 448-458.

In den Math. Ann. V (F. d. M. IV. 1872. 162) hat der Verfasser gezeigt, dass die Auffindung der $n-q$ unabhängigen Lösungen des q-gliedrigen vollständigen Systems:

$$(1) \qquad A_1(f) = 0, \quad A_2(f) = 0, \quad \dots, \quad A_q(f) = 0,$$

wo

$$A_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_k} - \sum_{q+1}^{n} {}_\lambda X_k^\lambda(x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

und die Bedingungen

$$A_k[A_i(f)] = A_i[A_k(f)]$$

erfüllt sind, auf die vollständige Integration eines einzigen Systems von $n-q$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird diese Integrationsmethode auf kürzere Art abgeleitet, die den vorherigen Nachweis der Existenz von $n-q$ unabhängigen Lösungen entbehrlich macht. Durch die Substitutionen

$$(2) \qquad x_1 = a_1 - y_1 t, \quad x_2 = a_2 - y_2 t, \quad \dots, \quad x_q = a_q - y_q t,$$

in denen t, $y_2, \ldots, y_q$ neue Variabeln, $y_1 = 1$ und $a_1, \ldots, a_q$ Constanten sind, gehe $A_1(f) = 0$ in

$$(3) \qquad B_1(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{q+1}^{n} \lambda Y_1^\lambda \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0$$

über. Für diese Gleichung, in der $y_2, \ldots, y_q$ als Constanten zu betrachten sind, ist es wesentlich, zu zeigen, dass sie bei willkürlichen $a_1, \ldots, a_q$ Hauptlösungen hinsichtlich $t = 0$ besitzt, d. h. dass die ihr äquivalenten $n-q$ gewöhnlichen Differentialgleichungen solche Auflösungen

$$x_\lambda = \psi_\lambda(t, a_{q+1}, \ldots, a_n) \qquad (\lambda = q+1, \ldots, n)$$

besitzen, die für $t = 0$ sich auf $x_\lambda = a_\lambda$ reduciren. Dieser Beweis wird erbracht. Die Hauptlösungen verwandeln sich, wenn man rückwärts wieder für t, $y_2, \ldots, y_q$ ihre Werte aus (2) einsetzt, in $n-q$ unabhängige Lösungen von (1). Hr.

G. Torelli. Ricerca del rapporto fra i discriminanti di un'equazione algebrico-differenziale di 1° ordine e della sua primitiva completa per mezzo della teoria delle curve piane razionali. Annali di Mat. (2) XIX. 254-260.

Bereits in einer früheren Arbeit „Contribuzione alla teoria delle equazioni algebrico-differenziali" (Batt. G. XXIV, F. d. M. XVIII. 1886. 240) hat der Verfasser sich mit der Relation

$$G = g \, . \, k^2$$

beschäftigt, in welcher G die Discriminante der „vollständigen primitiven" Gleichung

$$(1) \qquad f_0 \omega^m + f_1 \omega^{m-1} + \cdots + f_m = 0$$

und g die Discriminante derjenigen Differentialgleichung bedeutet, welche man durch Elimination der willkürlichen Constante ω aus (1) und der daraus durch Differentiation nach der unabhängigen Veränderlichen hervorgehenden Gleichung erhält, während k ein aus den ersten partiellen Ableitungen von $f_0, f_1, \ldots, f_m$ nach den beiden Variabeln rational und ganz zusammengesetzter Ausdruck ist. In der vorliegenden Arbeit nimmt der Verfasser die Untersuchung des Ausdrucks k von

neuem auf und gelangt auf geometrischem Wege mit Hülfe der Theorie der ebenen rationalen Curven zu der bereits früher gefundenen Form desselben.

Wbg.

W. Laska. Ueber gewisse Curvensysteme und ihre Anwendung zur graphischen Integration der Differentialgleichungen. Prag. Ber. (1890) 222-225.

Anwendung von Liniencoordinaten zur graphischen Integration und überhaupt zur Integration gewisser Differentialgleichungen.

Hr.

A. A. Markoff. Der Calcul der endlichen Differenzen. Zweite Abteilung. St. Petersb. 1891. 1-123. (Russisch.)

Die zweite Abteilung des Werkes, über dessen ersten Teil F. d. M. XXI. 1889. 285 referirt wurde, ist den Gleichungen mit endlichen Differenzen und ihrer Summirung gewidmet und zeichnet sich, wie die frühere Veröffentlichung, durch die Fülle des Stoffes und die Originalität der Darstellung aus. Im ersten Capitel behandelt der Verfasser die Summirung im Zusammenhange mit der Frage nach der Bestimmung der Function gemäss der gegebenen Differenz erster Ordnung; das zweite und dritte ist der Formel von Euler und ihren Anwendungen gewidmet. Die Capitel IV - VI enthalten die Theorie der Differenzengleichungen. Die Auflösung der Gleichungen

$$y_{x+1,t+1} - a_{x,t}\, y_{x,t+1} = b_{x,t}\, y_{x+k,t}$$

führt zum Beweise der von Herrn Hermite (Cours d'Analyse) gegebenen Reihen für

$$\frac{\log(1-\xi)(1-\eta)}{\xi\eta-\xi-\eta} \quad \text{und} \quad \frac{(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}+(1-\eta)^{-\frac{1}{2}}}{1+(1-\xi)^{\frac{1}{2}}(1-\eta)^{\frac{1}{2}}}.$$

Im letzten (VII.) Capitel behandelt der Verfasser die Transformation der Reihen mit Hülfe der Doppelsummen und teilt einige Resultate aus seinem „Mémoire sur la transformation des séries peu convergentes en séries très convergentes" mit (vgl. oben S. 249).

Wi.

Hj. Mellin. Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung. Acta Math. XV. 317-384.

Der Verfasser knüpft an die bekannte Arbeit des Herrn Prym (J. für Math. LXXXII, F. d. M. VIII. 1877. 303) an. Die Function $\Gamma(z)$, welche durch die Bedingungen

$$\Gamma(z+1) = z\,.\,\Gamma(z),\quad \lim_{\nu=\infty} \frac{\Gamma(z+\nu)}{\nu^z \underline{|\nu-1}} = 1$$

vollständig bestimmt ist, kann, wie dort bewiesen ist, auf die Form

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z)$$

gebracht werden, worin $P(z)$ eine durch die Bedingungen

$$P(z+1) = z\,.\,P(z) - e^{-1},\quad \lim_{\nu=\infty} \frac{P(z+\nu)}{\nu^z \underline{|\nu-1}} = 0$$

vollständig bestimmte und in der Form einer Partialbruchreihe darstellbare Function bezeichnet, während $Q(z)$ eine durch die Bedingungen

$$Q(z+1) = z\,.\,Q(z) + e^{-1},\quad \lim \frac{Q(z+\nu)}{\nu^z \underline{|\nu-1}} = 1$$

vollständig bestimmte und in eine beständig convergirende Potenzreihe entwickelbare Function bedeutet. Diesen Satz hat der Verfasser in einer früheren Abhandlung „Zur Theorie der Gammafunction" (Acta Math. VIII. 37-80, F. d. M. XVIII. 1886. 441) auf die Function

$$F(z) = a^z \frac{\Gamma(z-z_1)\ \dots\ \Gamma(z-z_m)}{\Gamma(z-z'_1)\ \dots\ \Gamma(z-z'_n)}$$

ausgedehnt und noch allgemeiner auf Functionen $f(z)$, welche durch eine Functionalgleichung

$$f(z+1) = r(z)f(z) - s(z),$$

worin $r(z)$ und $s(z)$ rationale Functionen bedeuten, und eine Grenzbedingung der Form

$$\lim_{\nu+\infty} \frac{f(z+\nu)}{a^{z+\nu}(\nu^z \underline{|\nu-1})^{m-n}\nu^k} = C$$

charakterisirt sind.

Auf diese mit $\Gamma(z)$ sehr nahe verwandten Transcendenten lassen sich sehr viele bestimmte Integrale zurückführen von der Gestalt

$$\int yx^{z-1}\,dx,$$

worin y eine Function bedeutet, die einer linearen homogenen Differentialgleichung der Form

$$(a_0+b_0x)x^n\frac{d^ny}{dx^n}+(a_1+b_1x)x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+(a_n+b_nx)\,y\;=\;0$$

genügt (Abschnitt IV). Da nun bei der Anwendung dieser Transcendenten in der Theorie der bestimmten Integrale die obige Grenzbedingung — wie Herr Scheeffer (J. für Math. XCVII, F. d. M. XVI. 1884. 457) bereits hinsichtlich der Functionen $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$ bemerkt hat — den Mangel besitzt, aus der Form der zu bestimmenden Integrale in manchen Fällen nicht ohne weiteres ersichtlich zu sein, so ist es der Zweck der vorliegenden Abhandlung, diese Bedingung durch andere zu ersetzen, welche an den Integralen direct erkannt werden können. Zu diesem Zwecke wird im ersten Abschnitt das Verhalten der Function

$$F(z)\;=\;\frac{\Gamma(z-a_1)\;\ldots\;\Gamma(z-a_m)\,.\,\Gamma(\alpha_1-z)\;\ldots\;\Gamma(\alpha_\mu-z)}{\Gamma(z-b_1)\;\ldots\;\Gamma(z-b_n)\,.\,\Gamma(\beta_1-z)\;\ldots\;\Gamma(\beta_\nu-z)}$$

untersucht, wenn der reelle Teil der Veränderlichen $z=\zeta+i\zeta'$ auf ein beliebiges, aber endliches Intervall $(\alpha\leqq\zeta\leqq\beta)$ beschränkt wird, während ζ' dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst, sodass das Gebiet der Veränderlichen z geometrisch durch einen zur imaginären Axe parallelen Streifen von der Breite $\beta-\alpha$ dargestellt wird. Im zweiten und dritten Abschnitt werden dann die Functionen behandelt, welche lineare homogene Differenzengleichungen erster Ordnung

$$F(z+1)=r(z)\,.\,F(z)\quad\text{bez.}\quad F(z+1)=r(z)\,.\,F(z)-s(z)$$

befriedigen und sonst gewissen Bedingungen genügen, die eben geeignet sind, jene Grenzbedingung zu ersetzen; um ein Bild von denselben zu geben, teilen wir die Specialisirung der von dem Verfasser erhaltenen Resultate für die Gammafunction mit:

„Die Function $\Gamma(z)$ ist, abgesehen von einem constanten Factor die einzige monogene Function von $z = \zeta + i\zeta'$, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

I) $\Gamma(z)$ befriedigt die Functionalgleichung $\Gamma(z+1) = z.\Gamma(z)$.

II) $\Gamma(z)$ verhält sich im Innern der durch die Bedingung $\zeta \geqq 0$ definirten Hälfte der z-Ebene überall regulär.

III) Wird die Veränderliche z, unter α eine positive Zahl verstanden, auf den zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ beschränkt, so kann der absolute Betrag von $\Gamma(z)$ nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen".

Im vierten Abschnitt endlich wird die Beziehung zwischen den Gammafunctionen und den Integralen der oben angeführten linearen homogenen Differentialgleichung untersucht.

Wbg.

Capitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

M. P. Mansion. Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Herausgegeben von H. Maser. Berlin. J. Springer. XXI + 489 S. 8°. (1892.)

Die neue deutsche Ausgabe des mit Recht geschätzten Mansion'schen Werkes ist mit Freuden zu begrüssen. Die Klarheit des Ausdrucks und die Gründlichkeit der Analyse der hervorragenden Abhandlungen über die partiellen Differentialgleichungen, welche die alte Ausgabe auszeichneten, sind in der neuen bewahrt geblieben. Verschiedene neuere Abhandlungen sind in besonderen Capiteln ausführlich gewürdigt worden, so namentlich Gilbert's Darstellung der Jacobi'schen Integrationsmethode (Brux. S. sc. V, F. d. M. XIII. 1881. 295); die vielen Arbeiten, die sich auf die Existenz des allgemeinen Integrals und der singulären Lösungen beziehen, sind in kurzer historischer Uebersicht angegeben worden, während die hierher gehörige bekannte Abhand-

lung der Frau v. Kowalevsky (J. für Math. LXXX, F. d. M. VII. 1875. 205) vollständig als Anhang abgedruckt worden ist. Die ausführlichen litterarischen und historischen Notizen, welche das Werk zu einem sicheren Führer durch das betreffende Gebiet machten, sind bis auf die neueste Zeit fortgeführt und an manchen Stellen berichtigt worden, so der Irrtum, dass die im Texte auseinandergesetzte Methode zur Integration der simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen, zu denen die Jacobi'sche Methode führt, Weiler zugeschrieben worden war.

Als glücklicher Gedanke muss es bezeichnet werden, dass die eingehende Imschenetzky'sche Abhandlung über die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Archiv für Math. LIV. 209-360, F. d. M. IV. 1872. 156) in deutscher Uebersetzung im Anhang abgedruckt worden ist, ebenso wie die Darboux'sche Arbeit (Ann. de l'Éc. Norm. VII. 163-173, F. d. M. II. 1869-70. 316) über dieses Thema. Sh.

S. Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Bearbeitet und herausgegeben von G. Scheffers. Leipzig. B. G. Teubner. XV + 568 S. 8°.

Jeder akademische Docent, der eine mit einem Seminar verknüpfte Vorlesung über die ältere Theorie der Differentialgleichungen gehalten hat, wird wohl das Missliche empfunden haben, welches sich durch den Mangel an Zusammenhang zwischen den mannigfaltigen speciellen Integrationsmethoden aufdrängt; er wird das unbefriedigende Gefühl gehabt haben, dass dieser Zweig der Mathematik die Bezeichnung einer Wissenschaft eigentlich nicht verdient.

Diesem Mangel will das vorliegende Buch abhelfen, es legt in echt pädagogischem Aufbau mit Einstreuung zahlreicher instructiver Beispiele dar, wie thatsächlich das „Gemenge“ der früheren Integrationsmethoden zu einer „organischen Verbindung“ umgestaltet werden kann. Der Schlüssel des Verfahrens liegt im Begriffe der infinitesimalen Transformation (weiterhin kurz mit

I. T. bezeichnet) und dem sich daran anschliessenden der ein- und mehrgliedrigen Gruppen von Transformationen.

Das Buch ist (mit Ausnahme weniger Entwickelungen und Hülfssätze), unter absichtlichem Ausschluss der höheren Stufen der Theorie, so elementar gehalten, dass der Herausgeber nicht zu viel behauptet, wenn er sich bereits einen Studenten im vierten Semester als aufnahmefähigen Leser denkt.

Wenn zu dem Behuf die Darstellung, wie die Vorrede einräumt, „etwas breit, vielleicht hier und da etwas zu breit" geraten ist, so wollen wir hierüber mit dem Herausgeber nicht rechten.

Um in den Geist des Ganzen möglichst bald einzudringen, beginnen wir mit zwei einfachsten Beispielen von Differentialgleichungen, bei denen es bekannt ist, dass man mit blossen Quadraturen zum Ziele gelangt.

1) $y' = f(y)$. Für $y =$ const. ist hier auch $y' =$ const., oder geometrisch gesprochen, vermöge der Differentialgleichung wird allen Punkten längs einer Geraden $y =$ const. dieselbe „Richtung" zugeordnet; die Integralcurven der Gleichung können daher aus einer einzigen durch Verschiebung derselben längs der x-Axe abgeleitet werden. Jede solche Verschiebung („Translation") hat zum analytischen Ausdruck die „Transformation" $x_1 = x + a$, $y_1 = y$, wo a einen willkürlichen Parameter bedeutet; sie vertauscht demnach nur die ∞^1 Schar der Integralcurven, lässt sie aber als Ganzes unverändert. Dies gilt im besonderen auch für einen unendlich kleinen Wert von a, d. i. eben für eine *I. T.*

2) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (homogene Differentialgleichung). Allen Punkten desselben Strahles $\frac{y}{x} =$ const. wird hier die nämliche Richtung y' zugeordnet. Die ∞^1 Schar der Integralcurven geht somit durch ähnliche Vergrösserung (oder Verkleinerung) vom Anfangspunkte aus in sich über, d. i. durch alle *T* von der Form $x_1 = ax$, $y_1 = ay$, und im besonderen wiederum durch eine *I. T*, sobald der Wert von a von der Einheit nur unendlich wenig abweicht.

Man wird sich daher die Frage vorlegen, ob denn nicht eine derartige aprioristische Kenntnis einer Schar von T und im besonderen einer $I.T$, welche jede Integralcurve einer vorgelegten gewöhnlichen Differentialgleichung wieder in eine solche überführt, methodisch dazu verwertet werden kann, das Integrationsgeschäft zu vereinfachen, ja geradezu principiell zu begründen. Vor allem drängt sich die Bemerkung auf, dass die in den beiden Beispielen (und desgleichen noch in einer grossen Reihe weiterer) auftretenden Scharen von T in zwei Variabeln x, y eine specifische Eigentümlichkeit besitzen, welche sie von beliebigen Scharen von T wohl unterscheidet.

Uebt man nämlich auf einen „Punkt" (x, y) eine erste Translation mit dem Parameter a aus, wodurch er in die Lage (x_1, y_1) übergehe, und nunmehr auf diesen neuen Punkt (x_1, y_1) eine neue Translation mit dem Parameter a', welche denselben in die Lage (x_2, y_2) bringt, so kann man offenbar auch beide Translationen zu einer einzigen mit dem Parameter $(a+a')$ zusammensetzen, welche (x, y) direct in (x_2, y_2) überführt. Eliminirt man nämlich aus den Gleichungen $x_1 = x + a$, $y_1 = y$; $x_2 = x_1 + a'$, $y_2 = y_1$ die Zwischenvariabeln x_1, y_1, so kommt $x_2 = x + (a + a')$, $y_2 = y$. Diese Translationen bilden demnach eine „Gruppe" von T. Hierauf gestützt, sieht man zugleich, weshalb die vorliegende „eingliedrige" Gruppe von Translationen durch ihre $I.T$ charakterisirt und erzeugt werden kann; man hat eben nur eine $I.T$ genügend oft zu wiederholen, um zu jeder „endlichen" T zu gelangen.

Es ist deutlich, wie die erwähnten Eigenschaften unmittelbar durch die ursprüngliche Eigenschaft der T bedingt werden, jede Integralcurve von $y' = f(y)$ wieder in eine solche überzuführen. Ganz Analoges gilt von dem zweiten Beispiel, wo sich zwei Aehnlichkeitstransformationen mit den Parametern a und a' zu einer einzigen mit dem Parameter (aa') zusammensetzen.

Es ergiebt sich somit die Notwendigkeit, vorab die wichtigsten Eigenschaften einer Gruppe von T, namentlich der eingliedrigen (d. i. nur einen, stetig veränderlichen Parameter mit

sich führenden) festzustellen. In der That stellt sich heraus, dass das bei den obigen speciellen Gruppen von T Bemerkte allgemein gilt. Der Einfachheit halber bleiben wir bei zwei Veränderlichen. Man darf sich auf solche Gruppen von T beschränken, welche die „identische Transformation" enthalten, d. h. bei denen den Parametern ein solches Wertsystem beigelegt werden kann, dass jeder Punkt in Ruhe bleibt, zugleich auch auf solche, für welche zu jeder T auch die „inverse" innerhalb der Gruppe existirt, deren Wirkung diejenige von T gerade aufhebt.

Eine eingliedrige Gruppe lässt sich in Form einer Reihe entwickeln (wo t den Parameter bedeutet):

$$x_1 = x + \xi(x, y)\frac{t}{1} + \left(\xi\frac{\partial\xi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\frac{t^2}{1.2} + \cdots,$$

$$y_1 = y + \eta(x, y)\frac{t}{1} + \left(\xi\frac{\partial\eta}{\partial x} + \eta\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{t^2}{1.2} + \cdots.$$

Fasst man hier $\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} = U$ als eine Operation auf, so ist das Bildungsgesetz der Coefficienten sehr deutlich; man hat nur diese Operation auf ξ resp. η wiederholt anzuwenden.

Für $t = 0$ kommt die Identität, für $t = \delta t$ die *I. T.* Es wird auf Grund der Umkehrung der Potenzreihen der wichtige Satz nachgewiesen (es ist das einer der wenigen nicht-elementaren Beweise des Buches), dass eine eingliedrige Gruppe von T im wesentlichen nur eine „einzige" *I. T* besitzt, die eben durch die Functionen $\xi(x, y)$ und $\eta(x, y)$ vollständig charakterisirt ist, und welche rückwärts wieder die Gruppe erzeugt. Man spricht daher kurz von der eingliedrigen Gruppe U. Bezeichnet $f(x, y)$ eine ganz willkürliche Function, so dient Uf als Symbol der *I. T*; $Uf.\delta t$ ist der Zuwachs, den f vermöge der *I. T* erhält.

Mit diesem Symbol Uf wird fast ausschliesslich gerechnet, da ihm drei hervorragende Eigenschaften zukommen: Erstens behält dasselbe bei Einführung neuer Veränderlicher seine Form, zweitens setzt sich das Symbol der *I. T* einer mehrgliedrigen Gruppe einfach linear mit constanten Coefficienten aus Sym-

bolen eingliedriger Gruppen zusammen, und endlich liefert der sogenannte Klammerprocess $(U_1 U_2)$ für zwei solche Symbole

$$U_1 = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad U_2 = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

nämlich

$$(U_1 U_2) f \equiv (U_1 \xi_2 - U_2 \xi_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (U_1 \eta_2 - U_2 \eta_1) \frac{\partial f}{\partial y}$$

wiederum ein Symbol der nämlichen Form.

Die oben erwähnten Reihenentwickelungen erhält man durch Integration der (fast unmittelbar aus dem Begriff der eingliedrigen Gruppe folgenden) Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{\xi(x_1, y_1)} = \frac{dy_1}{\eta(x_1, y_1)} = dt$$

mit den Anfangsbedingungen $x_1 = x$, $y_1 = y$ für $t = 0$.

Diese Differentialgleichungen lassen sich aber auch direct integriren und führen zu einem Ergebnis von der Gestalt: $\Omega(x_1, y_1) = \Omega(x, y)$, $W(x_1, y_1) - t = W(x, y)$, was den wichtigen Satz liefert: „Eine eingliedrige Gruppe von T lässt sich durch Einführung neuer Veränderlicher (nämlich Ω und W) auf die kanonische Gestalt von Translationen bringen."

Bei Variation des Parameters einer eingliedrigen Gruppe beschreibt irgend ein Punkt der Ebene eine Curve, seine „Bahncurve"; die Gesamtheit der Bahncurven wird durch eine Gleichung $\Omega(x, y) = \text{const.}$ dargestellt, und Ω (oder auch irgend eine Function von Ω) ist dann die „Invariante" der Gruppe. Es giebt noch eine zweite Art von invarianten Curven, für die jeder einzelne Punkt in Ruhe bleibt, für die also $\xi = \eta = 0$ ist. Beide Curven können aber durch das eine Kriterium zusammengefasst werden, dass $U\Omega = 0$ ist vermöge $\Omega = 0$.

Um nunmehr die Theorie der eingliedrigen Gruppen auf Differentialgleichungen mit bekannten $I.\ T$ anzuwenden, fehlt noch ein Schritt. Wann gestattet eine ∞^1 Schar von Curven $\Omega = \text{const.}$ die T einer eingliedrigen Gruppe?

Die Antwort lautet: Dann, und nur dann, wenn $U\Omega$ eine Function von Ω allein ist.

Verbindet man dies mit der bekannten Bemerkung, dass die Integralcurven $\omega(x, y) = \text{const.}$ einer Differentialgleichung $X(x, y)dy - Y(x, y)dx = 0$ auch durch die Lösung ω der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

definirt werden können, so gelangt man zu dem grundlegenden Satze: „Gestattet die Differentialgleichung $Xdy - Ydx = 0$, d. h. gestattet die Schar ihrer Integralcurven die bekannte *I. T*:

$$Uf \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

(nur dass nicht jede Integralcurve einzeln invariant bleibt), so ist $\frac{1}{X\eta - Y\xi}$ ein Euler'scher „Integrabilitätsfactor“ der Differentialgleichung, und die Gleichung der Integralcurven lautet

$$\int \frac{Xdy - Ydx}{X\eta - Y\xi} = \text{const.“}$$

Für die praktische Anwendung hat man nur noch ein directes Kriterium dafür aufzustellen, dass die vorgelegte Differentialgleichung, deren Integralcurven ja noch unbekannt sind, die eingliedrige Gruppe Uf gestattet. Dies geschieht in eleganter Weise mittels der oben erwähnten Klammeroperation; es ergiebt sich, dass die Gleichung $Xdy - Ydx = 0$ dann, und nur dann, Uf gestattet, wenn identisch in x, y und f:

$$(UA)f \equiv \lambda \,.\, Af,$$

wo $Af = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}$ und λ eine Function von x und y allein bedeutet.

Der Integrabilitätsfactor erlaubt eine elegante geometrische Deutung, welche die Möglichkeit einer Reihe schöner Anwendungen gewährt. Es sei (x, y) ein Punkt P auf einer Integralcurve $\omega = c$, und $\omega = c + \delta c$ sei eine benachbarte Integralcurve, ferner δs der Normalabstand im Punkte P zwischen beiden Curven; endlich trage man auf der Tangente des Punktes P von P aus die Strecke $\sqrt{X^2 + Y^2}$ ab.

Dann ist der fragliche Integrabilitätsfactor umgekehrt proportional dem Rechtecke aus den beiden erwähnten Strecken.

Der Zusammenhang zwischen dem in Rede stehenden Factor und einer *I. T*, sowie die geometrische Deutung des ersteren lässt sich ausdehnen auf eine lineare partielle Differentialgleichung in n Variabeln, welche $n-1$ *I. T* gestattet.

Hat man mehrere gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei Variabeln, zwischen deren Multiplicatoren gewisse functionale Abhängigkeiten statthaben, so lassen sich aus der Kenntnis der letzteren bemerkenswerte Schlüsse hinsichtlich der Integration der vorgelegten Gleichungen ziehen. Hiervon werden schöne Anwendungen auf Probleme der Flächentheorie gemacht, die allerdings, wie der Referent nebenbei bemerkt, nicht wesentlich an den Begriff der *I. T* und der eingliedrigen Gruppe gebunden sind.

Sind sogar zwei *I. T* einer Differentialgleichung erster Ordnung in zwei Variabeln bekannt, so führen die beiden zugehörigen Multiplicatoren unmittelbar durch Division zu einem Integrale; umgekehrt wird gezeigt, wie die Kenntnis einer *I. T* und eines Integrals sofort sämtliche *I. T*, welche die Gleichung gestattet, hinzuschreiben erlaubt.

Die nunmehr sich aufdrängende Frage ist, wie die vorliegende Theorie modificirt werden muss, wenn die Differentialgleichung nicht in aufgelöster Form $Xy' - Y = 0$ vorgelegt erscheint, sondern in impliciter Form als Gleichung $\Omega(x, y, y') = 0$.

Hier wird ein wesentlicher Fortschritt erzielt durch Einführung des Begriffes einer (einmal) „erweiterten" eingliedrigen Gruppe und ihrer *I. T*.

Liegt nämlich überhaupt eine Transformation vor: $x_1 = \varphi(x, y)$, $y_1 = \psi(x, y)$, so ist damit auch jeder Richtung $y' = \frac{dy}{dx}$ eine bestimmte transformirte Richtung $y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1}$ zugeordnet vermöge der bekannten Formel $y'_1 = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} y'}{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y'}$. Im Verein mit den

beiden gegebenen Formeln hat man so eine T in drei Veränderlichen x, y, y', die „Erweiterung" der ursprünglichen. Bilden im besonderen die vorgelegten Gleichungen eine eingliedrige (oder auch mehrgliedrige) Gruppe von T., so bilden auch die erweiterten Gleichungen eine solche, nämlich in x, y, y'. Die Parameter befolgen dabei beidemal genau dasselbe Zusammensetzungsgesetz.

Die $I.\ T$ der erweiterten Gruppe lässt sich unmittelbar aus der $I.\ T$ der ursprünglichen herleiten; ist die letztere, wie oben, gegeben durch $Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$, so wird das Symbol $U'f$ der neuen $I.\ T$:

$$U'f \equiv Uf + \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2\right] \frac{\partial f}{\partial y'},$$

oder kürzer geschrieben:

$$U'f \equiv Uf + \left[\frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx}\right] \frac{\partial f}{\partial y'} \equiv Uf + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Hieraus entspringt in Verallgemeinerung eines früher mitgeteilten Satzes das wichtige Kriterium, dass eine Differentialgleichung $\Omega(x, y, y') = 0$ die eingliedrige Gruppe Uf dann und nur dann gestattet, wenn der Ausdruck $U'\Omega$ vermöge $\Omega = 0$ verschwindet.

Umgekehrt gelangt man zu allen Differentialgleichungen $\Omega(x, y, y') = 0$, welche eine vorgelegte Gruppe Uf gestattet, indem man das Raumproblem löst, alle Flächen, i. e. Gleichungen in x, y, y', zu finden, welche die erweiterte Gruppe $U'f$ zulassen.

Dieses Raumproblem erlaubt aber (übrigens auch für eine ganz beliebige eingliedrige Gruppe in drei Veränderlichen) eine ganz analoge Behandlung, wie das früher besprochene Problem der Ebene. Irgend zwei unabhängige Lösungen u, v der linearen partiellen Differentialgleichung $U'f = 0$ ergeben zwei Invarianten der Gruppe, und jede Invariante der Gruppe ist eine Function jener beiden. Die Gleichungen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ stellen die ∞^2 Bahncurven der Gruppe dar. Es giebt zweierlei invariante Flächen, einmal die aus lauter invarianten Punkten bestehenden (dieselben kommen hier nicht weiter in Betracht), sodann die von ∞^1 Bahncurven erzeugten, offenbar durch eine

beliebige Gleichung zwischen u und v repräsentirten. Nennt man eine Invariante der Gruppe $U'f$ eine „Differentialinvariante" der ursprünglichen Gruppe Uf, so hat man demnach das Resultat, dass jede Differentialgleichung $\Omega(x, y, y') = 0$, welche Uf gestattet, durch Nullsetzen einer Differentialinvariante von Uf erhalten werden kann.

Nunmehr lässt sich schon erkennen, wie man fortzuschreiten hat, wenn man zu gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung übergehen will, welche eine, resp. mehrere eingliedrige Gruppen gestatten. Man wird eine eingliedrige Gruppe Uf ein zweites Mal erweitern, indem man jetzt auch die transformirte zweite Ableitung y_1'' durch die ursprüngliche y'', sowie durch x, y und y' ausdrückt. Die Gesamtheit der so entstandenen vier Gleichungen stellt im Gebiete der vier Veränderlichen x, y, y', y'' abermals eine eingliedrige Gruppe dar, deren Symbol $U''f$ aus $U'f$ durch einen entsprechenden Zusatz hervorgeht, wie $U'f$ aus Uf: man berechnet nämlich, dass:

$$U''f = U'f + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''},$$

wo

$$\eta'' = \frac{d\eta'}{dx} - y'' \frac{d\xi}{dx}, \quad \eta' = \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx}$$

ist. Es ist hierbei zu beachten (was für gewisse Vereinfachungen im Integrationsgeschäft von Bedeutung wird), dass η'' in y'' linear ist, während η' in y' quadratisch ausfällt.

Das Hauptergebnis ist nun wiederum, dass die Differentialgleichung $\Omega(x, y, y', y'') = 0$ die eingliedrige Gruppe Uf dann und nur dann zulässt, wenn $U''\Omega$ vermöge $\Omega = 0$ verschwindet. Diesem Kriterium lässt sich eine praktisch bequemere Form geben, sobald man sich die Differentialgleichung nach y'' aufgelöst denkt.

Fragt man jetzt nach dem Nutzen, den die Kenntnis einer *I. T* einer Differentialgleichung zweiter Ordnung für deren Integration gewährt, so zeigt sich, dass die Aufgabe vermittelst Quadraturen auf die einfachere reducirt werden kann, nach einander zwei gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

zu integriren: eine tiefer gehende Untersuchung lässt sogar erkennen, dass die Integration einer dieser beiden Differentialgleichungen erster Ordnung erspart werden kann. Der Grund solcher Vereinfachungen liegt wesentlich in der „Form“, welche irgend eine Differentialgleichung zweiter Ordnung annehmen kann, sobald sie $Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$ gestattet. Diese Form ist nämlich selber die einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen u und v.

Dabei bedeutet u eine Invariante der Gruppe Uf, ist also ein Integral der Differentialgleichung erster Ordnung $dy.\xi - dx.\eta = 0$, während v eine Invariante der (einmal erweiterten) Gruppe $U'f$ ist, welche sich aus einer gewissen Riccati'schen Gleichung (von der eine Particularlösung bekannt ist) durch Quadratur bestimmt.

Die angedeutete, noch weiter gehende Vereinfachung wird erzielt, wenn man an Stelle von $\Omega(x, y, y', y'') = 0$ eine aequivalente lineare partielle Differentialgleichung in den drei Veränderlichen x, y, y' einführt. Um Missverständnisse zu zerstreuen, sei übrigens betont, dass nicht jede Differentialgleichung zweiter Ordnung eine eingliedrige Gruppe Uf gestattet.

Wir möchten noch einige Worte über Differentialgleichungen zweiter Ordnung $\Omega(x, y, y', y'') = 0$ hinzufügen, welche mehrere *I. T* zulassen.

Da ist vor allem ein grundlegender Satz über die Erweiterung eines Klammerausdrucks $(U_1 U_2)$ zweier Symbole $U_1 f$ und $U_2 f$ anzuführen. Man kann einmal U_1 und U_2 einzeln, etwa i-mal erweitern, wodurch sie in $U_1^{(i)}$ resp. $U_2^{(i)}$ übergehen mögen, und hieraus den Klammerausdruck $(U_1^{(i)} U_2^{(i)})$ bilden; andererseits kann man aber auch den Ausdruck $(U_1 U_2)$ selbst direct i-mal erweitern, wodurch $(U_1 U_2)^{(i)}$ entstehe. Es zeigt sich, dass beide Ergebnisse identisch sind.

Als eine unmittelbare Anwendung davon erscheint der Satz, dass, wenn z. B. eine Differentialgleichung zweiter Ordnung die beiden *I. T* $U_1 f$ und $U_2 f$ gestattet, sie auch die weitere *I. T* $(U_1 U_2)$ zulässt. Ist $(U_1 U_2)$ „abhängig“ von U_1 und U_2, d. h.

lässt sich $(U_1 U_2)$ linear mit constanten Coefficienten durch U_1 und U_2 ausdrücken, so ist damit nichts Neues gewonnen; wesentlich anders verhält es sich aber, wenn $(U_1 U_2)$ nicht von U_1 und U_2 abhängig ist. Dann hat man eine wirklich neue, dritte *I. T* gefunden, welche die vorgelegte Gleichung gestattet.

Fährt man so fort, sei es dass nur zwei, oder auch mehrere bekannte *I. T* vorliegen, so gelangt man zu dem Fundamentalsatze: Wenn überhaupt eine Differentialgleichung mehrere *I. T* zulässt, so lassen sich die letzteren vermöge wiederholter Klammeroperation zu einem endlichen geschlossenen System von r unabhängigen *I. T* ergänzen von der Art, dass nunmehr jeder aus irgend zweien dieser *I. T* gebildete Klammerausdruck eine *I. T* darstellt, welche durch die *I. T* des Systems linear ausgedrückt werden kann. Dann sagt man, dass die *I. T* eine „r-gliedrige Gruppe" bilden; die Gesamtheit der zu den *I. T* (und den von ihnen abhängigen) gehörigen eingliedrigen Gruppen von *T* erzeugt ihrerseits eine endliche, r-gliedrige „Gruppe" von *T* in dem Sinne, dass irgend zwei *T* der Gruppe, hinter einander ausgeführt, wiederum zu einer *T* der Gruppe führen. Hat ein Bestandteil der *T* einer Gruppe selbst die Gruppeneigenschaft, so heisst er eine „Untergruppe" der vorliegenden Gruppe.

Für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist nun der Hülfssatz von besonderer Bedeutung, dass jede r-gliedrige Gruppe $(r > 2)$ von *I. T* mindestens eine zweigliedrige Untergruppe enthält, ein Satz, der übrigens genau so für n Veränderliche gilt.

Man ist daher genötigt, zunächst die zweigliedrigen Gruppen der Ebene zu untersuchen und sie vor allem auf „kanonische" Formen zu bringen: es ergiebt sich, dass es nur vier wesentlich verschiedene Typen zweigliedriger Gruppen der Ebene giebt, je nachdem $(U_1 U_2)$ identisch Null ist oder nicht, und je nachdem zwischen U_1 und U_2 eine lineare Relation mit variabeln (d. i. von x, y abhängigen) Coefficienten herrscht oder nicht, je nachdem also die beiderseitigen Bahncurven übereinstimmen oder nicht. Die zugehörigen kanonischen Formen der *I. T* lauten:

$$(1)\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y};\quad (2)\ \frac{\partial f}{\partial y},\ x\frac{\partial f}{\partial y};\quad (3)\ \frac{\partial f}{\partial y},\ x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y};$$

$$(4)\ \frac{\partial f}{\partial y},\ y\frac{\partial f}{\partial y},$$

oder auch, die Gruppen in endlicher Form geschrieben, wenn k, l variable Parameter bedeuten:

$$(1)\ x_1 = x+k,\ y_1 = y+l;\quad (2)\ x_1 = x,\ y_1 = y+kx+l;$$

$$(3)\ x_1 = kx,\ y_1 = ky+l;\quad (4)\ x_1 = x,\ y_1 = kx+l.$$

In ihrer kanonischen Gestalt sind also die vier Gruppen einfache projective Gruppen. Führt man jetzt, den kanonischen Formen der *I. T* entsprechend, in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung kanonische Variabeln ein, so kommt man in den ersten Fällen mit Quadraturen aus, und nur im letzten Falle bedarf man der Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung; aber auch diese lässt sich umgehen, wenn man wiederum an Stelle der vorgelegten Gleichung eine aequivalente lineare partielle Differentialgleichung substituirt.

Auch in dem nächst interessirenden Falle einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die eine dreigliedrige Gruppe U_1, U_2, U_3 gestattet, wird man nach verschiedenen Typen und kanonischen Formen dreigliedriger Gruppen der Ebene fragen. Hier kommt ein neues Einteilungsprincip hinzu. Die drei Klammerausdrücke, nämlich $(U_1 U_2)$, $(U_1 U_3)$ und $(U_2 U_3)$, constituiren wiederum eine Gruppe, und es bieten sich zunächst vier Haupttypen dar, je nachdem diese Untergruppe der gegebenen drei-, zwei-, ein- oder endlich null-gliedrig ist. Weitere Unterteilungen richten sich nach der Natur der zugehörigen Bahncurven.

Im ganzen ergeben sich 16 verschiedene Typen (und zugleich kanonische Formen) dreigliedriger Gruppen. Diese Verhältnisse erhalten eine sehr durchsichtige geometrische Deutung, wenn man jeder *I. T* der linearen Schar $c_1 U_1 + c_2 U_2 + c_3 U_3$ einen Punkt der Ebene mit den homogenen Coordinaten c zuordnet. Die Klammeroperation deckt sich dann mit der polaren Verwandtschaft in Bezug auf einen festen Kegelschnitt.

Schon mehrmals ist darauf hingewiesen, wie zweckmässig es sein kann, das Studium von Differentialgleichungen zweiter

Ordnung zurückzuführen auf dasjenige linearer partieller Differentialgleichungen. Der vermittelnde Gedanke liegt in einer geeigneten Umformung des oben berührten Kriteriums dafür, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung die eingliedrige Gruppe Uf zulässt. Sobald nämlich die Differentialgleichung in aufgelöster Form vorliegt: $y'' = \omega(x, y, y')$, so erweist sich das gemeinte Kriterium identisch mit dem anderen, dass die lineare partielle Differentialgleichung

$$Af \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \omega \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

die einmal erweiterte *I. T* $U'f$ gestattet.

Nach einem allgemeinen Satze gestattet aber, wie schon erwähnt, eine lineare partielle Differentialgleichung $Af = 0$ (in n Variabeln) eine *I. T* Uf dann, und nur dann, wenn sich der Klammerausdruck (UA) von Af nur um einen bloss noch von den Variabeln abhängenden Factor unterscheidet.

Ein anderer Satz sagt aber aus, dass dann im Falle dreier Variabeln die beiden Differentialgleichungen $Uf = 0$ und $Af = 0$ eine gemeinsame „Lösung" f besitzen (oder ein sogenanntes vollständiges System bilden).

Nach einem von du Bois-Reymond herrührenden Principe lässt sich endlich eben diese gemeinsame Lösung f durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen bestimmen.

Zum Schlusse sei noch ein fundamentaler Satz angeführt, der den Zusammenhang zwischen der Kenntnis mehrerer *I. T* einer linearen partiellen Differentialgleichung (in n Variabeln) $Af = 0$ und den Lösungen der letzteren aufdeckt. Man kann die vorgelegten *I. T* derart ergänzen, dass eine Anzahl derselben durch die übrigen und durch Af linear ausdrückbar ist.

Die Coefficienten dieser Darstellungen (event. die Coefficienten von Af selbst) sind Lösungen von $Af = 0$ (wenn sie sich nicht in speciellen Fällen auf Constanten reduciren).

Die Herstellung der fraglichen Ausdrücke geht auf rein algebraischem Wege, nämlich mittels Determinantenbildung, vor sich.

Die im Buche eingeführten Benennungen, die alle von Hrn. Lie herrühren, sind als durchaus zutreffende zu bezeichnen. Eine kleine Aenderung möchte Referent vorschlagen: wenn bei einer linearen homogenen Relation zwischen Functionen (oder auch Symbolen Uf), mögen nun die Coefficienten constant oder aber selbst von den Veränderlichen abhängig sein, beidemal von „linearer Abhängigkeit“ schlechtweg gesprochen wird, so möchte es sich empfehlen, beide Fälle durch den Zusatz „eigentlich“ resp. „uneigentlich“ zu trennen.

Von sonstigen Einzelheiten sei nur noch erwähnt, dass die auf S. 55 vorgenommene Integration, entgegen der Behauptung des Textes, mit einer bereits früher, auf S. 33 entwickelten, sachlich übereinstimmt.

Es besteht die gegründete Hoffnung, dass durch eine derartige ausführliche und möglichst elementar gehaltene Darstellung der Lie'schen Theorie, wie sie der vorliegende Band als der erste eines grösseren Werkes bietet, der Gegenstand selbst eine stets zunehmende Verbreitung im mathematischen Publicum erfahren wird. Dann werden sich auch Mittel und Wege finden, welche dazu dienen, die vor der Hand noch bestehende Kluft zwischen den mehr formalen Methoden Lie's einerseits und den Methoden der Functionentheoretiker andererseits zu überbrücken.

My.

S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt. Unter Mitwirkung von F. Engel. Leipzig. B. G. Teubner. IV + 554 S. 8°. (1890.)

Wegen des ersten Abschnittes dieses Werkes sei, namentlich auch mit Rücksicht auf verschiedene, im folgenden gebrauchte Bezeichnungen, auf die eingehende Besprechung von Hrn. Engel (F. d. M. XXI. 1889. 356 u. flgde.) verwiesen. Ursprünglich sollte der zweite und dritte Abschnitt zu einem Bande vereinigt werden: es erschien aber zweckmässig, den zweiten Abschnitt: „Die Theorie der Berührungstransformationen“, in einem besonderen Bande herauszugeben. Der dritte Band wird dann An-

wendungen enthalten. Die Theorie der Berührungstransformationen (zur Abkürzung weiterhin mit *B-T* bezeichnet) geht in ihren ersten Anfängen auf Euler, Lagrange, Ampère, Jacobi zurück, die einzelne solcher Transformationen zur Integration von Differentialgleichungen benutzten; eine systematische Theorie derselben hat erst Hr. Lie geschaffen.

Ursprünglich durch das Studium gewisser merkwürdiger geometrischer Abbildungen darauf geführt, hat Hr. Lie wesentlich für seine Integrationstheorien der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung die *B-T* und deren Gruppen zu einer selbständigen Hülfstheorie ausgebildet.

Von dieser historischen Entwickelung ist freilich in der vorliegenden Bearbeitung, der Systematik zu Liebe, wenig übrig geblieben; der Referent möchte persönlich bedauern, dass insbesondere die geometrische Denkweise und die mannigfaltigen, so sehr anregenden geometrischen Anwendungen beinahe völlig haben zurücktreten müssen.

Die Begründung der *B-T* wird in dankenswerter Weise auf drei Stufen verteilt, und wird erst für die Ebene, dann für den gewöhnlichen Raum und nunmehr erst in völliger Allgemeinheit für beliebig viele Veränderliche auseinandergesetzt.

Man gelangt zu einer gewissen Gattung von *B-T* unmittelbar von den gewöhnlichen Punkttransformationen *T* aus. Es liege eine solche in der Ebene vor, und es werde vermöge derselben jeder Punkt $P(x, y)$ in einen bestimmten Punkt $P_1(x_1, y_1)$ übergeführt, und umgekehrt. Dann geht eben vermöge dieser *T* auch irgend eine „Richtung" durch P in eine bestimmte Richtung durch P_1 über, und umgekehrt.

Analytisch findet diese Thatsache ihren Ausdruck in der „Erweiterung" der *T*; d. h. auf Grund der gegeben gedachten Transformationsformeln lässt sich sofort auch die erste Ableitung $\frac{dy_1}{dx_1} = y'_1$ in Function von x, y, und der ersten Ableitung $\frac{dy}{dx} = y'$ ausdrücken.

Fasst man nunmehr die vorliegende T auf als eine solche in den drei Veränderlichen x, y, y', so hat man eine (uneigentliche) B-T vor sich. In der That geht (wenn man den Inbegriff von Punkt und einer durch ihn gehenden Richtung als „Linienelement" bezeichnet) jedes Linienelement (x, y, y') über in ein bestimmtes Linienelement (x_1, y_1, y'_1), und damit gehen Curven, welche sich an einer Stelle „berühren", wiederum in eben solche über.

Die erweiterte T besitzt demnach analytisch die Eigentümlichkeit, dass die Gleichung $\frac{dy}{dx} = y'$ stets die andere $\frac{dy_1}{dx_1} = y'_1$ zur Folge haben muss, oder, was dasselbe ist, dass sich die beiden „Pfaff'schen Differential-Ausdrücke" $dy - y'dx$ und $dy'_1 - y'_1 dx_1$ nur um einen (selbst noch von x, y, y' abhängigen) Factor unterscheiden. Dafür sagt man kürzer: „Die erweiterte T lässt die Pfaff'sche Gleichung $dy - y'dx = 0$ invariant".

Der so durch Erweiterung zu einer B-T gewordenen T haftet indessen offenbar die Specialität an, dass Linienelemente mit gemeinsamem Punkte im allgemeinen wieder in solche übergeführt werden. Macht man sich von dieser Beschränkung frei, so ergiebt sich der allgemeine Begriff der eigentlichen B-T.

Dieselben sind charakterisirt als solche (umkehrbare) Transformationen in den drei Veränderlichen:

(I) $x_1 = X(x, y, y'),\quad y_1 = Y(x, y, y'),\quad y'_1 = \Pi(x, y, y'),$

welche die Pfaff'sche Gleichung $dy - y'dx = 0$ invariant lassen. Die Functionen X, Y haben dann einer linearen partiellen Differentialgleichung $[XY] \equiv 0$ zu genügen, und umgekehrt: wenn das der Fall, so bestimmen sie Π und damit eine B-T eindeutig. Wir kommen später darauf zurück.

Es wird gezeigt, dass es ausser dieser einen invarianten Pfaff'schen Gleichung keine weitere geben kann.

Ein einfaches Beispiel bietet die Poncelet'sche Transformation der Ebene, welche die Linienelemente eines Punktes überführt in diejenigen einer Geraden, nämlich der Polaren des Punktes bez. eines festen Kegelschnittes, und umgekehrt. Ist der Kegelschnitt durch die Gleichung $2y - x^2 = 0$ festgelegt, so lautet

die B-T:

$$x_1 = y', \quad y_1 = xy' - y, \quad y_1' = x.$$

Die erste Aufgabe ist naturgemäss die, sämtliche B-T der Ebene zu ermitteln.

Es sind nur zwei verschiedene Fälle denkbar; entweder folgen aus den Gleichungen (I) zwei unabhängige Relationen zwischen x, y, x_1, y_1 allein, oder aber nur eine einzige. Der erste Fall liefert die erweiterten Punkttransformationen, also die uneigentlichen B-T, der zweite Fall dagegen die eigentlichen B-T. Man erhält daher die letzteren, indem man irgend eine (nur noch einer gewissen Bedingung genügende) Relation $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$ zu Grunde legt und aus ihr und den beiden, durch Differentiation folgenden:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + y' \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + y_1' \frac{\partial \Omega}{\partial y'} = 0$$

x, y, y' als Functionen der x_1, y_1, y_1' (und umgekehrt) berechnet. Im folgenden ist nun nur noch von eigentlichen B-T die Rede. Diese B-T der Ebene geben aber, genau wie die gewöhnlichen T, zur Bildung von „endlichen continuirlichen Gruppen" (im folgenden mit G bezeichnet) Anlass.

Die unendliche Mannigfaltigkeit dieser G von B-T der Ebene wird — wenn wir hier vorgreifen — eine sehr übersichtliche, wenn man alle diejenigen G, die selbst wieder durch Ausführung von B-T in einander übergeführt werden können, in einen „Typus" zusammenfasst.

Es stellt sich das merkwürdige Ergebnis heraus, dass es nur drei Typen von B-T Gruppen in der Ebene giebt, eine sechsgliedrige G_6, eine siebengliedrige G_7 und eine zehngliedrige G_{10}; die beiden erstgenannten sind Untergruppen der letzten.

Diese G_{10} spielt eine fundamentale Rolle in der Geometrie der Ebene und des Raumes. Einmal lässt sie sich auf die kanonische Gestalt derjenigen G von B-T der Ebene bringen, welche „Kreise stets wieder in Kreise" überführen; deutet man dagegen x, y, y' als rechtwinklige Coordinaten des Raumes, so erscheint die G_{10} als diejenige projective Gruppe von Punkttransformationen, welche „einen linearen Complex invariant lassen".

Von jenen drei G werden auch die invarianten, sowie die grössten Untergruppen bestimmt, endlich auch die bei ihnen invarianten Differentialgleichungen niedrigster Ordnung. Die drei G besitzen ihre bestimmten Analoga in höheren Räumen, ohne daselbst die Gesamtheit der Typen zu erschöpfen.

Wir kehren zu einer einzelnen B-T der Ebene zurück.

Die ∞^1 Linienelemente eines Punktes verwandeln sich bei Anwendung der B-T im allgemeinen in die ∞^1 Linienelemente einer Curve, die einer Curve im allgemeinen wiederum in die einer Curve und nur im besonderen in die eines Punktes.

Es liegt daher nahe, die Begriffe Punkt und Curve einem einzigen Begriffe, der „Element-Mannigfaltigkeit“ („Element-M_1“) zu subsumiren, welche sich auch analytisch einfach definiren lässt, besonders, wenn man, wie es später geschieht, homogene Coordinaten einführt, was den Vorteil bietet, nicht Ausnahmefälle mehr ausschliessen zu müssen. Die B-T lassen sich dann einfach dahin charakterisiren, dass sie irgend eine Element-M_1 stets wieder in eine solche überführen.

Der Begriff der Element-M_1 gestattet unter anderem sofort eine Verallgemeinerung des Problems, eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung $W(x, y, y') = 0$ zu integriren; man hat eben alle Element-M_1 zu bestimmen, deren Linienelemente (x, y, y') der Gleichung $W = 0$ genügen.

Von besonderer Bedeutung ist die Schar der ∞^2 Curven, welche vermöge einer B-T den Punkten der Ebene zugeordnet ist; da man umgekehrt bei beliebiger Annahme einer ∞^2 Curvenschar stets (in noch sehr mannigfaltiger Art) eine zugehörige B-T finden kann. Die Folgerungen, welche sich hieraus für die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (deren Integralcurven dann die fragliche Curvenschar bilden) ziehen lassen, liegen auf der Hand.

Die Ausdehnung der Theorie der B-T auf den Raum und auf höhere Mannigfaltigkeiten stösst begrifflich auf keine principiellen Schwierigkeiten, obschon die Beschaffung des erforderlichen analytischen Apparates durchaus nicht so leicht ist. Man könnte, was zunächst den gewöhnlichen Raum angeht, ganz wie

in der Ebene, den Inbegriff von Punkt und einer durch ihn gehenden Richtung transformiren; es ist aber zweckmässiger, die Richtung zu ersetzen durch die auf ihr senkrecht stehende Ebene, und somit den Inbegriff von Punkt und einer durch ihn gehenden Ebene, das „Flächenelement“, als Fundament einzuführen. Die „Coordinaten“ des Flächenelementes sind die fünf Grössen x, y, z, $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$. Eine *B-T* ist dann wiederum als eine solche Transformation der x, y, z, p, q zu definiren, welche die Pfaff'sche Gleichung $dz-pdx-qdy=0$ invariant lässt. Flächen, die sich berühren, gehen dabei wiederum in solche über. Man wird jetzt bei vorgelegten Transformationsgleichungen drei Fälle zu unterscheiden haben, je nachdem aus denselben entweder eine, oder zwei, oder endlich drei unabhängige Relationen zwischen den x, y, z und ihren transformirten x_1, y_1, z_1 allein folgen.

Der zuletzt genannte Fall führt wiederum auf die „erweiterten“ Punkttransformationen zurück.

Der erste Fall liefert eine unbegrenzte Anzahl eigentlicher *B-T*. Denn man kann umgekehrt von einer beliebigen (nur einer gewissen Bedingung genügenden) Relation $\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0$ ausgehen, erhält durch Differentiation die vier weiteren Relationen:

$$p\frac{\partial\Omega}{\partial z}+\frac{\partial\Omega}{\partial x}=0,\quad q\frac{\partial\Omega}{\partial z}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}=0,$$

$$p_1\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}+\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}=0,\quad q_1\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}+\frac{\partial\Omega}{\partial y_1}=0,$$

und denkt sich nunmehr diese fünf Gleichungen, sei es nach x, y, z, p, q, sei es nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 aufgelöst.

Endlich stösst man bei analoger Untersuchung des zweiten Falles auf eine zweite Gattung eigentlicher *B-T*.

Legt man sich nämlich jetzt zwei Relationen vor:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0,\quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0,$$

und bedeuten $d\Omega_1$, $d\Omega_2$ die totalen Differentiale der linken Seiten, so hat man drei Functionen ϱ, λ_1, λ_2 von x, y, z, p, q so zu bestimmen, dass die beiden Pfaff'schen Gleichungen:

$$\lambda_1 d\Omega_1+\lambda_2 d\Omega_2=0,\quad dz_1-p_1dx_1-q_1dy_1-\varrho(dz-pdx-qdy)=0$$

aequivalent werden. Das giebt fünf Gleichungen, aus denen man

noch ϱ und $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ eliminire: im Verein mit $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ resultiren so fünf Gleichungen, die eine B-T darstellen. Nunmehr sind die drei Arten von Punktmannigfaltigkeiten des Raumes: „Punkte, Curven und Flächen" dem einzigen Begriffe der „Elementmannigfaltigkeit" unterzuordnen. Eine solche ist analytisch (was im Falle der Ebenen noch nicht erwähnt war) durch ein solches Gleichungssystem zwischen den Coordinaten x, y, z, p, q eines Flächenelements definirt, welches der Pfaff'schen Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ genügt.

Hier macht sich aber bereits der Unterschied gegenüber der Ebene bemerklich, dass eine Element-Mannigfaltigkeit aus ∞^2 oder nur aus ∞^1 verschiedenen Flächenelementen bestehen kann; demgemäss wird sie als eine „Element-M_2" resp. „Element-M_1" bezeichnet. Die Element-M_1 ergeben sich, indem man aus den ∞^2 Flächenelementen einer Curve oder eines Punktes nach Massgabe eines beliebigen Gesetzes eine ∞^1 Schar ausscheidet.

Die B-T lassen sich jetzt einfach dahin charakterisiren, dass sie jede Element-M_2 (und ebenso jede Element-M_1) wieder in eine solche überführen; Punkte können also dabei in Punkte oder in Curven oder in Flächen übergehen u. s. f.

Das Problem der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ erweitert sich jetzt offenbar dahin, aus der ∞^4 Schar von Flächenelementen, welche durch die Gleichung $\varphi = 0$ definirt sind, alle Element-M_2 auszuscheiden, oder genauer, jene ∞^4 Schar zu zerlegen in lauter ∞^2 Scharen, welche je einer Element-M_2 angehören. Von Wichtigkeit ist hierbei wiederum die Umkehrbarkeit der Zuordnung zwischen den Punkten des Raumes und einer ∞^3 Flächenschar.

Die hervorragendsten B-T des Raumes sind einmal die Poncelet'sche Transformation durch reciproke Polaren (in Bezug auf eine feste Fläche zweiten Grades), sodann die von Lie (Math. Ann. V) entdeckte merkwürdige B-T, welche die geraden Linien in die Kugeln überführt.

Die Haupttangentencurven einer Fläche gehen bei der letzteren B-T in die Krümmungslinien einer zweiten Fläche über.

Aus dieser *B-T* heraus ist die ganze Theorie entstanden.

Die allgemeine Theorie der *B-T* und ihre Durchdringung mit derjenigen der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (wegen einer vollständigen Integration der letzteren muss übrigens auf die Originalabhandlungen Lie's verwiesen werden), sowie die vielen wichtigen, damit in Zusammenhang stehenden Probleme können hier nur kurz gestreift werden.

Eine Transformation in den $2n+1$ Veränderlichen $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ist eine *B-T*, wenn sie die Pfaff'sche Gleichung $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ invariant lässt (die p brauchen dabei nicht notwendig die Ableitungen von z nach den x zu sein). Ein elegantes Kriterium dafür sagt aus, dass die Functionen $Z, X_1, X_2, \ldots, X_n$, welche die neuen Variabeln durch die alten und die p ausdrücken, paarweise in Involution liegen; zwei Functionen Φ, Ψ „liegen in Involution", wenn

$$[\Phi\Psi] \equiv \sum_\nu \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right\} = 0.$$

Damit sind die weiteren Functionen, welche die P durch alle alten Variabeln ausdrücken, von selbst eindeutig bestimmt. Das Problem der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$ spricht sich dahin aus: es sollen alle „Element-M_n" von $F = 0$ gefunden werden.

Der fundamentale Begriff, welcher beide Theorien mit einander verknüpft, ist eben der der Involution: während derselbe bei den früheren Analytikern gelegentlich und nur als Formel auftrat, ist es das Verdienst Lie's, seine innere Bedeutung oder, so zu sagen, seine organische Natur aufgedeckt zu haben.

Die Aufgabe der Bestimmung aller *B-T* reducirt sich nach Obigem auf die Integration der Gleichungen $[\ \ ] = 0$. Dieselbe wird wirklich durchgeführt, man kann aber auch durch blosse Ausführung von Differentiationen und Eliminationen zum Ziele kommen.

Ein wichtiges Hülfsmittel hierbei ist es, wenn die in Rede stehende Aufgabe nicht gleich für die allgemeinsten *B-T*, sondern erst für gewisse, ausgezeichnete Kategorien derselben gelöst wird.

Eine erste derartige Kategorie bietet sich dar durch die Forderung, dass die $2n$ Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ für sich allein transformirt werden, sodass also die X und P von z frei sind. Die Function Z hat dann die Form $Az + \Omega(x, p)$, wo A eine Constante bedeutet. Ein erster bemerkenswerter Unterfall tritt ein, wenn A den Wert der Einheit hat, ein zweiter, wenn sich die additive Function Ω der x, p auf eine Constante reducirt: die X und P werden dann in den p „homogen" (von der nullten resp. ersten Ordnung). Diese zweite, selbst homogen genannte Untergattung lässt sich aber auf die noch einfachere kanonische Form bringen, bei der $Z = z$ wird und die Invarianz der Pfaff'schen Gleichung die symmetrische Gestalt erhält:

$$P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n.$$

Allen diesen Kategorien, wie auch den allgemeinsten B-T, kommt die fundamentale Eigenschaft zu, dass die jeweils einer solchen angehörigen B-T eine (unendliche) „Gruppe" bilden.

Damit sind die Vorbereitungen getroffen zu dem wichtigsten Capitel des Buches, zur „Invariantentheorie der B-T".

Man denke sich zwei Systeme von je m Functionen der z, x, p vorgelegt: Welches sind die Kriterien dafür, dass die beiden Systeme „äquivalent" sind (wie sich der Referent der Kürze halber hier ausdrückt), d. i. durch B-T in einander übergeführt werden können, und wenn dies der Fall, wie lassen sich alle derartigen B-T ermitteln?

Es ist beachtenswert, dass, während das analoge Problem der gewöhnlichen (projectiven) Invariantentheorie noch weit von einer Lösung entfernt ist, das hier vorliegende, weit allgemeinere im Princip vollständig durchführbar wird.

Auch hier werden erst die einzelnen Untergattungen von B-T behandelt, und darauf hin erst die allgemeinsten B-T.

Die wesentlichsten Hülfsbegriffe sind hierbei die einer „Functionengruppe und ihrer ausgezeichneten Functionen".

Zunächst ist die fundamentale Bemerkung vorauszuschicken, dass die allgemeinsten B-T in den z, x, p durch eine einfache Substitution auf die homogene Form gebracht werden können;

man hat nur neue Veränderliche $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$; $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ derart einzuführen, dass:

$$z = y_{n+1}, \quad x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n; \quad p_1 = \frac{-q_1}{q_{n+1}}, \ldots, p_n = \frac{-q_n}{q_{n+1}},$$

und entsprechend für die transformirten z', x', p'.

Es lässt sich somit das Aequivalenzproblem von vorn herein auf den Fall reduciren, wo die invarianten Eigenschaften von (in den p) homogenen Functionen der x, p gegenüber homogenen B-T untersucht werden.

Die specifische Natur dieser Eigenschaften tritt aber prägnanter hervor, wenn man zuvor beliebige Functionen der x, p hinsichtlich der Invarianz gegenüber der (oben erwähnten) Kategorie von B-T:

(II) $\quad z' = z + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p)$

studirt.

Das Symbol $[\Phi\Psi]$, angewandt auf irgend zwei Functionen der x, p (die also von z frei sind), geht jetzt in das einfachere Symbol über:

$$(\Phi\Psi) \equiv \sum_\nu \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial p_\nu} \right).$$

Es ist erlaubt, sich auf derartige Systeme von r unabhängigen Functionen $F_i(x, p)$ zu beschränken, für die ein jedes $(F_i F_k)$ sich als Function der F allein darstellen lässt. Dann aber gilt auch von irgend zwei Functionen der F das Nämliche, und an die Stelle des Systems der r individuellen Functionen F tritt der Begriff der r-gliedrigen „Functionengruppe“, d. i. des Inbegriffs sämtlicher Functionen der F.

Es spielt dieser Begriff eine analoge Rolle, wie der des vollen Systems in der projectiven Invariantentheorie.

Die Theorie der Functionengruppen erhält ihre durchsichtige Gestalt vermöge eines gewissen „Dualismus“, ganz wie die Theorie der linearen Formenscharen in der projectiven Invariantentheorie vermöge der Apolarität.

Es gilt nämlich der grundlegende Satz, dass die r linearen partiellen Differentialgleichungen $(F_i f) = 0$ in den x, p ein r-gliedriges vollständiges System bilden, und somit $2n-r$ un-

abhängige Lösungen Φ besitzen. Diese Functionen Φ constituiren ihrerseits eine Functionengruppe, welche zur gegebenen in einem vollständigen Reciprocitätsverhältnis steht; jede der beiden Gruppen besteht aus allen Functionen, welche mit allen Functionen der andern in Involution liegen. Jede der beiden Gruppen heisst die Polargruppe der andern. Ist die eine homogen, so ist es auch die andere.

Beide Gruppen haben eine dritte mit einander gemein, die der „ausgezeichneten" Functionen (der einen, wie der andern Gruppe); sachgemässer werden dieselben später als die „invarianten" Functionen einer Functionengruppe bezeichnet, da sie sich dadurch charakterisiren lassen, dass sie einer gewissen (unendlichen) Gruppe von B-T gegenüber invariant bleiben.

Die beiden Hauptergebnisse mögen nun angeführt werden.

Eine Functionengruppe in den x, p besitzt nur zwei Eigenschaften, welche gegenüber allen B-T von der Gestalt (II) erhalten bleiben, ihre Gliederanzahl r und die Zahl q der in der Gruppe enthaltenen unabhängigen ausgezeichneten Functionen. Umgekehrt, wenn diese beiden Eigenschaften zwei Functionengruppen in den x, p zukommen (und nur dann), so sind beide Gruppen bei (II) äquivalent.

Es giebt, wie leicht zu sehen, nur eine endliche Anzahl von „Typen" nichtäquivalenter Functionengruppen in den $2n$ Veränderlichen x, p.

Dem gegenüber steht das zweite, noch bedeutsamere Ergebnis: Eine homogene Functionengruppe in den x, p besitzt nur drei Eigenschaften, welche bei allen homogenen B-T in den x, p erhalten bleiben, nämlich ausser den beiden eben genannten noch die Anzahl q' der unabhängigen ausgezeichneten Functionen nullter Ordnung; q' ist übrigens nur der beiden Werte q und $q-1$ fähig.

Umgekehrt ist die Gemeinsamkeit der genannten drei Eigenschaften wiederum das Kriterium der Aequivalenz. Hieraus folgt dann endlich die Antwort auf die ursprünglich gestellte Frage: Liegen zwei Systeme von m Functionen $F(z, x, p)$ und $\mathfrak{F}(z', x', p')$ vor, so kann man stets durch Differentiationen und

Eliminationen entscheiden, ob es eine B-T in den z, x, p; z', x', p' giebt, welche das eine System in das andere überführt. Zugleich lassen sich alle Eigenschaften eines beliebigen Systems von Functionen F angeben, welche gegenüber allen B-T in den vorliegenden Veränderlichen invariant sind.

Indem wir die Theorie der „Zusammensetzung“ einer Functionengruppe (welche sich mit den Gesetzen der Darstellung der $(F_i F_k)$ durch die F beschäftigt) übergehen, beeilen wir uns; noch einige Worte über die endlichen, continuirlichen Gruppen G von B-T anzufügen.

Die Uebertragung der wichtigsten Begriffe und Methoden, welche hinsichtlich beliebiger G im ersten Bande entwickelt sind, bestätigt wiederum, wie sehr viel vorteilhafter es ist, mit den infinitesimalen B-T und ihren Symbolen zu rechnen, als mit den endlichen Gleichungen der B-T. Es kommt aber jetzt noch eine Reihe specifischer Vereinfachungen hinzu.

So hängt die allgemeinste, infinitesimale B-T in den z, x, p nur von der einzigen, willkürlich wählbaren Function $W(z, x, p)$ ab. Denn eine solche infinitesimale B-T lässt sich stets in der Form schreiben $[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$; und umgekehrt, liegt dieselbe in der üblichen Gestalt vor:

$$\zeta\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_i \xi_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \pi_i\frac{\partial f}{\partial p_i},$$

so wird die zugehörige Function W einfach

$$W = \sum_i p_i\xi_i - \zeta.$$

Man kann dann geradezu mit den Functionen W direct rechnen. Auch die Theorie der Zusammensetzung der G von B-T gestattet eine ähnliche Behandlung, wie diejenige beliebiger G von Punkttransformationen. Man erhält beidemal das Resultat, dass alle Gruppen von G mit gegebener Zusammensetzung jedenfalls durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmbar sind. Für die Bestimmung der Differentialinvarianten gilt Analoges.

Der Referent hat hiermit keineswegs den Inhalt des vorliegenden Bandes erschöpft.

Die Fruchtbarkeit der im Obigen skizzirten Theorie wird erst noch mehr hervortreten, wenn ein neuerdings in Aussicht gestelltes systematisches Werk der beiden Verfasser über die Integration der Differentialgleichungen erschienen sein wird.

Jedenfalls aber gebührt jetzt schon Hrn. Engel für die lichtvolle Darstellung des schwierigen und abstracten Stoffes der wärmste Dank aller Fachgenossen. My.

S. Lie. Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen Transformationsgruppen. I, II. Leipz. Ber. XLIII. 316-352, 353-393.

Herr Lie nennt eine Schar von Transformationen:

$$\varphi_i = F_i(x_1, \ldots, x_n)$$

eine continuirliche Gruppe, wenn $F_1, \ldots, F_n$ die allgemeinsten Lösungen eines Systems von partiellen Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad W_k\left(x_1, \ldots, x_n;\ \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n;\ \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_1}{\partial x_1^2}, \ldots\right) = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots)$$

sind, und wenn zwei Transformationen der Schar, nach einander ausgeführt, wieder eine Transformation der Schar ergeben. Die Gruppe heisst endlich, wenn das allgemeinste Lösungensystem von (1) nur eine endliche Anzahl von willkürlichen Parametern enthält; sonst heisst sie unendlich. Die Gleichungen (1) sind die Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen der Gruppe.

Herr Lie beweist, dass jede Gruppe, die durch solche Differentialgleichungen (1) definirt ist, die identische Transformation und paarweise inverse Transformationen enthält. Er zeigt ferner, dass die Transformation $x_i' = F_i(x_1, \ldots, x_n)$ dann und nur dann der Gruppe angehört, wenn das System der Differentialgleichungen (1) die Transformation:

$$\mathfrak{x}_i' = F_i(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n), \quad x_i' = x_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

gestattet. Auf diesen Satz gestützt, zeigt er, dass die Gruppe gewisse infinitesimale Transformationen und die von ihnen erzeugten eingliedrigen Gruppen enthält, und dass alle der Gruppe

angehörigen infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^n {}_i\, \xi_i(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_i}$$

durch gewisse lineare homogene Differentialgleichungen:

$$(2) \qquad \sum_i \alpha_{ki}(\mathfrak{x})\, \xi_i + \sum_{\nu i} \alpha_{ki\nu}(\mathfrak{x}) \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathfrak{x}_\nu} + \cdots = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

definirt sind, die aus den Gleichungen (1) abgeleitet werden können, und die so beschaffen sind, dass aus zwei Lösungensystemen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und $\eta_1, \ldots, \eta_n$ von (2) stets ein neues Lösungensystem:

$$\sum_1^n {}_\nu \left(\xi_\nu \frac{\partial \eta_i}{\partial \mathfrak{x}_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathfrak{x}_\nu} \right) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

von (2) entspringt.

Der Kürze wegen wird die Redeweise eingeführt, dass ein System von Differentialgleichungen von der eben besprochenen Beschaffenheit eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen definire. Es wird ähnlich wie in Math. Ann. XXIV gezeigt, dass jede solche Gruppe von infinitesimalen Transformationen Differentialinvarianten besitzt, wenn man nötigenfalls noch gewisse Veränderliche hinzunimmt, die bei der Gruppe nicht transformirt werden, und wenn man gewisse der Veränderlichen als Functionen der übrigen ansieht. Hieraus ergiebt sich, dass auch jede Gruppe von endlichen Transformationen, die durch Differentialgleichungen von der Form (1) definirt ist, Differentialinvarianten besitzt.

Nunmehr denkt sich Herr Lie eine beliebige Gruppe von infinitesimalen Transformationen durch Differentialgleichungen von der Form (2) definirt. Er nimmt n Veränderliche $x_1, \ldots, x_n$ hinzu, die bei der Gruppe nicht transformirt werden, und betrachtet die $\mathfrak{x}$ als Functionen der x. Die Gruppe hat dann gewisse Differentialinvarianten:

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1}, \ldots\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

und es lässt sich zeigen, dass man, sobald man alle diese Differentialinvarianten bis zu einer gewissen, etwa bis zur q^{ten} Ordnung kennt, alle von höherer Ordnung durch Differentiation finden kann. Sind nun $J_1, \ldots, J_s$ die Differentialinvarianten

bis zur q^{ten} Ordnung, so lässt sich beweisen, dass die Gleichungen:

$$(3) \qquad J_k\left(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n, \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1}, \ldots\right) = [J_k]_{\mathfrak{x}=x} \qquad (k = 1, \ldots, s)$$

eine Gruppe von endlichen Transformationen definiren, die alle infinitesimalen Transformationen der durch (2) definirten Gruppe und zugleich die von ihnen erzeugten eingliedrigen Gruppen enthält, sonst aber keine infinitesimalen Transformationen.

Demnach liefert jede Gruppe von infinitesimalen Transformationen eine ganz bestimmte Gruppe von endlichen Transformationen. Zugleich ist klar, dass sich die Definitionsgleichungen (1) jeder continuirlichen Gruppe auf die Form (3) bringen lassen, wo die J_k Differentialinvarianten der Gruppe sind.

Alle diese Betrachtungen gelten in gleicher Weise für die endlichen und für die unendlichen continuirlichen Gruppen.

El.

F. Engel. Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie. III, IV, V. Leipz. Ber. XLIII. 47-51, 308-315, 585-596.

No. III beschäftigt sich mit den infinitesimalen Berührungstransformationen und leitet in einfacher Weise die Lie'schen Sätze über diese Transformationen ab. Ausgegangen wird von einer endlichen Berührungstransformation S des R_{n+1}, vermöge deren die Gleichung:

$$(1) \qquad dz' - \sum_1^n{}_i\, p_i' dx_i' = \varrho(z, x, p)\ \left(dz - \sum_1^n{}_i\, p_i dx_i\right)$$

besteht, und von einer infinitesimalen Berührungstransformation:

$$Af = \zeta\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^n{}_i\left(\xi_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + \pi_i\frac{\partial f}{\partial p_i}\right).$$

Setzt man in (1) dz und dx_i gleich den Zuwachsen, die z und x_i bei Af erhalten, so werden dz' und dx_i' die Zuwachse, die z' und x_i' bei der infinitesimalen Berührungstransformation erhalten, die aus Af entsteht, wenn man vermöge S die neuen Veränderlichen z', x', p' einführt. Hieraus ergiebt sich sofort, wie sich die Lie'sche charakteristische Function

$$U = \sum_1^n{}_i\, \xi_i p_i - \zeta$$

von Af gegenüber der endlichen Berührungstransformation S verhält. Lässt man die Transformation S infinitesimal $= Bf$ werden, und ist V die zugehörige charakteristische Function, so geht Af bei der Ausführung von S über in die infinitesimale Berührungstransformation $Af + \delta t(AB)$, deren charakteristische Function sofort berechnet werden kann; man kann daher auch die charakteristische Function von (AB) durch U und V ausdrücken. Diese Betrachtungen lassen sich auch auf solche infinitesimalen Transformationen in n Veränderlichen anwenden, bei denen eine beliebige Pfaff'sche Gleichung oder ein beliebiger Pfaff'scher Ausdruck invariant bleibt.

In No. IV. wird ein neuer einfacher Beweis für den Schur'schen Satz gegeben, dass die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe jeder r-gliedrigen Gruppe von gegebener Zusammensetzung c_{iks} als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen darstellbar sind, und es wird gezeigt, dass diese Darstellung der betreffenden infinitesimalen Transformationen mit der Darstellung in endlicher geschlossener Form, die Hr. Lie gegeben hat, übereinstimmt. Hierbei ist zunächst vorausgesetzt, dass man schon weiss, dass es r-gliedrige Gruppen von der betreffenden Zusammensetzung giebt. Ist nun bloss eine Zusammensetzung gegeben, also ein System von r^3 Constanten c_{iks}, das gewissen von Hrn. Lie aufgestellten Gleichungen genügt, so muss ein anderes Verfahren benutzt werden. Da aber die Ausdrücke für die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe durch die c_{iks} allein bestimmt sind, so gelingt es auch dann, wenn bloss die c_{iks} gegeben sind, nachzuweisen, dass diese Ausdrücke r unabhängige infinitesimale Transformationen darstellen, die eine r-gliedrige, einfach transitive Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} erzeugen. Es ist damit ein neuer, einfacher Beweis für den Lie'schen Satz geliefert, dass zu jedem Systeme von r^3 c_{iks}, das jene Relationen erfüllt, r-gliedrige Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} gehören.

In No. V wird ebenfalls ein von Hrn. Schur gefundenes Ergebnis auf neue Weise abgeleitet. Hr. Schur hatte bewiesen,

dass man, sobald die infinitesimalen Transformationen von zwei reciproken, einfach transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung bekannt sind, die infinitesimalen Transformationen aller transitiven Gruppen von dieser Zusammensetzung ohne Integration angeben kann. Es wird nun gezeigt, dass dieser Satz unmittelbar aus der 1885 von Hrn. Lie gegebenen Bestimmung aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung folgt, wenn man die Theorie der Hauptlösungen eines vollständigen Systems benutzt. Auf diese Weise gelangt man genau zu den Schur'schen Formeln. El.

L. Maurer. Ueber continuirliche Transformationsgruppen.
Math. Ann. XXXIX. 409-440.

Herr Maurer behandelt die folgende Aufgabe: Wenn im Sinne von Hrn. Lie eine Zusammensetzung c_{iks} von r-gliedrigen Gruppen gegeben ist, so soll entschieden werden, unter welchen Bedingungen es eine r-gliedrige Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ von dieser Zusammensetzung giebt, in der die f_i algebraische Functionen sowohl der Veränderlichen x als der Parameter a sind. Die notwendigen Bedingungen ergeben sich sehr leicht. Bildet man nämlich unter der Voraussetzung, dass es eine solche Gruppe giebt, nach dem Vorgange von Hrn. Lie die zugehörige adjungirte Gruppe

$$e_k' = \sum_1^r {}_j \varrho_{kj}(a_1, \ldots, a_r) e_j \qquad (k = 1, \ldots, r),$$

so werden die ϱ_{kj} algebraische Functionen der a. Da nun die infinitesimalen Transformationen dieser adjungirten Gruppe durch die Zusammensetzung c_{iks} vollständig bestimmt sind, so ergiebt sich als notwendige Bedingung für die Zusammensetzung c_{iks} sofort diese: In den endlichen Gleichungen (1) der durch die Zusammensetzung c_{iks} bestimmten adjungirten Gruppe müssen die ϱ_{kj} solche Functionen der Parameter sein, dass zwischen den ϱ_{kj} allein nur algebraische Relationen bestehen. Diese notwendige Bedingung ist nach einer früheren Arbeit des Herrn Maurer (vgl. F. d. M. XX. 1888. 102) dann und nur dann erfüllt, wenn die infinitesimalen Transformationen der adjungirten Gruppe ge-

wissen einfachen Bedingungen genügen. — Herr Maurer versucht ferner nachzuweisen, dass diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, dass es also stets, wenn sie erfüllt ist, eine r-gliedrige algebraische Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ von der Zusammensetzung c_{iks} giebt. Sein Beweis ist aber nicht stichhaltig, denn auf S. 433 seiner Arbeit behauptet er, dass die vorher von ihm definirte Function $\bar{P}_\chi^{\mu}$ stets $= 0$ oder 1 sei, wenn eine der beiden Zahlen λ, $\mu \leqq m - m_1$ ist, während er das vorher bloss für den Fall $\mu \leqq m - m_1$ bewiesen hat. In der That ist auch diese Behauptung im allgemeinen unrichtig, und die Folgerungen, die Herr Maurer auf S. 438 daraus zieht, sind daher hinfällig.

Von allgemeinen gruppentheoretischen Ergebnissen der Arbeit ist noch zu erwähnen: Herr Maurer stellt die allgemeine endliche Transformation einer r-gliedrigen Gruppe mit den infinitesimalen Transformationen $X_1 f, \ldots, X_r f$ dadurch her, dass er die r eingliedrigen Gruppen $X_1 f, \ldots, X_r f$ nach einander ausführt, und es gelingt ihm in sehr einfacher Weise, die infinitesimalen Transformationen der einen Parametergruppe, die zu dieser Form der r-gliedrigen Gruppe gehört, durch die Coefficienten in den endlichen Transformationen der adjungirten Gruppe auszudrücken. Es ist das eine neue Lösung des zuerst von Hrn. Lie gelösten Problems, die infinitesimalen Transformationen einer einfach transitiven Gruppe von gegebener Zusammensetzung zu bestimmen.

El.

F. Schur. Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen. Math. Ann. XXXVIII. 263-286.

Diese Arbeit enthält wesentliche Vereinfachungen der früheren Untersuchungen des Verfassers (s. F. d. M. XXI. 1889. 371 u. XXII. 1890. 375) und zugleich wichtige neue Resultate. Zunächst werden in neuer und einfacher Weise die früher von Hrn. Schur angegebenen Ausdrücke für die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe (nach Hrn. Lie's Ausdrucksweise) abgeleitet, die zu einer r-gliedrigen Gruppe von gegebener Zusammensetzung gehört, und zwar werden diese infinitesimalen Transformationen

erstens durch Potenzreihen mit beschränktem Convergenzgebiete und zweitens durch Quotienten beständig convergenter Potenzreihen dargestellt. Dann wird dasselbe für die zur Parametergruppe reciproke Gruppe (die zweite Parametergruppe) ausgeführt, und die Beziehungen zwischen den infinitesimalen Transformationen dieser beiden Gruppen und den endlichen Transformationen der adjungirten Gruppe werden abgeleitet. — Nunmehr denkt sich Herr Schur die infinitesimalen Transformationen zweier r-gliedrigen, reciproken, einfach transitiven Gruppen vorgelegt und zeigt, dass es dann ohne Integration, durch bloss algebraische Operationen möglich ist, für jeden Typus (im Lie'schen Sinne) von r-gliedrigen transitiven Gruppen von der gegebenen Zusammensetzung einen Repräsentanten anzugeben, das heisst die infinitesimalen Transformationen einer dem Typus angehörigen Gruppe aufzustellen. Zwei Gruppen werden dabei zu demselben Typus gerechnet, wenn sie durch eine Punkttransformation ähnlich sind. Hr. Lie hatte dieses Problem früher durch Quadraturen gelöst, die ihm allerdings auch die endlichen Gleichungen der betreffenden Gruppen aufzustellen erlaubten.

Indem Hr. Schur sein Verfahren auf die infinitesimalen Transformationen der beiden reciproken, einfach transitiven kanonischen Parametergruppen anwendet, gelangt er wieder zu seinem merkwürdigen Satze, dass jede r-gliedrige transitive Gruppe bei geeigneter Wahl der Veränderlichen auf eine solche Form gebracht werden kann, dass ihre infinitesimalen Transformationen Quotienten beständig convergenter Potenzreihen werden.

Endlich möge noch erwähnt werden, dass Herr Schur auf S. 264ff. seiner Arbeit einen analytisch sehr eleganten Beweis für den Lie'schen Satz liefert, dass jede Schar von ∞^r Transformationen, welche den Lie'schen grundlegenden Differentialgleichungen genügt, und welche die identische Transformation enthält, jedenfalls immer dann eine r-gliedrige Gruppe bildet, wenn die Parameter der identischen Transformation gewissen Bedingungen genügen. — Ein kleines Versehen auf S. 284 seiner Arbeit hat Herr Schur mittlerweile in Math. Ann. XLI. 536ff. berichtigt. El.

G. Vivanti. Sulle trasformazioni di contatto che trasformano qualunque sviluppabile in una sviluppabile. — Un problema sulle trasformazioni di contatto. Palermo Rend. V. 205-220, 269-278.

In der ersten Arbeit werden alle Berührungstransformationen des gewöhnlichen Raumes bestimmt, bei denen jede abwickelbare Fläche wieder in eine abwickelbare Fläche übergeht. Die allgemeine Form einer solchen Transformation ist DTD, wo T eine beliebige Punkttransformation und D irgend eine dualistische Transformation ist.

In der zweiten Arbeit werden alle Berührungstransformationen bestimmt, bei denen jeder Fläche σ eine solche Fläche Σ entspricht, dass das Krümmungsmass in entsprechenden Punkten von σ und Σ dasselbe ist. Es ist klar, dass bei jeder solchen Berührungstransformation Flächen constanter Krümmung in Flächen constanter Krümmung übergehen; alle Berührungstransformationen von dieser Beschaffenheit hat aber Hr. Lie schon längst bestimmt: es sind die Bewegungen und die Spiegelungen an einer Ebene. Herr Vivanti kommt zu demselben Ergebnis. El.

L. Autonne. Sur une application des groupes de M. Lie. C. R. CXII. 570-573.

Es ist bekannt, dass man die Linienelemente x, y, y' der Ebene auf die Punkte x, y, z des Raumes so abbilden kann, dass der Gleichung $dy-y'dx=0$ die Gleichung:

$$(1) \qquad dz+x\,dy-y\,dx=0$$

eines linearen Complexes entspricht. Die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Ebene kommt dann auf die Aufgabe hinaus, alle Curven des linearen Complexes (1) aufzusuchen, die auf einer gewissen Fläche liegen. Kennt man nun zwei unabhängige, vertauschbare infinitesimale Transformationen, die die Gleichung (1) invariant lassen, so kann man, wie Herr Autonne bemerkt hat, durch Quadratur auf jeder Fläche eines gewissen Büschels von Flächen die Complexcurven finden; unter Umständen fällt auch diese Quadratur weg. Das

Ganze ist ein specieller Fall des Lie'schen Satzes, dass man eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x, y immer dann durch eine Quadratur integriren kann, wenn man eine infinitesimale Punkt- oder Berührungstransformation kennt, die diese Gleichung invariant lässt und ihre Integralcurven unter einander vertauscht. El.

L. Autonne. Sur les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. C. R. CXIII. 632-635.

Eigenschaften der „Integranten" (vergl. die Arbeit des Verfassers „Sur une application des groupes de M. Lie", C. R. CXII. 570) und geometrische Construction derselben mittels der Theorie der Connexe. Wbg.

G. Scheffers. Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen. Math. Ann. XXXIX. 293-390.

Der Verfasser hat in dieser Abhandlung den Inhalt zweier früheren (in den F. d. M. XXI. 1889. 385 u. flgde. ausführlich besprochenen) Arbeiten zusammengefasst und zu einem Ganzen abgerundet. Es ist daher hier nur Weniges hinzuzufügen.

Jedes „Zahlensystem" kann als eine endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen, erzeugt von infinitesimalen Transformationen, aufgefasst werden.

Für die Untersuchung und Klassificirung der Zahlensysteme erweist sich eine von Hrn. Lie getroffene Einteilung der Gruppen in zwei Klassen von besonderer Bedeutung: nach Hrn. Engel lässt sich nämlich die gemeinte Einteilung auch dahin charakterisiren, dass die Gruppen der einen Kategorie eine dreigliedrige Untergruppe X_1, X_2, X_3 von der besonderen Zusammensetzung

$$(X_1 X_2) = X_1, \quad (X_1 X_3) = 2X_2, \quad (X_2 X_3) = X_3$$

besitzen, die der anderen dagegen nicht.

Die diesen beiden Gruppenkategorien entsprechenden Zahlensysteme, welche der Verf. früher Kegelschnittsysteme und Nichtkegelschnittsysteme nannte, werden jetzt besser als Quaternion-

systeme und Nichtquaternionsysteme bezeichnet, da zu den ersteren die Hamilton'schen Quaternionen gehören.

Die Nichtquaternionsysteme erfahren eine eingehendere Berücksichtigung als früher. Die Theorie derselben gestaltet sich, wie Hr. Study bemerkte, besonders durchsichtig auf Grund des Begriffes der Reducibilität. Ein Zahlensytem heisst reducibel, wenn sich seine Einheiten so in zwei Scharen e und $\mathfrak{e}$ zerlegen lassen, dass jedes Product einer Einheit e mit einer Einheit $\mathfrak{e}$ verschwindet, während sich jedes Product zweier e allein durch die e, und jedes Product zweier $\mathfrak{e}$ allein durch die $\mathfrak{e}$ ausdrückt. Im entgegengesetzten Falle heisst das Zahlensystem irreducibel. Irgend ein reducibles Zahlensystem kann nur auf eine Art in eine Reihe von lauter irreducibeln Systemen zerfällt werden. Multiplicirt man die charakteristischen Gleichungen der irreducibeln Teilsysteme, so erhält man die charakteristische Gleichung des gegebenen Systems. Kennt man alle irreducibeln Zahlensysteme in 1, 2, ..., n Einheiten, so kennt man überhaupt alle Zahlensysteme in 1, 2, ..., n Einheiten.

Aus diesen und ähnlichen Sätzen lässt sich folgern, dass es genügt, alle irreducibeln Nichtquaternionsysteme in 1, 2, ..., n Einheiten zu kennen, um hieraus sämtliche Nichtquaternionsysteme in 1, 2, ..., n Einheiten unmittelbar herzuleiten. My.

L. Königsberger. Ueber algebraische und durch Quadraturen algebraischer Functionen darstellbare Integrale partieller Differentialgleichungssysteme. Math. Ann. XXXIX. 285-292.

Für algebraische partielle Differentialgleichungssysteme beliebiger Ordnung wird mit Benutzung der Eigenschaften irreducibler algebraischer Functionen und Gleichungen bewiesen, dass aus einem aus algebraischen Functionen und Abel'schen Integralen algebraischer Functionen algebraisch zusammengesetzten Integralsysteme andere von gleicher Eigenschaft abgeleitet werden können. Dieser Satz wird für lineare Differentialgleichungssysteme und für eine partielle Differentialgleichung specialisirt und schliesslich

auf totale Differentialgleichungssysteme ausgedehnt. Die Untersuchung hierüber gipfelt in dem Satz: Wenn eine lineare homogene algebraische partielle Differentialgleichung oder ein algebraisches totales Differentialgleichungssystem ein aus den unabhängigen Variabeln, Logarithmen von algebraischen Functionen v_1, v_2, ... dieser Variabeln und Abel'schen Integralen mit eben solchen algebraischen Argumenten s_1, s_2, ... und dazu gehörigen algebraischen Irrationalitäten $f_1(s_1)$, $f_2(s_2)$, ... algebraisch zusammengesetztes Integral resp. Integralfunction besitzt, wobei angenommen werden darf, dass zwischen den Variabeln, Logarithmen und Abel'schen Integralen eine algebraische Beziehung nicht besteht, so ist jenes Integral resp. jene Integralfunction entweder selbst eine rationale Function der Variabeln, der Coefficienten der Gleichung resp. des Systems, der algebraischen Functionen $v_1, \ldots, s_1, \ldots, f_1, \ldots$, der Logarithmen und Abel'schen Integrale oder als algebraische Function von derartig beschaffenen Integralen resp. Integralfunctionen darstellbar; jedenfalls existiren aber andere, in den angegebenen Grössen rational ausdrückbare Integrale resp. Integralfunctionen. Sh.

L. Königsberger. Ueber die Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichungssysteme. Münch. Ber. XXI. 275-279.

Einige Sätze bezüglich der Irreductibilität partieller Differentialgleichungssysteme, deren ausführlicher Beweis im Journ. für Math. erscheinen, und über die alsdann referirt werden wird. Sh.

C. Bourlet. Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VIII. Suppl. 3-63.

Mit der Existenz der Integrale simultaner partieller Differentialgleichungen haben sich verhältnismässig wenige Arbeiten beschäftigt, unter denen die von Herrn Mayer (Math. Ann. V, F.

d. M. IV. 1872. 162) und Frau v. Kowalevski (J. für Math. LXXX, F. d. M. VII. 1875. 201) hervorzuheben sind. In der letzterwähnten ausführlichsten Abhandlung wird der Existenzbeweis für den Fall geführt, dass die Anzahl der Functionen gleich der der Gleichungen sei unter der Bedingung, dass die m Gleichungen mit den unbekannten Functionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ nach $\frac{\partial^{n_1}\varphi_1}{\partial x^{n_1}}, \ldots, \frac{\partial^{n_m}\varphi_m}{\partial x^{n_m}}$ auflösbar seien, worin $n_1, \ldots, n_m$ die Ordnungszahlen der höchsten vorkommenden Ableitungen der betreffenden Functionen bedeuten. Im allgemeinen ist diese Bedingung aber nicht immer zu erfüllen. Die Herren Méray und Riquier (Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII, F. d. M. XXII. 1890. 348) haben für gewisse Systeme, die sie immediate nennen, den Existenzbeweis geliefert, wobei die Anzahl der Functionen verschieden von der der Gleichungen sein kann. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich gleichfalls mit dem allgemeinen Falle, dass die Anzahl der Functionen unabhängig von der der Gleichungen ist, und füllt gleichzeitig die oben erwähnte Lücke im Beweise der Frau v. Kowalevski aus. Die Abhandlung zerfällt in drei Teile; im ersten wird die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufgestellt, dass ein partielles Differentialgleichungssystem als allgemeinstes Integralsystem ein solches zulässt, welches von einer endlichen Anzahl willkürlicher Constanten abhängt, und es wird gezeigt, wie alsdann die Integration auf die eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Der zweite Teil behandelt ausführlich lineare Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Der Verfasser beweist, dass jedes lineare System auf eine kanonische Form gebracht werden kann, wo ein kanonisches System $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \psi_{ik}$ folgendermassen definirt wird: ψ_{ik} enthält nur Ableitungen nach den x_h, deren Index h grösser oder gleich k ist, und wenn eine Ableitung $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$ in ψ_{ik} vorkommt, so muss der Index j grösser als i sein. Im dritten Teil schliesslich wird bewiesen, dass die Integration irgend eines simultanen Diffe-

rentialgleichungssystems zwischen p Functionen $z_1, \ldots, z_p$ und n unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ auf die Integration eines linearen partiellen Differentialgleichungssystems erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Ist nun das vorgelegte System derart, dass das allgemeine Integral von einer endlichen Anzahl willkürlicher Constanten abhängt, so ist durch den ersten Teil die Untersuchung erledigt; ist dies nicht der Fall, so wird durch den letzten Satz das System auf ein lineares erster Ordnung zurückgeführt. Hierbei können die beiden Fälle auftreten, dass das letztere vollständig integrabel ist oder nicht; in beiden Fällen lässt sich die Convergenz der betreffenden Entwickelungen beweisen. Sh.

F. Schur. Ueber die sogenannten vollständigen Systeme von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. J. für Math. CVIII. 313-324.

Der Verfasser sucht, ohne auf die eigentlichen Integrationsmethoden einzugehen, auf directem Wege die analytische Natur der Lösungen der im Titel genannten Differentialgleichungen zu geben. Ausgehend von dem System:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \sum_{\mathfrak{b}=q+1}^{n} \zeta_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}(x) \frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \equiv Z_{\mathfrak{a}} z = 0 \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, q),$$

in welchem die Functionen ζ als gewöhnliche Potenzreihen der Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ zu betrachten sind, und welches ein vollständiges System ist, wenn die Bedingungen:

$$(Z_{\mathfrak{a}} Z_{\mathfrak{b}}) \equiv Z_{\mathfrak{a}}(Z_{\mathfrak{b}} z) - Z_{\mathfrak{b}}(Z_{\mathfrak{a}} z) = 0$$

erfüllt sind, wird durch Coefficientenbestimmung gezeigt, dass diesem Systeme durch eine gewöhnliche Potenzreihe $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ genügt wird, welche für $x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$ einer beliebig vorgelegten Reihe $\varphi(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ gleich wird. Die wirkliche Herstellung der Lösungen wird auf diesem Wege wohl nur selten möglich sein; deshalb sucht der Verfasser schliesslich die Integration mit Hülfe eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen auf ihren wahren Grund zurückzuführen, der darin liegt, dass mit einem solchen Systeme stets mindestens eine

Transformationsgruppe verknüpft ist. So ergiebt sich: Um das vollständige System Z_a zu integriren, integrire man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{dx'_1}{dt} = -a_1, \ldots, \frac{dx'_q}{dt} = -a_q, \quad \frac{dx'_a}{dt} = \sum_{b=1}^{q} \zeta_a^b(x') a_b$$
$$(a = q+1, \ldots, n)$$

unter der Bedingung, dass x'_a in x_a übergehe für $t = 0$; sind

$$x'_1 = x_1 - a_1 t, \ldots, x'_q = x_q - a_q t,$$
$$x'_a = f_a(x_1, \ldots, x_n;\ a_1 t, \ldots, a_q t)$$

die so gewonnenen Functionen, so sind

$$Z_a = f_a(x_1, \ldots, x_n;\ x_1, \ldots, x_q) \qquad (a = q+1, \ldots, n)$$

solche Lösungen des vollständigen Systems, welche für

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$$

in resp. x_a übergehen und bei allen Transformationen

$$x'_1 = x_1 - u_1, \ldots, x'_q = x_q - u_q, \quad x'_a = f_a(x;\ u)$$

ihre Form behalten. Sh.

S. Lie. Die linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Leipz. Ber. XLIII. 253-270.

In dieser Arbeit wird ganz allgemein das Problem behandelt, die Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung:

$$(1) \qquad y^{(n)} - \alpha_{n-1}(x) y^{(n-1)} - \cdots - \alpha_0(x) y = 0$$

möglichst zu vereinfachen, wenn man eine Anzahl von Relationen:

$$(2) \qquad F_\lambda(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

zwischen x und n linear unabhängigen particulären Lösungen von (1) kennt. Zunächst werden durch Differentiationen und Eliminationen aus (2) und (3) alle Relationen abgeleitet, die zwischen $x, y_1, \ldots, y_n$ und ihren Ableitungen erster bis $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bestehen. Nunmehr werden die Grössen $x, y_i, y'_i, \ldots, y_i^{(n-1)}$ als Coordinaten der Punkte eines R_{nn+1} gedeutet. In diesem Raume bestimmt jedes System von n linear unabhängigen particulären Lösungen von (1) eine Curve (Integralcurve), und die gefundenen Relationen zwischen $x, y_i, y'_i, \ldots, y_i^{(n-1)}$ stellen eine

Mannigfaltigkeit M dar, die von lauter solchen Integralcurven erzeugt wird. Es giebt ferner in dem R_{nn+1} eine nn-gliedrige lineare homogene Gruppe, bei der jede Integralcurve stets wieder in eine Integralcurve übergeht. Indem man diese Gruppe auf M ausführt, erhält man lauter neue Mannigfaltigkeiten, die von Integralcurven erzeugt sind, und die sich im allgemeinen in kleineren Mannigfaltigkeiten von derselben Beschaffenheit schneiden. Auf diese Weise lässt sich das Problem darauf reduciren, die ∞^p Integralcurven zu bestimmen, die auf einer gewissen $(p+1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit M des R_{nn+1} liegen, wo M eine bekannte p-gliedrige Untergruppe jener linearen homogenen Gruppe gestattet. Dieses Problem aber lässt sich sofort auf das Lie'sche Normalproblem zurückführen: In $p+1$ Veränderlichen eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung $Af = 0$ zu integriren, die p bekannte infinitesimale Transformationen gestattet, wo überdies diese p infinitesimalen Transformationen eine p-gliedrige Gruppe erzeugen, bei der die Charakteristiken von $Af = 0$ transitiv transformirt werden. Herr Lie wendet diese allgemeine Theorie, die er bereits 1885 (Ges. der Wiss. zu Christiania) skizzirt hatte, auf den Fall an, dass die Relationen (2) bloss aus einer homogenen quadratischen Gleichung zwischen $y_1, \dots, y_n$ bestehen, und vervollständigt die von Halphen in diesem Falle gefundenen Resultate. Den Schluss der Arbeit bilden einige Bemerkungen zu der zweiten Lie'schen Arbeit über die Grundlagen der Geometrie (F. d. M. XXII. 1890. 524). El.

W. de Tannenberg. Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes, qui admettent un groupe continu de transformations. Toulouse Ann. V B. 1-148.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, diejenigen partiellen Differentialgleichungen $F(x, y, z, p, q) = 0$ zu bestimmen, welche eine continuirliche Transformationsgruppe zulassen. Es würde mit grossen Schwierigkeiten verknüpft sein, wollte man dieses

Problem auf ähnliche Weise zu lösen versuchen, wie es Herr Lie für das analoge Problem bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ausgeführt hat. Der Verf. benutzt eine Lie'sche Bemerkung betreffs eines bemerkenswerten Zusammenhangs zwischen der obigen Differentialgleichung und den gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung $H(x, y, y', y'', y''') = 0$, welche eine Gruppe von Berührungstransformationen zulassen.

Sind nämlich die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung definirt durch

$$V(x, y, z, a, b) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial a} + c\frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

und betrachtet man (a, b, c) als Coordinaten eines Linienelements der Ebene, so bestimmen diese Gleichungen ein System von Linienelementen einer Curve C. Allen Wertsystemen von x, y, z entspricht eine Schar von Curven C mit drei Parametern x, y, z, nämlich die Integrale der Differentialgleichung

$$H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2b}{da^2}, \frac{d^3b}{da^3}\right) = 0.$$

Für die so verbundenen Gleichungen F und H besteht der Satz: Lässt F eine Gruppe mit r wesentlichen Parametern zu, so lässt H eine Berührungstransformationsgruppe ebenfalls mit r Parametern zu, und umgekehrt.

Während dieser Teil im wesentlichen Bekanntes recapitulirt, werden im folgenden Hauptteile die den kanonischen Formen der Differentialgleichungen dritter Ordnung entsprechenden partiellen Differentialgleichungen aufgestellt und ihre Eigenschaften besprochen. Sh.

P. Mansion. Sur la méthode de Lagrange pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. Brux. S. sc. XV A. 3-6.

Die von Lagrange im Jahre 1785 dargelegte Methode zur Integration der Differentialgleichungen von der Form:

$$F(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(x, y, z)$$

ermöglicht es, die durch den gleich Null gesetzten Gilbert'schen Factor

$$\left(\frac{\delta A}{\delta y}\cdot\frac{\delta B}{\delta x}-\frac{\delta A}{\delta x}\cdot\frac{\delta B}{\delta y}\right):\varphi(x,\,y,\,z) = 0$$

gegebenen singulären Lösungen zu finden, wenn das allgemeine Integral $\psi(A, B) = 0$ ist; ausserdem ist es möglich, mit ihrer Hülfe den grundlegenden Satz der Theorie der Functionaldeterminanten aufzustellen. Mn. (Lp.)

X. Antomari. Remarques sur l'intégration des équations aux dérivées partielles. S. M. F. Bull. XIX. 154-158.

Modification der Lagrange-Charpit'schen Methode zur Auffindung eines vollständigen Integrals einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$. Ist es möglich, p und q auszudrücken mit Hülfe eines Parameters λ, nämlich:

$$p = \varphi(x,\,y,\,z,\,\lambda) \quad \text{und} \quad q = \psi(x,\,y,\,z,\,\lambda),$$

so ergiebt die Integrabilitätsbedingung eine Differentialgleichung für λ. Ist $\lambda = \Theta(x, y, z, a)$ ein Integral derselben, welches eine willkürliche Constante enthält, so ergeben sich aus den obigen Gleichungen p und q ebenfalls mit einer willkürlichen Constante behaftet, und dann liefert die Integration von $dz = pdx + qdy$ ein vollständiges Integral der vorgelegten Differentialgleichung. Diese Methode wird an zwei Beispielen durchgeführt. Sh.

J. Collet. Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre. C. R. CXII. 1193-1196.

Die Anfangswerte (z^0, x_i^0, p_k^0), welche die Charakteristiken der Differentialgleichung $F(z, x_i, p_k) = 0$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ definiren, bilden eine Integralmannigfaltigkeit $(M_{n-1})^0$ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Dieselbe enthält stets eine Punktmannigfaltigkeit $(P_{n-q})^0$ der $(n-q)^{\text{ten}}$ Ordnung $(1 \leqq q \leqq n)$, welche durch die Gleichungen $\varphi_h(z^0, x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0$ $(h = 0, 1, \ldots, q)$ definirt ist. Es be-

stehen dann ausser $F(z^0, x_i^0, p_k^0) = 0$ die Gleichungen

$$\sum_{\mu=0}^{q} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z^0} = -1 \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=0}^{q} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_k^0} = p_k^0 \quad (k = 1, \ldots, n),$$

aus denen die Parameter $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ zu eliminiren sind. Für jeden Punkt von $(P_{n-q})^0$ können $q-1$ der Grössen $p_1^0, \ldots, p_n^0$ beliebig gewählt werden, während die übrigen aus den obigen Gleichungen bestimmt sind. Sämtliche so erhaltenen Charakteristiken bilden ein Integral, dessen Gleichung der Verfasser noch ermittelt. Sh.

A. Mayer. Ueber die Zurückführung eines vollständigen Systems auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Leipz. Ber. XLIII. 448-458.

Bericht auf S. 345 dieses Bandes.

Elliot. Sur la réduction à une forme canonique des équations aux dérivées partielles du premier ordre et du second degré. C. R. CXIII. 495-498.

Jede Gleichung der Form

$$ap^2 + 2bpq + cq^2 + 2dp + 2eq + f = 0$$

kann durch einen Wechsel der Variabeln:

$$X = \Phi(x, y), \quad Y = \Psi(x, y),$$

wo Φ und Ψ Lösungen der Gleichung

$$ap^2 + 2bpq + cq^2 = 0$$

sind, die jedoch verschiedenen Werten des Verhältnisses $\frac{p}{q}$ entsprechen, auf die Form:

$$2B_1P_1Q_1 + 2D_1P_1 + 2E_1Q_1 + F_1 = 0$$

gebracht werden. Diese aber kann durch einen Wechsel der Function $z = Z + T$ auf die kanonische Form:

$$PQ = MP + N$$

gebracht werden. Nur wenn $b^2 - ac = 0$ ist, ist obige Reduction nicht anwendbar; dann lässt sich die Gleichung auf die Form $p^2 - \lambda q = 0$ bringen. Sh.

G. Pennacchietti. Sulla riduzione dell' equazioni differenziali ordinarie alla forma canonica. Batt. G. XXIX. 239-246.

Es sei

$$(1)\qquad \frac{dy_s}{dt} = Y_s \qquad (s = 1, 2, \dots, 2n)$$

ein System von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen, worin die Y_s Functionen von $t, y_1, \dots, y_{2n}$ sind. Ist der Ausdruck

$$\sum_{r=1}^{r=n} (-Y_{n+r}dy_r + Y_r dy_{n+r})$$

ein vollständiges Differential einer Function H, dann lautet das System in kanonischer Form

$$\frac{dy_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_{n+r}}, \quad \frac{dy_{n+r}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_r}.$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann sucht man ein System particulärer Lösungen, falls solche existiren, der folgenden $\frac{1}{2}.2n(2n-1)$ partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $y_1, \dots, y_{2n}$ als Functionen von $t, z_1, \dots, z_{2n}$: $0 =$

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial}{\partial t}(y_i, y_k) + \sum_s \frac{\partial Y_i}{\partial y_s}(y_s. y_k) + \sum_s \frac{\partial Y_k}{\partial y_s}(y_i, y_s), & Y_1 - \frac{\partial y_1}{\partial t}, & \dots, & Y_{2n} - \frac{\partial y_{2n}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial z_1}(y_i, y_k), & \frac{\partial y_1}{\partial z_1}, & \dots, & \frac{\partial y_{2n}}{\partial z_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial}{\partial z_{2n}}(y_i, y_k), & \frac{\partial y_1}{\partial z_{2n}}, & \dots, & \frac{\partial y_{2n}}{\partial z_{2n}} \end{vmatrix},$$

wo

$$(y_i, y_k) = \sum_{r=1}^{r=n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial z_r} \frac{\partial y_k}{\partial z_{n+r}} - \frac{\partial y_i}{\partial z_{n+r}} \frac{\partial y_k}{\partial z_r} \right)$$

gesetzt ist. Die Lösung muss so beschaffen sein, dass die Determinante $\left|\frac{\partial y_i}{\partial z_k}\right|$ $(i, k = 1, 2, \dots, 2n)$ nicht identisch verschwindet. Es lässt sich dann mittels Quadratur H als Function von $t, z_1, \dots, z_{2n}$ aus dem System

$$(y_s, H) + \frac{\partial y_s}{\partial t} - Y_s = 0$$

erhalten, und das transformirte System (1) erhält die kanonische Gestalt

$$\frac{dz_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z_{n+r}}, \quad \frac{dz_{n+r}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Der Fall, dass das vorgelegte System aus einer ungeraden Anzahl von Gleichungen besteht, lässt sich auf den vorhergehenden Fall zurückführen, indem man zu den $2n-1$ Gleichungen die Gleichung $\frac{dy_{2n}}{dt} = 0$ hinzufügt. Hr.

J. HORN. Beiträge zur Ausdehnung der Fuchs'schen Theorie der linearen Differentialgleichungen auf ein System linearer partieller Differentialgleichungen. Acta Math. XIV. 337-347.

Auszug aus der Habilitationsschrift des Verfassers „Ueber Systeme linearer Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen". Habilitationsschrift der Universität Freiburg i. B. Berlin, Mayer und Müller, 1890. (Vergl. F. d. M. XXII. 1890. 352.) Wbg.

E. PHRAGMÉN. Sur le principe de Dirichlet. Stockh. Öfv. XLVIII. 745-751.

Der Verf. sucht einen möglichst einfachen und allgemein gültigen Beweis des sogenannten Dirichlet'schen Princips zu geben, unter Anknüpfung hauptsächlich an Ideen von Harnack und von Poincaré. Bdn.

A. V. BÄCKLUND. Om Ribaucour's cykliska system. Stockh. Akad. Bihang. XVI_1. No. 1 (32 S.), No. 8 (41 S.); XVII_1. No. 2 (41 S.)

Ist später in etwas veränderter Form in den Math. Annalen XL. 194-260 unter dem Titel erschienen: „Anwendung von Sätzen über partielle Differentialgleichungen auf die Theorie der Orthogonalsysteme, insbesondere die der Ribaucour'schen cyklischen Systeme". Bdn.

C. Somigliana. Intorno alla integrazione per mezzo di soluzioni semplici. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 1005-1020.

Die für die mathematische Physik so wichtige Methode, die Integrale einer partiellen Differentialgleichung durch Summirung von particulären Integralen zu finden, überträgt der Verfasser auf ein System von Differentialgleichungen. Zu dem Ende werden die einfachen Integrale, aus denen das Integral einer Differentialgleichung zusammengesetzt werden soll, durch eine charakteristische Gleichung definirt, welche eine Erweiterung für den Fall eines Differentialgleichungssystems zulässt in dem Falle, dass dasselbe ein symmetrisches ist.

Lautet das betreffende System:

$$\begin{array}{l} \Delta_{11}u_1+\Delta_{12}u_2+\cdots+\Delta_{1m}u_m=0,\\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ \Delta_{m1}u_1+\Delta_{m2}u_2+\cdots+\Delta_{mm}u_m=0, \end{array}$$

worin:

$$\Delta_{is}u=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pq}^{(is)}\frac{\partial^2 w}{\partial x_p\partial x_q} \qquad (a_{pq}^{(is)}=a_{qp}^{(is)})$$

ist, so heisst es symmetrisch, falls $a_{pq}^{(is)}=a_{qp}^{(si)}$ ist, also auch $\Delta_{is}=\Delta_{si}$ ist. Dann gelingt es, die Integrale des Systems in der Form

$$u_i=\sum_s c_s u_i^{(s)}$$

darzustellen, wo $u_i^{(s)}$ die betreffenden einfachen Integrale sind, für welche die Coefficientenbestimmung angegeben wird. Es würde zu weit führen, auf die bezüglichen Entwickelungen einzugehen; doch sei erwähnt, dass, falls die vorgelegten Gleichungen die der Elasticität sind, diese einfachen Lösungen jede für sich als eine specielle Deformation des Körpers darstellend betrachtet werden können; sie besitzen invarianten Charakter in Bezug auf die Componenten der Verschiebung. Sh.

J. S. Gubkine. Ueber die Form des vollständigen Integrals einer homogenen partiellen Differentialgleichung, die die unbekannte Function explicite nicht enthält. Moskau Naturf. Ges. Phys. Abt. IV. (Russisch.)

J. S. Gubkine. Die Form der Integrale einer homogenen Function in Bezug auf p Systeme partieller Differentialgleichungen, die z nicht enthalten. Moskau Naturf. Ges. Phys. Abt. IV. (Russisch.)

Die erste Abhandlung enthält den Beweis folgender zwei Theoreme. 1. Die Gleichung

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = 0$$

hat ein vollständiges Integral, welches sich immer auf die Form

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + a_n$$

reduciren lässt, wo f eine homogene Function erster Ordnung in Bezug auf die Constanten a ist.

2. Wenn man in einem vollständigen Integrale der Gleichung

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, Z - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}} - \cdots - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right) = 0,$$

welche in Bezug auf die Derivirten homogen ist und die unbekannte Function explicite nicht enthält, diese Function f durch Null ersetzt, so erhält man das vollständige Integral der Gleichung

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

mit n willkürlichen Constanten.

Die zweite Abhandlung enthält die Verallgemeinerung dieser Theoreme auf das System der homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Wi.

P. Schiff. Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires simultanées aux derivées partielles d'ordre supérieur. Mél. math. St. Pétersb. Acad. VII. 169-176.

Die Integration der Gleichungen:

$$a\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\Delta_2 u_1 = \tau(u_1)+X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$a\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+\Delta_2 u_2 = \tau(u_2)+X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a\frac{\partial\theta}{\partial x_n}+\Delta_2 u_n = \tau(u_n)+X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

wo

$$\theta = b_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\cdots+b_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n},$$
$$\Delta_2 u_i = b_1\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2}+b_2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}+\cdots+b_n\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n^2},$$
$$\tau(u_i) = a_1\frac{\partial u_i}{\partial t}+a_2\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+\cdots+a_p\frac{\partial^p u_i}{\partial t^p},$$

reducirt sich auf die Integration der Gleichungen:

$$\Delta_2\omega_i = \tau(\omega_i).$$

Um den Zusammenhang zwischen zwei Systemen solcher Gleichungen zu zeigen, benutzt der Verf. die Theoreme von Laplace und Poisson über das Potential in ihrer Verallgemeinerung auf Functionen von mehreren Veränderlichen. Wi.

N. A. SCHAPOSCHNIKOFF. Differentio-differenziale Beziehungen und ihre Anwendung in der allgemeinen Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen. Moskau Naturf. Ges. Phys. Abt. IV. (Russisch)

Wenn man eine Function z von x, y zweimal differentiirt und die Differentiale von x und y das erste Mal mit dx, dy, das andere Mal mit δx, δy bezeichnet, so erhält man:

$$dx.\delta p+dy.\delta q = dp.\delta x+dq.\delta y.$$

Solche Beziehungen hat der Verfasser in seiner Arbeit: „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung“ (Mosk. Math. Samml. X, F. d. M. XII. 1880. 283) „differentio-differentiale“ genannt und ihre Anwendung auf die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ge-

zeigt. Jetzt zeigt er, dass ihre Betrachtung auch in der Theorie der Gleichungen höherer Ordnung nützlich ist. Wi.

F. de Boer. Toepassing van de methode van Darboux op de differentiaalvergelijking $s = f(r, t)$. Amst. Versl. en Meded (3) VIII. 221-286.

Die von Hrn. Darboux in den Ann. de l'Éc. Norm. 1870 (F. d. M. II. 1869-70. 316) mitgeteilte Methode wird zur Integration der Gleichung $s = f(r, t)$ benutzt, in welcher die Function f ausschliesslich r und t enthält. Setzt man

$$\frac{\partial f}{\partial r} = R, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = T,$$

und sind m_1, m_2 die Wurzeln der Gleichung

$$Rm^2 + m + T = 0,$$

so führt das zur Integration benutzte Hülfssystem zur Gleichung

$$(1) \qquad dr = m_1^2\,dt,$$

welche stets integrabel ist, weil m_1 ausschliesslich von r und t abhängt. Ein zweites Hülfssystem entsteht, wenn im ersten m_1 und m_2 vertauscht werden, wodurch man auf die Gleichung $dr = m_2^2\,dt$ kommt. Der Verfasser setzt nun voraus, $m_1 = \text{const.}$ sei ein Integral der Gleichung (1); findet dasselbe mit $m_2 = \text{const.}$ in Bezug auf die zweite Gleichung statt, so wird gezeigt, dass die ursprüngliche Differentialgleichung die Form der Ampère'schen haben müsste.

Sodann wird der Fall $m_1 = m_2$ behandelt. Um einen neuen Fall der Integrabilität zu erhalten, setzt der Verfasser voraus, $m_2 = \text{constant}$ sei ein Integral von (1) und $m_1 = \text{constant}$ von $dr = m_2^2\,dt$. Die Gestalt der ursprünglichen Differentialgleichung wird wieder bestimmt und die Integration vollzogen.

Damit sich herausstelle, ob noch andere Fälle bestehen, in denen die Gleichung integrirt werden kann, wird das Jacobi'sche Kriterium angewandt. Dies führt ausser zu den schon erwähnten Specialfällen zur Bedingung

$$\Delta(K_1 - m_1) = 0,$$

wo gesetzt ist

$$\Delta = m_1^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t}, \quad K_1 = \frac{L\Delta m_1}{1-\Delta L}, \quad L = \frac{m_1 - m_2}{m_1^2 \frac{\partial m_2}{\partial r} + \frac{\partial m_2}{\partial t}}.$$

Es können nun die beiden Fälle unterschieden werden, in denen $K_1 - m_1$ constant ist oder nicht, und desgleichen bei $K_2 - m_2$. Macht man die Annahme, dass beide Grössen constant sind, so kann das Problem vollständig gelöst werden, die Gestalt der ursprünglichen Differentialgleichung anzugeben und deren Integration zu vollziehen. Allerdings werden die Formeln sehr verwickelt, doch führt der Verfasser die Lösung ganz zu Ende.

Die vollständige Erörterung des Falles, wo die beiden oben erwähnten Grössen nicht constant sind, ist ihm jedoch nicht gelungen, obgleich die ersten Integrale stets leicht gefunden werden können. Schliesslich wird noch der Fall betrachtet, dass die Grösse s nicht in der gegebenen Differentialgleichung vorkommt.

Mo.

É. Picard. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Palermo Rend. V. 308-318.

Bedeuten in:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

A bis F Polynome ersten Grades von x und y, so existirt, wie sich durch mehrfache partielle Integration und Differentiation zeigt, ein Integral der Form:

$$u = \iint e^{zx} e^{z'y} f(z, z')\, dz\, dz',$$

wo f, ebenso wie der Integrationsbereich, unabhängig von x und y ist, vorausgesetzt dass an der Grenze des Integrationsbereichs

$$z^\alpha z'^\beta e^{zx} e^{z'y} f(z, z') = 0 \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2)$$

ist. Die Function f genügt alsdann der Gleichung:

$$P\frac{\partial f}{\partial z} + Q\frac{\partial f}{\partial z'} + R = 0,$$

wo P, Q und R völlig bestimmte Functionen zweiten Grades sind; die Lösung dieser Gleichung liefert alsdann diejenige der ge-

gebenen. An mehreren speciellen Beispielen wird diese Methode völlig durchgeführt. Sh.

É. Picard. Sur un système d'équations aux dérivées partielles. C. R. CXII. 685-688.

Der Satz, dass bei der Differentialgleichung

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+F=0,$$

in welcher die Coefficienten analytische Functionen der beiden reellen Variabeln x und y sind, innerhalb des Teils der Ebene, wo $B^2-AC<0$ ist, jedes Integral, welches selbst wie auch seine ersten beiden Ableitungen stetig ist, eine analytische Function der Variabeln ist, lässt hoffen, dass in vielen Fällen partielle Differentialgleichungen zum Studium völlig definirter Klassen von Functionen dienen können. Als Beispiel betrachtet der Verfasser das Gleichungssystem:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=c\frac{\partial u}{\partial x}+d\frac{\partial u}{\partial y}.\qquad [(a-d)^2+4bc<0]$$

Für diese Gleichungen besteht das Dirichlet'sche Princip und das Cauchy'sche über die Anzahl der Wurzeln in einem geschlossenen Gebiet. Das Verhalten der Functionen u und v an Unstetigkeitspunkten, welche den Polen der Functionen einer complexen Variable entsprechen, wird kurz angedeutet, die weitere Ausführung aber einer späteren Arbeit vorbehalten. Sh.

E. Goursat. Sur les intégrales intermédiaires des équations aux dérivées partielles du second ordre. C. R. CXII. 1117-1120.

Existirt für die Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$ ein Integral erster Ordnung mit zwei willkürlichen Constanten $V(x, y, z, p, q, a, b)=0$, so wird man durch Variation der Constanten ein Integral erster Ordnung mit einer willkürlichen Function erhalten. Das Auftreten dieser Func-

tion wird im allgemeinen die weitere Integration verhindern. Der Verfasser giebt einen Fall an, wo trotz dieser willkürlichen Function die Integration zu Ende geführt werden kann.

Sh.

J. Brill. Note sur l'application de transformations de contact à l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. Nouv. Ann. (3) X. 362-365.

Anwendung einer Berührungstransformation zur Integration der Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche eine abhängige Variable und zwei unabhängige enthalten, für den Fall, dass die Fläche, welche der Differentialgleichung genügt, durch zwei gegebene Curven geht, oder zwei gegebene Flächen berührt, oder schliesslich durch eine gegebene Curve geht und eine gegebene Fläche berührt.

Sh.

P. Stäckel. Ueber die Integration der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung mittels Separation der Variabeln. Habilitationsschrift. Halle a. S. 26 S. 8°.

In den Fällen, wo es gelungen ist, eine vollständige Lösung W^0 der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung:

$$H = \tfrac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} A_{\varkappa\lambda}\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\cdot\frac{\partial W}{\partial p_\lambda} - (\Pi+\alpha_1) = 0 \qquad (A_{\varkappa\lambda} = A_{\lambda\varkappa})$$

zu finden, kann W^0 immer auf die Form gebracht werden:

$$W^0 = \sum_{\varkappa=1}^{n}\int W_\varkappa(p_\varkappa;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n)dp_\varkappa.$$

Die Ermittelung der vollständigen Lösung beruht dann darauf, dass $H=0$ in n Gleichungen zerspalten wird, deren jede nur eine der Veränderlichen $p_1, \ldots, p_n$ und die Ableitung von W gerade nach dieser Veränderlichen enthält. Damit eine solche Separation möglich sei, müssen die Kräftefunction Π und die Coefficienten A gewisse rationale Functionen von $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$ Functionen je einer der Veränderlichen p sein. Diese Bedingungen werden auch hinreichend, wenn man annimmt, dass

$H=0$ die Form hat:

$$H^* = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{n} A_\varkappa\left(\frac{\partial W}{\partial p_\varkappa}\right)^2-(\Pi+\alpha_1) = 0.$$

So ergiebt sich eine Klasse von Gleichungen, welche Separation der Variabeln gestatten; die ausführliche Discussion der Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung, die sich für diese Klasse ergeben, lehrt, dass unter bestimmten Voraussetzungen $p_1, \ldots, p_n$ als eindeutige endliche, stetige, bedingt periodische Functionen der Zeit t sich ergeben. Dieses Resultat wird an einem Beispiel verificirt, welches auf ein Jacobi'sches Umkehrproblem führt. Sh.

F. Pockels. Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u+k^2u=0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Mit einem Vorwort von F. Klein. Leipzig. B. G. Teubner. XII + 339 S. 8°.

Nach der Differentialgleichung des Potentials tritt besonders die Gleichung $\Delta u+k^2u=0$ sowohl in physikalischen als auch neuerdings häufig in rein mathematischen Arbeiten auf. Eine Zusammenfassung der wichtigsten Resultate der bisherigen Forschungen, wie es die vorliegende Schrift giebt, ist daher dankbar zu begrüssen. Fast alle älteren Arbeiten und die meisten neueren sind an ihrem Orte benutzt und gewürdigt worden, wenn auch die rein mathematischen gegen die physikalischen zurücktreten. Gerechtfertigt erscheint dies durch die ganze Anlage des Werkes, welches stets die physikalische Erfahrung als leitenden Gesichtspunkt gelten lässt und in dieser Beziehung sich Rayleigh's Theory of Sound zum Muster genommen hat. Was die Anordnung des Stoffes betrifft, so ist das Buch in vier Teile zerlegt. Der erste bespricht die Probleme, bei denen die obige Gleichung in physikalischen und mathematischen Arbeiten aufgetreten ist. Die betreffenden physikalischen Probleme führen stets zu der Aufgabe: eine Lösung der partiellen Differentialgleichung $\Delta u+k^2f.u=0$ zu finden, welche sich innerhalb eines gegebenen Bereiches regulär verhält und an der gegebenen Be-

grenzung der Gleichung $h\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} = 0$ genügt, wo σ eine für jeden Punkt der Begrenzung gegebene Richtung bedeutet. Nur für gewisse ausgezeichnete Werte von k existiren solche Lösungen, die als ausgezeichnete Lösungen bezeichnet werden, und deren Studium den zweiten Teil ausfüllt. Die Existenz solcher ausgezeichneten Lösungen ist völlig streng für beliebige Begrenzungen noch nicht bewiesen; die physikalische Erfahrung tritt hier wieder ein, um diese Lücke zu überbrücken. Zunächst werden verschiedene lösbare Specialfälle besprochen, und dann wird auf die neueren allgemeinen mathematischen Arbeiten besonders von Herrn Schwarz (Acta Soc. Fennicae XV, Helsingfors 1885, F. d. M. XVII. 1885. 776) und Poincaré (American Journ. XII, F. d. M. XXII. 1890. 977) eingegangen. Der dritte Teil hat wesentlich mathematisches Interesse und giebt allgemeine Sätze über die Lösungen der behandelten Gleichung, wobei die Potentialtheorie als Muster dient. Der letzte Teil sucht diejenigen Lösungen zu ermitteln, für welche u oder $\frac{\partial u}{\partial n}$ oder $hu + \frac{\partial u}{\partial n}$ an der Begrenzung vorgeschriebene Werte besitzt. Bei diesen „Randwertaufgaben", über die erst wenige zu sicheren Resultaten führende mathematische Arbeiten existiren, treten die physikalischen Probleme wieder in den Vordergrund; erst am Schluss werden die bezüglichen rein mathematischen Arbeiten der Herren Schwarz (s. oben) und Picard (Acta Math. XII, F. d. M. XXI. 1889. 348) besprochen. Sh.

B. Bukreiew. Ueber eine Eigenschaft der Systeme von Parallelcurven. (Aus den Vorlesungen über Integration der Differentialgleichungen.) Kiew Nachr. 1891. No. 11. 1-4. (Russisch.)

Es wird das Theorem bewiesen: „Ist $f(x, y)$ eine solche Function, dass $f(x, y) = c$ (c ein Parameter) ein System von Parallelcurven darstellt, so ist $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ eine Function von

$f(x, y)$". Daraus folgt das Theorem von Hrn. Lie: „Weiss man von einer Differentialgleichung $Xdy - Ydx = 0$, dass ihre Integralcurven Parallelcurven sind, so ist $\frac{1}{\sqrt{X^2 - Y^2}}$ ein Multiplicator derselben, so dass man die Integralcurven durch eine Quadratur bestimmen kann" (Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, herausgegeben von Scheffers, S. 153).

Zum Schlusse bemerkt der Verfasser, dies Theorem könne auf Gleichungen mit drei Differentialen in der Weise ausgedehnt werden:

Ist $Ldx + Mdy + Ndz = 0$ die Differentialgleichung einer Familie von Parallelflächen, so ist $\frac{1}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$ ihr Multiplicator. Si.

E. Grossetête. Aggrégation des Sciences mathématiques (concours de 1889). Solution de la Question d'Analyse. Nouv. Ann. (3) X. 208-212.

Lösung der Aufgabe:

h, k seien die Invarianten der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

und h_1, k_1 die Invarianten der durch Anwendung der Laplace'schen Methode aus ihr entstandenen Differentialgleichung. Man soll untersuchen, welche Form die Invarianten h, k und die Coefficienten a, b, c haben müssen, damit die Relationen bestehen

$$h_1 = lh, \quad k_1 = mk,$$

wo l, m Constanten bedeuten. F.

G. Oltramare. Intégration des équations linéaires aux différences et aux différences mêlées. Assoc. Franç. Marseille XX. 66-82.

Der Verf. liefert die vorliegende Arbeit als einen neuen

Beitrag für die Anwendung der von ihm ersonnenen Verallgemeinerungs-Rechnung (calcul de généralisation), indem er dieses Mal verschiedene Aufgaben aus der Integration der Differenzen-Gleichungen löst, während er zuletzt (F. d. M. XXI. 1889. 350) die Behandlung partieller Differentialgleichungen in Angriff genommen hatte.

Aus folgenden Gleichungen wird die unbekannte Function φ bestimmt:

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi(x, y+1, z) - \varphi(x+1, y, z+1) + \varphi(x, y+2, z) = 0, \\ \varphi(x, y, z) - \varphi(x+1, y+1, z-1) + \varphi(x, y+1, z) = 0, \\ \varphi(x, y-1, z) - \varphi(x+1, y+1, z) + \varphi(x, y, z+1) = 0, \end{cases}$$

und zwar wenn die Function φ bloss der ersten, oder den beiden ersten, oder allen drei Gleichungen genügt.

$$(2)\quad \varphi(x, y) = p\varphi(x, y-1) + q\varphi(x-1, y) \text{ und } \varphi(0, y) = 1.$$

$$(3)\quad \varphi(x+2, y) - a\varphi(x+1, y+1) - b\varphi(x, y+2) = 0.$$

$$(4)\quad \varphi(x+p, y+q) - a\varphi(x, y) = 0.$$

$$(5)\quad \varphi(x, y) - a\varphi(x+p, y+q) - b\varphi(x-p, y-q) = 0.$$

$$(6)\quad \varphi(x+1, y+1) - \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y) = F(x, y).$$

$$(7)\quad \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x+b, y) - \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y) = F(x, y).$$

$$(8)\quad \begin{cases} \varphi(x, y+1, z) - \varphi(x+1, y, z+1) + \varphi(x, y+2, z) = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - a\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - b\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Endlich werden als „équations aux différences mêlées“ behandelt:

$$(9)\quad t\Delta_t z + Q\frac{\partial z}{\partial s} + Rtz = 0,$$

$$(10)\quad \Delta_t^2 z + Pt\Delta_t z + Q\frac{\partial z}{\partial s} + Rtz = 0.$$

Lp.

K. A. Umlauf. Ueber den Zusammenhang der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen, insbesondere der Gruppen vom Range Null. Diss. Leipzig. 79 S. 8°.

Capitel 7.

Variationsrechnung.

W. Ermakow. Unterscheidung der Maxima und Minima der einfachen Integrale. Kiew Univ. Nachr. 1891. No. 9. 1-44.

Trotz vieler Versuche hat man keine befriedigende Theorie für die genannte Frage. Der von L. Scheeffer (Math. Ann. XXV, F. d. M. XVII. 1885. 353) gegebene, sehr complicirte Beweis scheint Herrn Ermakow ungenügend. Es kann nämlich der Fall eintreten, dass die zweite Variation ihr Zeichen nicht ändert und nicht gleich Null wird, dass aber unendlich kleine Zuwachse der Veränderlichen in der Weise gewählt werden können, dass der absolute Wert der zweiten Variation kleiner wird als der der dritten. „Es muss also der vollständige Zuwachs, nicht nur die zweite Variation berücksichtigt werden."

Wenn wir bei einer Aufgabe des Maximums oder Minimums einer Function F mehrerer Veränderlichen $d^2F = A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + \cdots$ setzen, wo alle A_i positiv sind und ihre Anzahl geringer ist als die der Veränderlichen, müssen wir haben, damit Maximum oder Minimum sein könne:

1) $d^3F = \omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2 + \cdots$.

2) Wenn $\omega_i + \frac{\sigma_i}{\sigma A_i} = 0$ (oder bei Weglassung der Unendlichkleinen höherer Ordnungen $\omega_i = 0$), so muss sein

$$\frac{d^4F}{24} - \Sigma \frac{\sigma_i^2}{72.A_i} > 0.$$

Der Fall ist zuerst von Herrn G. Peano bemerkt. Ganz analoge Schwierigkeiten treten in der Variationsrechnung auf. — Nach diesen einleitenden Bemerkungen knüpft Herr Ermakow seine Betrachtungen an die einfache Aufgabe an, bei welcher unter dem Integralzeichen nur der erste Differentialquotient vorkommt, und betrachtet in der zweiten Hälfte seiner Abhandlung in ähnlicher Weise die allgemeine Aufgabe. Da seine Auseinander-

setzungen in beiden Fällen ganz ähnlich sind, so werde hier nur über die zweite berichtet.

Die Aufgabe ist also die, Maxima und Minima des Integrals $\int f(x, y_1, y_2, \ldots, y'_1, y'_2, \ldots) dx$ zu finden, wenn zwischen den Grössen $x, y_1, y_2, \ldots$ die Gleichungen bestehen:

$$(1) \qquad \psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y'_1, y'_2, \ldots) = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Nehmen wir als neue Veränderliche $p_1, p_2, \ldots$ und wählen eine noch unbekannte Function $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots)$ in der Weise, dass die Gleichungen

$$(2) \qquad F = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Sigma_k y'_k \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_k},$$

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial y'_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$[\text{wo } F = f + \Sigma_j \psi_j . \mu_j]$$

in Folge der Gleichungen (1) identisch erfüllt seien. Für den Fall, dass die Gleichungen (1) und (3) in Bezug auf $y'_1, y'_2, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots$ aufgelöst werden können, erhalten wir zur Bestimmung der Function φ die Gleichung

$$\Phi\left(x, y_1, y_2, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}, \ldots\right) = 0.$$

Sie ist identisch mit der in der gewöhnlichen Theorie zur Auflösung der kanonischen Gleichungen dienenden. Es folgt daraus:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial p_i} + \Sigma_k y'_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_k \partial p_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

oder

$$(4^a) \qquad d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right) = \Sigma_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial p_k} dp_k \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Das Integral nimmt also die Form an:

$$(5) \qquad \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Sigma y'_k \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\right) dx \quad \text{oder} \quad \int \left(d\varphi - \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} dp_k\right) dx.$$

Die Aufgabe wird folglich: die Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots$ so als Functionen von x zu bestimmen, dass die Bedingungsgleichungen (4) erfüllt seien und (5) einen Maximal- oder Minimalwert erhalte.

Unter Voraussetzung, dass δy_i und δp_i an den Grenzen gleich Null sind, erhält man:

$$\Sigma_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_k \partial y_i} dp_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Dies giebt die „vollständige Lösung“

$$p_i = a_i, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = b_i$$

(hieraus $y_i = \eta_i$). Es giebt aber noch die „singuläre Lösung“

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_1 \partial y_1}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_1 \partial y_2}, & \ldots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2 \partial y_1}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_2 \partial y_2}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Für die vollständige Lösung wird als eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung eines extremen Wertes des Integrals (5) gefunden, dass „der Ausdruck

$$\Delta_2 \varphi' = \sum_{i,k} \Big[\frac{\partial}{\partial x} \Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial p_k} \Big) + \Sigma_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial p_k} \Big) y_j' \Big] \delta p_i \delta p_k$$

für beliebige δp_i und alle Werte von x zwischen den gegebenen Grenzen sein Zeichen nicht ändere“. Man kann $\Delta^2 \varphi'$ in der Form darstellen:

$$\Delta_2 \varphi' = A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + \cdots,$$

wo ω_1, ω_2 lineare homogene Ausdrücke in Bezug auf δp_1, δp_2, ... sind. Werden dann $\frac{\partial}{\partial x} \Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial p_k} \Big) + \Sigma_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial p_k} \Big) y_j'$ und $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial p_i \partial p_k \partial p_\kappa}$ für $y_i = \eta_i$ und $p_i = a_i$ zwischen den Integrationsgrenzen nicht unendlich und keine der Grössen A_1, A_2, ... gleich Null, so kann man die Glieder dritter Ordnung weglassen, und die angegebene notwendige Bedingung ist auch hinreichend. Der Fall, wo A_1 zum Beispiel gleich Null wird für $x = \xi$, bedarf weiterer Umformungen. Es werden auch die Fälle betrachtet, wo einige der oben angedeuteten Grössen unendlich werden.

Der Verfasser zeigt endlich, wie die zweite Variation durch

die ursprüngliche Function f und die Anfangsbedingungen (1) ausgedrückt wird, und erläutert zum Schluss seine Auseinandersetzungen an einem Beispiele. Si.

O. Venske. Behandlung einiger Aufgaben der Variationsrechnung, welche sich auf Raumcurven constanter erster Krümmung beziehen. Diss. Göttingen. Göttingen. Dieterich (W. Fr. Kaestner). 60 S. 8°.

Die von Delaunay zuerst behandelte Aufgabe, diejenige Curve constanter erster Krümmung zu finden, welche zwei gegebene Punkte oder zwei gegebene Oberflächen verbindet und ein Maximum oder Minimum der Bogenlänge besitzt, ist später von Jellett und Todhunter weiter verfolgt worden. In allen Veröffentlichungen finden sich, wie Herr H. A. Schwarz gezeigt hat, neben direct irrigen Behauptungen auch solche, deren Beweis noch der nötigen Strenge entbehrt. Für den Fall, dass ein Kreisbogen eine Lösung des Problems ist, hat Herr Schwarz die Fälle untersucht, ob und unter welchen Bedingungen eine extreme Bogenlänge eintritt. Die vorliegende Abhandlung stellt in derselben strengen Weise nach den Weierstrass'schen Methoden die Untersuchung an für Teile der Schraubenlinie und für solche Curven, welche aus Stücken von Schraubenlinien, Kreisbogen oder Geraden zusammengesetzt sind. Sh.

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

É. Picard. Sur une généralisation des équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe. C. R. CXII. 1399-1403.

Die Theorie der Functionen einer complexen Variable kommt bekanntlich zurück auf die Theorie zweier reellen Functionen P, Q von zwei reellen Variabeln x, y, welche den Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

genügen. Diese Gleichungen haben die Eigenschaft, dass sie gültig bleiben, wenn man x, y resp. durch P_1, Q_1 ersetzt, wo P_1, Q_1 irgend zwei die Gleichungen befriedigende Functionen von x, y bedeuten. Der Verfasser stellt sich nun die Aufgabe, alle Systeme von zwei Differentialgleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} f\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}\right) = 0, \\ \varphi\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}\right) = 0 \end{cases}$$

zu bestimmen, welche die erwähnte Eigenschaft der Gleichungen (1) besitzen. Es zeigt sich, dass die Bestimmung dieser Systeme

von Gleichungen auf die Bestimmung der continuirlichen Gruppen von linearen Substitutionen bei zwei Variabeln und zwei Parametern zurückkommt und also auf Grund der Untersuchungen von Lie leicht ausgeführt werden kann.

Stellt man bei n Functionen von n Variabeln und $n+p$ Relationen zwischen den ersten partiellen Differentialquotienten der Functionen die entsprechende Aufgabe, so führt dieselbe auf die linearen continuirlichen Gruppen mit n^2-n-p Parametern. Der Verfasser behält sich eine ausführlichere Entwickelung der hier angedeuteten Ideen vor. Hz.

É. Picard. Sur la représentation approchée des fonctions. C. R. CXII. 183-186.

Bedeutet $f(\varphi)$ eine reelle continuirliche Function der reellen Veränderlichen φ mit der Periode 2π, so kann man, wie der Verfasser, ausgehend von dem Poisson'schen Integrale:

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2} f(\psi)d\psi,$$

zeigt, eine endliche Fourier'sche Reihe

$$F(\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{k=m} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)$$

bilden, die sich von $f(\varphi)$ um weniger als eine beliebig klein vorgeschriebene Grösse unterscheidet. Hieraus folgt dann leicht der von Herrn Weierstrass aufgestellte und in ganz anderer Weise bewiesene Satz, dass jede in einem Intervalle $\alpha \dots \beta$ stetige Function $f(x)$ in der Form einer gleichmässig und absolut convergirenden Reihe $f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\cdots$ dargestellt werden kann, deren Glieder ganze rationale Functionen von x sind. In ähnlicher Weise beweist der Verfasser den entsprechenden Satz für reelle Functionen von irgend einer Anzahl reeller Veränderlichen. Hz.

E. Beltrami. Sulle funzioni complesse. Nota II. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 1188-1195.

In einer unter demselben Titel erschienenen Note (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 416) hat der Verfasser allgemein die Functionen von x, y untersucht, die durch das Integral

$$U = \int \frac{h\,d\sigma}{e-z}$$

dargestellt sind. Hier ist $z = x+iy$, $e = \xi+i\eta$, h eine Function von ξ, η; $d\sigma = d\xi d\eta$, und das Integral ist über eine begrenzte Fläche σ auszudehnen. Wegen der Analogie dieser Functionen mit den Newton'schen Potentialfunctionen nennt der Verfasser dieselben „complexe Potentialfunctionen". Die Function h wird als Dichtigkeit im Punkte ξ, η der Fläche σ aufgefasst. In der vorliegenden Note betrachtet der Verfasser zunächst den speciellen Fall, wo die Fläche σ das Innere der Ellipse $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2} = 1$ ist und die Dichtigkeit h constant, etwa $= 1$, angenommen wird. Indem der Verfasser die allgemeinen Eigenschaften der Functionen U benutzt, erhält er das Resultat, dass

$$U = \pi\left(\frac{a-b}{a+b}z - z'\right) \quad \text{oder} \quad = \frac{2\pi ab}{c^2}(\sqrt{z^2-c^2}-z)$$

ist, je nachdem der Punkt z im Innern oder ausserhalb der Ellipse liegt. Dabei ist $c = \sqrt{a^2-b^2}$ und $z' = x-iy$. Hieran schliessen sich ähnliche Resultate an für den Fall, dass die Fläche σ ein aus zwei concentrischen, homothetischen Ellipsen begrenzter Ring, sowie dass die Dichtigkeit h in solchen concentrischen Ellipsen variirt. In Zusammenhang damit stehen Linienintegrale der Form $\int \frac{g\,ds}{\gamma-z}$, wo s die Bogenlänge bis zum variabeln Punkte ξ, η der Integrationslinie, $\gamma = \xi+i\eta$ und g eine die Dichtigkeit im Punkte ξ, η darstellende Function von ξ, η ist. Diese Integrale stellen Functionen von $z = x+iy$ dar, die die Integrationslinie als „coupure" im Sinne von Hermite besitzen. Hz.

Ch. Méray. Démonstration élémentaire d'un lemme fondamental de Cauchy. Darboux Bull. (2) XV. 86-96.

Es handelt sich hier um den folgenden Satz, der bei vielen Untersuchungen aus der Theorie der analytischen Functionen Anwendung findet: „Ist $f(x, y, \dots)$ eine Potenzreihe der complexen Veränderlichen $x, y, \dots$, die für $|x| < R$, $|y| < S, \dots$ convergirt, und ist M grösser als die Werte, welche der absolute Betrag von f annimmt, wenn man $x, y, \dots$ alle Werte durchlaufen lässt, die den Bedingungen

$$|x| = |x_0| < R, \ |y| = |y_0| < S, \ \dots$$

genügen, so ist der absolute Betrag jedes einzelnen Gliedes der Potenzreihe für $x = x_0$, $y = y_0, \dots$ kleiner als M".

Der Beweis, welchen der Verfasser zunächst für den Fall einer Veränderlichen giebt, stimmt im wesentlichen mit demjenigen überein, den Herr Weierstrass in seinen „Abhandlungen aus der Functionenlehre" (Berlin 1886. S. 93) mitteilt. Der Fall, in welchem es sich um Potenzreihen mit n Veränderlichen handelt, wird durch den Schluss von $n-1$ auf n erledigt.

Hz.

F. Lucas. Sur les fonctions d'une variable imaginaire.
S. M. F. Bull. XIX. 93-96, 99-102.

Einige physikalische Deutungen der Beziehungen, die zwischen dem reellen und imaginären Bestandteil einer analytischen Function bestehen. Hz.

M. de Presle. Développement du quotient de deux fonctions holomorphes, théorie des séries récurrentes.
S. M. F. Bull. XIX. 114-118.

Entwickelt man den Quotienten zweier Potenzreihen $\frac{\mathfrak{P}_0(x)}{\mathfrak{P}(x)}$ in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x)$, so sind die Coefficienten von $\mathfrak{P}_1(x)$ rationale Functionen der Coefficienten der beiden Reihen $\mathfrak{P}_0(x)$ und $\mathfrak{P}(x)$. Es handelt sich darum, diese Functionen allgemein anzugeben. Die Aufgabe lässt sich, wie leicht zu sehen, auf den Fall zurückführen, wo $\mathfrak{P}_0(x) = 1$ ist und $\mathfrak{P}(x)$ für $x = 0$

den Wert 1 annimmt, wo also der Quotient

$$\frac{1}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots}$$

in der Form $1+l_1x+l_2x^2+l_3x^3+\cdots$ entwickelt werden soll. Der Verfasser zeigt nun, dass l_p sich aus allen Termen vom Gewichte p zusammensetzt, die sich aus den Coefficienten b bilden lassen, dass diese Terme positiv oder negativ auftreten, je nachdem die Zahl ihrer Factoren gerade oder ungerade ist, dass endlich der Zahlenfactor jedes Termes der Polynomialcoefficient ist, welcher dem Terme in Rücksicht auf die Zahl der Factoren und auf ihre Exponenten zukommt. Z. B. ist $l_3 = -b_3+2b_2b_1-b_1^3$. Im Anschluss hieran giebt der Verfasser die bekannten Sätze, nach denen jede rationale Function von x sich in eine recurrente Reihe entwickelt und umgekehrt jede recurrente convergirende Potenzreihe eine rationale Function darstellt. Hz.

R. Fujisawa. Ueber die Darstellbarkeit willkürlicher Functionen durch Reihen, die nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreiten. Japan Journ. II. 1-15. (1890.)

Bezeichnen λ_1, λ_2, ... die der Grösse nach geordneten positiven Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(\lambda) = \lambda\cos\lambda+(\alpha-1)\sin\lambda = 0 \qquad (\alpha>0),$$

so hat die unendliche Reihe

$$v = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\lambda_n\frac{r}{l}\right)\frac{\int_0^l \varrho f(\varrho)\sin\left(\lambda_n\frac{\varrho}{l}\right)d\varrho}{\int_0^l\left(\sin\lambda_n\frac{\varrho}{l}\right)^2 d\varrho}$$

zur Summe $f(r)$ für $0<r<l$, mit Ausschluss der Grenzen.

Der Beweis dieses Satzes ist folgender: Für $\alpha=1$ wird

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2}\pi;$$

und wenn die Reihe v für $\alpha = 1$ durch v' bezeichnet wird, so lautet dieselbe

$$v' = \frac{2}{rl} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{r}{l}\right) \int_0^l \varrho f(\varrho) \sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\varrho}{l}\right) d\varrho.$$

Von dieser Reihe ist bekannt, dass sie mit Ausschluss der Grenzen $r = 0$ und $r = l$ zwischen denselben $f(r)$ zur Summe hat. Der Verfasser zeigt nun, dass die beiden Summen v und v' gegen die nämliche Grenze convergiren. (Vergl. F. d. M. XXI. 1889. 431.) Wz.

F. G. Teixeira. Sobre o desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias dos senos e cosenos. Teixeira J. X. 35-47.

Die Betrachtung des Integrals

$$J = \int_S \frac{f(z)\sin^m(x-a)dz}{\sin(z-x)\sin^m(z-a)},$$

in welchem man als geschlossenen Integrationsweg das Rechteck wählt, dessen Centrum der Punkt $x = a$ ist und dessen Seiten von zwei Parallelen zur Abscissenaxe von der Länge π und zwei Parallelen zur Ordinatenaxe von der Länge $2l$ gebildet werden, und in welchem $f(z)$ eine im Innern des Rechtecks holomorphe Function bezeichnet, x ein Punkt dieses Innern ist, führt den Verf. zu den folgenden Entwickelungen von $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} K_{2n+1}\sin^{2n+1}(x-a) + \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} L_{2n}\sin^{2n}(x-a) + J,$$

wenn m gerade ist, und:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m-1)} K'_{2n}\sin^{2n}(x-a) + \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m+3)} L'_{2n+1}\sin^{2n+1}(x-a) + J,$$

wenn m ungerade ist.

Die Coefficienten K, K', L, L' sind Constanten, und der Verf. zeigt, wie man sie der Reihe nach erhalten kann. Man findet:

$$L_0 = f(a), \qquad K'_0 = f(a),$$
$$K_1 = f'(a), \qquad L'_1 = f'(a),$$
$$L_2 = \tfrac{1}{2}[f(a) + f''(a)], \qquad K'_2 = \tfrac{1}{2}f''(a),$$
$$K_3 = \tfrac{1}{6}[f'(a) + f'''(a)], \qquad L'_3 = \tfrac{1}{6}[f'''(a) + 4f'(a)],$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

Danach werden die Bedingungen dafür ermittelt, dass das Integral J sich der Null nähert, wenn m unendlich wird. Dabei ergiebt sich das folgende Theorem:

Wenn $l \geqq \log(1+\sqrt{2})$, so nähert sich J bei unendlich werdendem m der Null, falls x der Bedingung $|\sin(x-a)| < 1$ genügt. Ist $l < \log(1+\sqrt{2})$, so nähert sich J der Grenze Null, falls x der Bedingung

$$|\sin(x-a)| < \tfrac{1}{2}(e^l - e^{-l})$$

genügt. In diesen beiden Fällen kann man $f(x)$ in eine convergente Reihe entwickeln vermittelst der folgenden Formeln:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+1}\sin^{2n+1}(x-a) + \cos(x-a)\sum_{n=0}^{\infty} L_{2n}\sin^{2n}(x-a),$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K'_{2n}\sin^{2n}(x-a) + \cos(x-a)\sum_{n=0}^{\infty} L'_{2n+1}\sin^{2n+1}(x-a).$$

Um von diesen Formeln eine Anwendung zu machen, betrachtet der Verf. die Functionen $f(x) = \sin kx$ und $f(x) = \cos kx$, wodurch er zu den Euler'schen Formeln gelangt.

Hiernach wendet er sich zu dem Integrale

$$M = \int_S \frac{f(z)\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)\,dz}{\sin(z-x)\sin(z-\alpha)\sin(z-\beta)\ldots\sin(z-\lambda)},$$

in welchem als geschlossener Integrationsweg das im vorigen Falle benutzte Rechteck gewählt wird. Die Betrachtung dieses Integrals ermöglicht dem Verf. die Ermittelung der Convergenzbedingungen bei der Hermite'schen Interpolationsformel [oder vielmehr der Gauss'schen, Ges. Werke III. 328 ff. Lp.]

$$f(x) = \frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots\sin(\alpha-\lambda)}f(\alpha)$$
$$+ \frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots\sin(\beta-\lambda)}f(\beta)$$
$$+ \cdots\cdots,$$

wenn die Anzahl der Grössen α, β, γ, ... unendlich wird. Hierbei ergeben sich die Bedingungen:

$$|\sin(x-\alpha)| < 1, \quad |\sin(x-\beta)| < 1, \ldots,$$

wenn $l > \log(1+\sqrt{2})$, und

$$|\sin(x-\alpha)| < \tfrac{1}{2}(e^l-e^{-l}), \quad |\sin(x-\beta)| < \tfrac{1}{2}(e^l-e^{-l}), \quad \ldots,$$

wenn $l < \log(1+\sqrt{2})$. Tx. (Lp.)

P. L. Tschebyscheff. Ueber die Summen, welche aus den Werten der einfachsten Monome, mit einer beständig positiv bleibenden Function multiplicirt, gebildet sind. St. Petersb. Denkschr. LXIV. 1-67.

Wenn man die Function $f(x)$ in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen der Differenz $x-X$ entwickelt, so findet man die Formeln für die angenäherte Darstellung der Function $f(x)$ in der Form von Polynomen, deren Coefficienten sich durch die Anfangswerte der Function $f(x)$ und der Derivirten bestimmen lassen. Wenn man $f(x)$ in der Form einer Reihe

$$K_0 U_0 + K_1 U_1 + K_2 U_2 + \cdots$$

darstellt, wo die U_0, U_1, U_2, ... Functionen von x sind, die von $f(x)$ nicht abhängen, so finden wir für die Bestimmung der Coefficienten K_0, K_1, K_2, ... die Formeln:

$$K_0 = \Sigma\varphi_0(x_i)f(x_i), \quad K_1 = \Sigma\varphi_1(x_i)f(x_i), \quad \ldots.$$

In dem Falle, wenn die Functionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Polynome der Grade 0, 1, 2, ... sind, zerlegen sich diese Summen in die elementaren Summen:

$$\Sigma x_i^0 f(x_i), \quad \Sigma x_i f(x_i), \quad \Sigma x_i^2 f(x_i), \quad \ldots,$$

und die angenäherten Werte der Function $f(x)$ bestimmen sich mittels dieser Summen, welche aus den Werten der Monome x_i^0, x_i, x_i^2, ..., mit $f(x_i)$ multiplicirt, gebildet sind. Die in dieser Weise erhaltenen angenäherten Ausdrücke von $f(x)$ unterscheiden sich wesentlich von dem Ausdrucke der Function durch eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $x-X$; obschon dem letzteren im Grade der Genauigkeit nachstehend, wenn es sich darum

handelt, die Function $f(x)$ im Bereiche von $x = X$ zu berechnen, stellen diese angenäherten Ausdrücke die Function $f(x)$ besser dar, falls x sich in mehr oder minder weiteren Grenzen verändert. Dies zeigte der Verfasser in der berühmten Abhandlung: „Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés“ (Mémoires de l'Académie Impériale de Saint-Pétersbourg, T. III) und „Sur les fractions continues“ (Journal de Liouville, T. X).

Die Summen $\sum_0^n x_i^0 f(x_i)$, $\sum_0^n x_i f(x_i)$, ..., $\sum_0^n x_i^{l-1} f(x_i)$, welche aus den Producten der positiven Grössen $f(x_0)$, $f(x_1)$, ... und den Potenzen der reellen Grössen x_0, x_1, ..., x_{n-1} gebildet sind, verdienen eine besondere Aufmerksamkeit. Die höchst elegante, auf den Eigenschaften der Kettenbrüche beruhende Analyse des Verfassers gestattet jetzt, nach den gegebenen Grössen C_0, C_1, ..., C_l dieser Summen die untere Grenze der grössten und die obere Grenze der kleinsten unter den Grössen x_0, x_1, x_2, ..., x_n zu bestimmen. Diese Grenzen sind die kleinste und grösste Wurzel einer Gleichung, die man erhält, wenn man den Nenner eines Näherungsbruches des Kettenbruchs gleich Null setzt, in welchen sich die Function

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \cdots + \frac{C_{l-1}}{x^l}$$

entwickeln lässt. In der zweiten Hälfte der Abhandlung werden die oberen Grenzen der Summen

$$\sum_0^{q+1} u_i^2, \quad \sum_{q_1}^{p} u_i^2$$

ermittelt, wenn die Gleichungen

$$\sum_0^p z_i^0 u_i^2 = C_0, \quad \sum_0^p z_i u_i^2 = C_1, \quad \sum_0^p z_i^2 u_i^2 = C_2, \quad \ldots,$$

$$\sum_0^p z_i^{l-1} u_i^2 = C_{l-1}$$

bestehen. Diese Grenzen werden durch die Residuen der Näherungsbrüche eines Kettenbruchs gegeben. Wi.

W. Burnside. On functions determined from their discontinuities, and a certain form of boundary condition. Lond. M. S. Proc. XXII. 346-358.

Der Verfasser beschäftigt sich in der vorliegenden Abhandlung mit der folgenden Aufgabe: In der Ebene, deren Punkte die Werte der complexen Veränderlichen z darstellen, ist ein Gebiet R gegeben, welches von m geschlossenen knotenlosen, sich gegenseitig nicht treffenden Linien $C_1, C_2, \dots, C_m$ begrenzt wird. Man soll die analytische Function $w = u + iv$ der Variable z so bestimmen, dass sie erstens im Gebiete R eindeutig und, abgesehen von n gegebenen Stellen $z_1, z_2, \dots, z_n$, stetig ist, dass zweitens $w - \frac{A_i}{z - z_i}$ an der Stelle $z = z_i$ stetig bleibt, unter $A_1, A_2, \dots, A_n$ gegebene Constanten verstanden, dass endlich drittens (für $r = 1, 2, \dots, m$) längs der Linie C_r die Grösse $u.\sin\theta_r + v.\cos\theta_r$ constant ist, wo $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ gegebene Winkel bezeichnen.

Unter der Annahme, dass eine diesen Bedingungen genügende Function w überhaupt existirt, zeigt der Verfasser, dass die Function bis auf eine additive Constante vollständig bestimmt ist, und dass sie im Gebiete R jeden vorgeschriebenen Wert n-mal annimmt. Die Function w vermittelt, der letzteren Eigenschaft zufolge, die Abbildung des Gebietes R auf eine n-blättrige über der w-Ebene ausgebreitete Riemann'sche Fläche, wobei den Linien $C_1, C_2, \dots, C_m$ endliche Stücke von m geraden Linien entsprechen. Durch eine nähere Betrachtung dieser Abbildung erhält der Verfasser den Satz, dass u und v auf jeder der Linien $C_1, C_2, \dots, C_m$ je ein Maximum und ein Minimum besitzen. Die weiteren Untersuchungen beziehen sich auf den Fall, wo die Linien C_r Kreise sind. Ist $m = 1$, wird also das Gebiet R von einem einzigen Kreise begrenzt, so zeigt sich, dass w eine rationale, leicht explicit anzugebende Function von z ist. Ist $m = 2$, wird also R von zwei Kreisen C_1, C_2 begrenzt, so lässt sich w durch eine unendliche Reihe darstellen, die sich im Falle, dass $\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi}$ commensurabel ist, in geschlossener Form durch θ-Functionen ausdrücken lässt. Die erwähnte unendliche Reihe steht

in enger Beziehung zu den Poincaré'schen Reihen, wie der Verfasser in einem speciellen Falle näher darlegt. In diesem Falle hat die Function w die Eigenschaft, sich bei einer gewissen linearen Substitution von z bis auf eine additive Constante zu reproduciren. Die Untersuchung des Falles, wo das Gebiet R von drei oder mehr Kreisen begrenzt wird, behält sich der Verfasser für eine weitere Mitteilung vor. Hz.

G. Mittag-Leffler. Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm. Extrait d'une lettre à M. Poincaré. Acta Math. XV. 279-280.

Der Verfasser teilt ein von Herrn Fredholm gefundenes Beispiel einer analytischen Function mit, welche eine natürliche Grenze besitzt und für die Punkte dieser Grenze nebst allen ihren Differentialquotienten stetig ist. Die Function steht in enger Beziehung zur θ-Reihe und lautet, auf ihre einfachste Form gebracht:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a^{\nu} x^{\nu^2}, \quad |a| < 1.$$

Die natürliche Grenze wird durch den Kreis mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius 1 gebildet. Hz.

C. A. Laisant. Quelques remarques relatives aux fonctions réciproques. S. M. F. Bull. XIX. 142-144.

Eine Function $f(x)$, welche der Gleichung $f(x) = x^m f\left(\frac{1}{x}\right)$ genügt, nennt der Verfasser „reciprok vom Grade m". Der Verfasser giebt einige Sätze, welche für solche reciproke Functionen gelten. Zum Beispiel: „Wenn $f(x)$ reciprok vom Grade m ist, so ist $(m-1)f'(x) - xf''(x)$ reciprok vom Grade $m-2$".

Hz.

D. HILBERT. Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. Math. Ann. XXXVIII. 459-460.

Herr Peano hat gezeigt, dass und wie man die Punkte einer Geraden von der Länge 1 stetig den Punkten eines Quadrates von der Seitenlänge 1 zuordnen kann. Der Verfasser erreicht dasselbe Ziel auf folgendem Wege. Er teilt die Gerade in vier gleiche Teile, ebenso das Quadrat durch die Mittellinien in vier gleiche Quadrate; jeder Teil der Geraden und jedes der Teilquadrate wird in derselben Weise je in vier Teile zerlegt u. s. f. Die einzelnen Teile der Geraden werden sodann den einzelnen Teilen des Quadrates so zugeordnet, dass aneinander stossenden Teilen wieder aneinander stossende Teile entsprechen. Betrachtet man nun einen Punkt der Geraden, so fällt derselbe in unendlich viele Teile der Geraden; diesen entsprechen unendlich viele ineinander geschachtelte Teile des Quadrates, welche einen Grenzpunkt besitzen. Der letztere wird dem betrachteten Punkte der Geraden zugeordnet. Von den Bemerkungen, die der Verfasser an die Abbildung anknüpft, sei hervorgehoben, dass die die Abbildung vermittelnden Functionen einfache Beispiele von stetigen, nirgends differentiirbaren Functionen bilden. Hz.

RIQUIER. Sur les principes de la théorie générale des fonctions. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VIII. 59-86, 141-172.

Die Abhandlung enthält die Grundlagen einer Theorie der Functionen von n complexen Variabeln. Sie knüpft an ein Werk von Méray „Nouveau précis d'Analyse infinitésimale“ (1872) an und bezweckt namentlich, die in diesem Werke niedergelegten Untersuchungen, die dem Verfasser zum Teil nicht einwandfrei erscheinen, zu ergänzen. Ebenso wie Hr. Weierstrass und (wie der Verfasser hervorhebt) unabhängig von diesem, gründet Hr. Méray die Theorie der Functionen auf die Potenzreihen. Die Theorie geht aus von dem Begriffe einer Function $f(x, y, \dots)$, die in einem Teile des die Variabeln $x, y, \dots$ darstellenden Raumes „olotrope“ ist. Darunter ist zu verstehen, dass die

Werte der Function in der Umgebung jeder Stelle x_0, y_0, ..., die jenem Teile des Raumes angehört, durch eine nach Potenzen von $x-x_0$, $y-y_0$, ... fortschreitende Reihe darstellbar sind. Die Teile des Raumes, die bei dieser Definition in Frage kommen, werden vom Verfasser gewissen Bedingungen unterworfen, die sich indessen nicht in wenigen Worten wiedergeben lassen. Den „fonctions olotropes" ist der erste Abschnitt der Abhandlung gewidmet. Es finden sich in diesem Abschnitte z. B. strenge Formulirungen der fundamentalen Sätze, nach welchen aus dem Verschwinden einer solchen Function für gewisse Wertsysteme der Variabeln ihr identisches Verschwinden, ferner aus den Werten, die sie in gewissen Gebieten annimmt, Grenzen für die Coefficienten der darstellenden Potenzreihen geschlossen werden können. Ein weiterer Abschnitt enthält die Theorie der Fortsetzungen der Potenzreihen und entwickelt im Anschluss daran den allgemeinen Begriff der analytischen Function. Es wird hier gezeigt, dass Functionen von Functionen wieder Functionen (in dem festgesetzten Sinne) sind, dass eine unendliche Summe von Functionen unter gewissen auf die Art ihrer Convergenz bezüglichen Bedingungen wieder eine Function darstellt, und es werden mehrere auf die Wahl des Weges, längs welchem die Fortsetzung der Functionen geschieht, sich beziehende Sätze bewiesen. Der letzte Abschnitt der Abhandlung giebt einige Anwendungen der entwickelten Principien auf Systeme von Differentialgleichungen. Hz.

G. Ascoli. Sulle funzioni a due variabili reali, le quali crescono o decrescono sempre nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo di piano a distanza finita. Annali di Mat. (2) XIX. 289-333, XX. (1892.) 41-59.

Wiederabdruck einer in den Rendiconti del Istituto Lombardo erschienenen Abhandlung, über welche im Bd. XXI. 1889. 421 dieses Jahrbuches referirt worden ist. Hz.

A. Brill. Ueber das Verhalten einer Function von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Münch. Ber. XXI. 207-220.

Bezeichnet $F(x, y)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von x und y, die sich für $x = 0$ auf eine mit dem Gliede y^n beginnende Potenzreihe von y reducirt, so entsprechen genügend kleinen Werten von x bekanntlich n Werte von y, die mit x verschwinden, die Gleichung $F(x, y) = 0$ befriedigen, und die sich nach gebrochenen Potenzen von x entwickeln lassen. Diese Entwickelungen erhält der Verfasser auf einem neuen Wege, indem er an einen Satz von Weierstrass anknüpft, demzufolge die Gleichung $F(x, y) = 0$ ersetzt werden kann durch eine Gleichung der Gestalt

$$f(x, y) \equiv f_n + x^2 f_{n-1} + x^3 f'_{n-1} + \cdots = 0,$$

wo f_n, f_{n-1}, f'_{n-1}, ... homogene Functionen von x und y von den Graden, n, $n-1$, $n-1$, ... bedeuten. Eine solche Reihe $f(x, y)$ möge „reducirt" heissen. Zunächst kann man nun f in das Product zweier reducirten Reihen spalten:

$$f = \varphi \cdot \psi,$$
$$\varphi = (\varphi_p + x^2 \varphi_{p-1} + x^3 \varphi'_{p-1} + \cdots),$$
$$\psi = (\psi_q + x^2 \psi_{q-1} + x^3 \psi'_{q-1} + \cdots),$$

indem man f_n in zwei teilerfremde Factoren $\varphi_p \psi_q$ zerlegt und die Functionen φ_{p-1}, ψ_{q-1}, ... aus der Bedingung bestimmt, dass die vorstehende Gleichung eine identische wird. Der Beweis für die Convergenz der beiden Factoren φ und ψ wird durch die Methode der Reihenvergleichung erbracht. Durch wiederholte Anwendung dieser Zerlegung einer reducirten Reihe in ein Product zweier anderen stellt man schliesslich f dar als Product von reducirten Reihen der Gestalt

$$\varphi = (y + ax)^p + x^2 \Phi_{p-1} + x^3 \Phi'_{p-1} + \cdots.$$

Diese Reihen lassen sich nun, falls sie nicht die p^{te} Potenz einer Reihe der Gestalt $y + \mathfrak{P}(x)$ darstellen, durch eine Substitution der Form $y + ax = y_1 x_1^{\iota-1}$, $x = x_1^{\varkappa}$, wo ι, $\varkappa$ geeignet gewählte positive ganze Zahlen bedeuten, in Reihen von y_1, x_1 verwandeln, die eine weitere Zerlegung gestatten. Auf diese

Weise gelangt man endlich dazu, die Reihe f in ein Product der Gestalt $(y-\mathfrak{P})(y-\mathfrak{P}')\dots(y-\mathfrak{P}^{(n-1)})$ aufzulösen, wo $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \dots, \mathfrak{P}^{(n-1)}$ nach gebrochenen Potenzen von x fortschreitende Reihen bezeichnen. Hz.

A. Brill. Ueber Functionen von zwei Veränderlichen und einen Satz des Herrn Nöther. Math. Ann. XXXIX. 129-141.

Die vorliegende Abhandlung knüpft an die Untersuchungen der Herren Nöther, Voss und Stickelberger über den bekannten Nöther'schen Satz aus der Theorie der ganzen rationalen Functionen von zwei Veränderlichen an. Sie beschäftigt sich mit der Frage, unter welcher Bedingung zwischen drei Potenzreihen F, Φ, Ψ der beiden unabhängigen Variabeln x, y eine Gleichung der Gestalt $F=M\Phi+N\Psi$ besteht, wo M und N ebenfalls (convergirende) Potenzreihen von x und y bedeuten. Der Verfasser beweist den folgenden Satz, der die Antwort auf die erwähnte Frage giebt: Man bestimme die Potenzreihen α und β so, dass

$$\alpha\Phi=\varphi=y^p+y^{p-1}x\mathfrak{P}(x)+\dots+x^p\mathfrak{P}^{(p-1)}(x),$$
$$\beta\Psi=\psi=y^q+y^{q-1}x\mathfrak{Q}(x)+\dots+x^q\mathfrak{Q}^{(q-1)}(x)$$

wird, was nach einem Satze des Herrn Weierstrass stets möglich ist. Die nach y genommene Resultante R von φ und ψ, die eine gewöhnliche Potenzreihe von x ist, beginne mit dem Gliede x^k. (Der Fall, in welchem R identisch verschwindet, wird ausgeschlossen.) Lassen sich dann die ganzen rationalen Functionen A und B von x und y so bestimmen, dass die Entwickelung von $A\Phi+B\Psi$ bis zu den Gliedern $(k-1)^{\text{ter}}$ Dimension mit F übereinstimmt, so kann man A und B durch zwei convergirende Potenzreihen M und N ersetzen, welche die Gleichung $F=M\Phi+N\Psi$ zu einer identischen machen. Hz.

G. Frobenius. Ueber Potentialfunctionen, deren Hesse'sche Determinante verschwindet. Gött. Nachr. 1891. 323-338.

Es sei s eine Function der drei Variabeln x_1, x_2, x_3 und

es möge allgemein die Differentiation nach der Variable x_α durch Anhängung des Index α angedeutet werden. Wenn nun die Hesse'sche Determinante $|s_{\alpha\beta}|$ der Function s verschwindet, so besteht bekanntlich zwischen den drei Differentialquotienten s_1, s_2, s_3 eine Gleichung $\Phi(s_1, s_2, s_3) = 0$, welche eine gewisse Fläche darstellt, wenn s_1, s_2, s_3 als rechtwinklige Coordinaten angesehen werden. Diese Fläche ist nun, nach einem Satze des Herrn Weingarten, eine Minimalfläche, falls die Function s eine Potentialfunction ist, d. h. der Differentialgleichung $s_{11}+s_{22}+s_{33}=0$ genügt. Der Verfasser giebt in der vorliegenden Mitteilung zunächst einen neuen Beweis und eine Verallgemeinerung dieses Satzes. Die letztere lautet so: Damit die oben erwähnte Fläche eine Minimalfläche sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Summe der reciproken Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{\lambda}|s_{\alpha\beta}-\lambda l_{\alpha\beta}| = 0$ eine Function der drei Coordinaten s_1, s_2, s_3 ist. Dabei ist $l_{\alpha\beta} = 0$ oder 1, je nachdem α von β verschieden, oder $\alpha = \beta$ ist. Des weiteren handelt es sich um die Aufgabe, die sich unmittelbar an den Weingarten'schen Satz anknüpft: alle Potentialfunctionen zu finden, deren Hesse'sche Determinante verschwindet. Der Verfasser entwickelt die Lösung in der Weise, dass er von der Gleichung $\Phi(s_1, s_2, s_3) = 0$ einer beliebigen Minimalfläche ausgeht und zeigt, dass und wie die Function $s(x_1, x_2, x_3)$ den Bedingungen

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial x_3^2}=0 \quad \text{und} \quad \Phi\left(\frac{\partial s}{\partial x_1}, \frac{\partial s}{\partial x_2}, \frac{\partial s}{\partial x_3}\right)=0$$

entsprechend bestimmt werden kann. Alle diese Untersuchungen stehen, wie der Verfasser zum Schluss eingehend darlegt, im engen Zusammenhang mit der Theorie der bilinearen Formen und lassen sich auf Grund der Methoden durchführen, die er in seiner Abhandlung „Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen" (J. für Math. LXXXIV, F. d. M. IX. 1877. 85) entwickelt hat. Hz.

O. VENSKE. Zur Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ für ebene Bereiche. Gött. Nachr. 1891. 27-34.

Der Verfasser löst in der vorliegenden Note die Randwertaufgabe der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ für einige specielle ebene Bereiche. Unter „Randwertaufgabe" ist dabei die folgende Aufgabe verstanden: Es soll eine in einem berandeten Bereiche stetige Lösung der Differentialgleichung gefunden werden, welche auf dem Rande, ebenso wie ihre nach der Randnormale genommene Ableitung, vorgeschriebene Werte annimmt.

Im engen Zusammenhange mit der Lösung dieser Aufgabe steht die andere, eine der Differentialgleichung genügende Function zu bestimmen, welche an einer Stelle des gegebenen Bereiches logarithmisch unstetig wird und auf dem Rande nebst ihrer Ableitung nach der Randnormale verschwindet. Diese Function entspricht der Green'schen Function in der Theorie der Gleichung $\Delta u = 0$ und wird deshalb vom Verfasser als „zweite Green'sche Function" bezeichnet. Die Bereiche, für welche die Randwertaufgabe in der vorliegenden Note gelöst wird, sind die folgenden: Der Kreis, der Kreisring, der Winkelraum, der Parallelstreifen, das von zwei Radien und zwei concentrischen Kreisen begrenzte Kreisbogenrechteck. Den drei ersten Fällen wird der Satz zu Grunde gelegt, dass jede Lösung der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ sich auf die Form $u = U + r^2 V$ bringen lässt, wo U, V logarithmische Potentiale bedeuten, r den Radiusvector. Entwickelt man hiernach u in eine Fourier'sche Reihe, so gelingt es, die Coefficienten der letzteren den vorgeschriebenen Bedingungen gemäss zu bestimmen. Dem vierten Falle wird die Darstellung $u = U + yV$ zu Grunde gelegt, wobei vorausgesetzt wird, dass die begrenzenden Linien des Parallelstreifens der x-Axe parallel laufen. Es gelingt dann, U und V durch bestimmte Integrale darzustellen. Der letzte Fall erfordert complicirtere Betrachtungen und wird durch Bildung gewisser particulärer Lösungen der Gleichungen $\Delta\Delta u = 0$ erledigt. Hz.

G. Giuliani. Sulle funzioni di n variabili reali. Batt. G. XXIX. 234-238.

Der Weierstrass'sche Satz über die eindeutigen Functionen

mit vorgeschriebenen Nullstellen und der Mittag-Leffler'sche Satz sind von Herrn Appell (Acta Math. IV, F. d. M. XVI. 1884. 373) auf Functionen dreier reellen Veränderlichen, die der Differentialgleichung $\Delta F = 0$ genügen, verallgemeinert worden. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um die Verallgemeinerung derselben Sätze auf Functionen von n reellen Veränderlichen, welche der Gleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$ genügen. Und zwar schlägt der Verfasser zu diesem Zwecke einen ähnlichen Weg ein, wie Herr Dini zum Beweise der genannten Sätze von Weierstrass und Mittag-Leffler. (Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini.) Das erstrebte Ziel wird dabei in einfacher Weise durch die Einführung von Polarcoordinaten an Stelle der als rechtwinklige Coordinaten aufgefassten Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erreicht.

Der Verfasser löst sodann noch die Aufgabe, die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ so zu bestimmen, dass sie für unendlich viele vorgeschriebene Stellen vorgeschriebene Werte annimmt.

Hz.

R. Escher. Theorie der stelkundige functiën. Nieuw Archief. XVIII. 187-222.

Indem der Verf. die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen geschichtlich verfolgt, beabsichtigt er, zur Aufklärung einzelner Punkte dadurch beizutragen.

Zuerst wird gezeigt, dass der Wert des Doppelintegrals

$$\int_\varepsilon^1 \int_\delta^1 \frac{\partial^2 \log \operatorname{tg} \frac{y}{x}}{\partial x \partial y} dx\, dy$$

für $\lim \varepsilon = 0$, $\lim \delta = 0$ unbestimmt ist, dass jedoch die Reihenfolge der Integrationen stets vertauscht werden kann. Das Verdienst Cauchy's um die Theorie der Entwickelung einer Function in Reihen wird hervorgehoben. Der Cauchy'sche Beweis für die Laurent'sche Reihe wird reproducirt und vervollständigt. Sodann werden die Untersuchungen von Puiseux über die Weise, wie die verschiedenen Zweige einer algebraischen Function in ein-

ander übergehen, einer näheren Betrachtung unterworfen. Der Verfasser wird dadurch zu dem Schlusse geführt, dass die Reihenentwickelungen einer algebraischen Function nach gebrochenen Potenzen der Variable nur dann in den Verzweigungspunkten gültig bleiben, wenn die Nullpunkte, Pole und Verzweigungspunkte in endlicher Entfernung von einander liegen. Hieraut gründet sich die folgende Definition einer algebraischen Function:

Eine algebraische Function ist eine solche, welche einer Gleichung von der Form $a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + a_n = 0$ genügt (wo die Grössen a ganze und rationale Functionen der Variable x sind), und deren Nullpunkte, Pole und Verzweigungspunkte endliche Abstände von einander haben.

Die Puiseux'schen Ergebnisse werden auch direct mittels Grenzbestimmungen hergeleitet, wobei sich der Satz herausstellt: Wenn eine Function in solcher Weise unstetig ist, dass ihre ersten Differentialquotienten die Wurzeln einer binomischen Gleichung sind und die Function innerhalb eines endlichen Gebietes um diesen Verzweigungspunkt endlich und stetig bleibt, so werden die Vertauschungen der verschiedenen Zweige der Function innerhalb jenes Gebietes durch diejenigen der binomischen Gleichung bestimmt. Anwendung auf besondere Fälle. Mo.

A. Hurwitz. Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. Math. Ann. XXXIX. 1-61.

Die Abhandlung behandelt die Aufgabe: die Gesamtheit der n-blättrigen Riemann'schen Flächen zu untersuchen, welche an w gegebenen Stellen in vorgeschriebener Weise verzweigt sind. Im I. Abschnitt wird zunächst die Anzahl der verschiedenen solchen Flächen bestimmt. Die Frage wird auf die andere zurückgeführt: man soll angeben, auf wie viele Weisen bei n Elementen eine gegebene Substitution S als ein Product von w Transpositionen dargestellt werden kann. Schliesslich wird die gesuchte Anzahl dargestellt durch einen Ausdruck der Form:

$$N = \Sigma c_k k^w \qquad [k = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}n(n-1)];$$

in demselben bedeuten die c_k ausschliesslich von n abhängende,

rationale Zahlen, die für $n = 2, 3, \ldots, 6$ ausgerechnet mitgeteilt werden. Die N so erhaltenen Flächen vertauschen sich, wenn man die Verzweigungspunkte continuirlich so variiren lässt, dass jeder schliesslich eine Stelle einnimmt, an der auch anfangs ein solcher Punkt sich befand. Die Gruppe dieser Vertauschungen bezeichnet der Verfasser als Monodromiegruppe A; durch die Forderung, dass jeder Verzweigungspunkt in seine eigene Anfangslage zurückkehre, wird aus ihr eine Untergruppe, die Monodromiegruppe B, ausgeschieden. Mit beiden Gruppen beschäftigt sich der II. Abschnitt; sie sind beide im allgemeinen intransitiv, aber transitiv, wenn alle vorgeschriebenen Verzweigungspunkte einfach sind. Im III. Abschnitt wird die Frage behandelt, wie viele von den Flächen zu „reellen" algebraischen Gebilden gehören, wenn die vorgeschriebenen Verzweigungspunkte teils reell, teils paarweise conjugirt complex sind. Im IV. Abschnitt werden nach Thomae die drei- und vierwertigen algebraischen Functionen, deren Verzweigungspunkte gegeben sind, durch Thetafunctionen dargestellt. Der letzte Abschnitt endlich beschäftigt sich mit Flächen, welche, statt über der schlichten Zahlenebene, über einer andern Fläche mehrblättrig ausgebreitet sind, und schliesst mit der Bestimmung einer 60-wertigen unverzweigten algebraischen Function auf einer Fläche vom Geschlechte 2, deren Werte durch die Ikosaedersubstitutionen mit einander zusammenhängen.

Bdt.

P. Appell. Sur les fonctions périodiques de deux variables. Journ. de Math. (4) VII. 157-219.

Die Frage, ob jede Function von n Variabeln mit n Gruppen von Perioden, die sich im Endlichen überall wie eine rationale Function verhält, sich mit Hülfe der Thetafunctionen von n Variabeln ausdrücken lasse, scheint auf den ersten Blick verneint werden zu müssen; denn die Perioden der letzteren sind durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ bekannte Relationen verbunden. Indessen haben sowohl Riemann als Hr. Weierstrass gefunden, dass diese Relationen bei jeder mehrfach periodischen Function der genannten

Art erfüllt sind. Und die Herren Picard und Poincaré haben diesen Satz bewiesen (C. R. XCVII, F. d. M. XV. 1883. 365). Der Verfasser greift die Frage für $n=2$ direct an, indem er sich auf den Satz des Herrn Poincaré stützt, dass eine Function von zwei Variabeln, die im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Function besitzt, als Quotient zweier beständig convergenten Potenzreihen dargestellt werden kann. [Der Beweis dieses Satzes (Acta Math. II; F. d. M. XV. 1883. 358) ist allerdings nicht in allen Details durchgeführt; Hr. Weierstrass hat noch 1887 (Abh. a. d. Functionenlehre S. 137) seinen Ausspruch wiederabdrucken lassen, dass die Frage unerledigt sei und sehr erhebliche Schwierigkeiten darzubieten scheine. Erneute Prüfung der Sache wäre wünschenswert.]

Im 1. Capitel wird auf Grund des von Hrn. Guichard (Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV; F. d. M. XIX. 1887. 344) bewiesenen entsprechenden Satzes für eine Variable gezeigt: Sind zwei ganze Functionen $H(x, y)$, $K(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen gegeben, welche die Identität erfüllen:

$$H(x, y+1)-H(x, y) = K(x+1, y)-K(x, y),$$

so existirt eine dritte ganze Function $G(x, y)$, welche die beiden Gleichungen befriedigt:

$$G(x+1, y)-G(x, y) = H(x, y); \quad G(x, y+1)-G(x, y) = K(x, y).$$

Das 2. Capitel bringt eine neue Entwickelung der Darstellung doppelt periodischer Functionen einer Variable durch Thetafunctionen; im dritten wird die betreffende Methode auf vierfach periodische Functionen von zwei Variabeln ausgedehnt. Den Schluss bilden Bemerkungen über zweifach periodische Functionen von zwei Variabeln. Bdt.

Béghin. Sur l'impossibilité d'une fonction d'une seule variable à plus de deux périodes. S. M. F. Bull. XIX. 31.

Es wird bewiesen, dass, wenn A, B, C drei Perioden bezeichnen, man durch drei positive ganze Zahlen a, b, c den Modul von $Aa+Bb-Cc$ so klein machen kann, als man will, woraus folgt, dass drei Perioden unmöglich sind. H.

A. Jonquière. Ueber eine Verallgemeinerung der Bernoulli'schen Functionen und ihren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Riemann'schen Reihe. Stockh. Akad. Bihang. XVI. I. 6. 28 S.

Als Bernoulli'sche Function des Parameters s und des Arguments x bezeichnet der Verfasser

$$\chi(s, x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{xz} \cdot z^{-s}}{e^z-1}\,dz,$$

wo die Integrationsvariable z von $-\infty$ mit der Phase $-\pi$ ausgehen, sich längs der Realitätsaxe bis gegen den Nullpunkt bewegen, um diesen in rechtläufigem Sinne einen Kreis mit einem Radius <1 beschreiben und nach $-\infty$ zurückkehren soll; ausserdem wird angenommen, dass der reelle Teil von x positiv ist. Andererseits wird die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{s^n}$ als verallgemeinerte Riemann'sche Reihe bezeichnet. Die durch diese Reihe bestimmte Function wird für beliebige x und s durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt und mit $\zeta(s, x)$ bezeichnet. Zwischen ζ und χ besteht die Relation

$$e^{-\frac{\pi i}{2}s}\zeta(s, e^{2\pi i x})+e^{\frac{\pi i}{2}s}\zeta(s, e^{-2\pi i x}) = -(2\pi)^s\chi(s, x).$$

Mit Anwendung hiervon werden verschiedene Eigenschaften der Function $\chi(s, x)$ hergeleitet, unter anderem die Reihenentwickelung

$$\chi(s, x) = -\frac{2}{(2\pi)^s}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos\left(2n\pi x-\frac{\pi}{2}s\right)}{n^s},$$

welche für $0\leqq x\leqq 1$, $s>1$ gültig ist. Bdn.

K. Hensel. Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale. I. J. für Math. CIX. 1-42.

Die bisherigen Theorien der algebraischen Functionen erfüllen nicht die Forderung, dass sie sich auf vorgelegte specielle Klassen algebraischer Gebilde anwenden lassen; die vorliegende

Abhandlung thut einen wichtigen Schritt zur Erfüllung dieser Forderung, indem sie ein in der Anwendung nirgends beschränktes Verfahren lehrt, drei verschiedene Arten von Aufgaben durch Herstellung von „Fundamentalsystemen“ zu lösen. Hierbei dient die durchgängige Einführung homogener Variabeln und der Ersatz algebraischer Functionen durch Quotienten homogener algebraischer Formen dem Zwecke, die unendlich fernen Stellen des Gebildes von vorn herein in den Kreis der Untersuchung mit aufzunehmen.

Wenn eine ganze homogene algebraische Form der m^{ten} Dimension η durch eine Gleichung bestimmt wird:

$$\eta^n + A_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + A_2(x_1, x_2)\eta^{n-2} + \cdots + A_n(x_1, x_2) = 0,$$

in welcher der Coefficient A_i eine homogene Form der mi^{ten} Dimension ist, so besteht die erste Aufgabe in der Darstellung aller ganzen homogenen algebraischen Formen des durch jene Gleichung gegebenen Gattungsbereiches durch ein Fundamentalsystem. Geht man von einem beliebigen Systeme von n linear unabhängigen algebraischen Formen aus, so wird die Lösung der Aufgabe abhängig von der vollständigen Auflösung eines Systems von Congruenzen nach Potenzen eines beliebigen Moduls; es ist eines der Hauptresultate der Arbeit, dass dieses Congruenzsystem auf successive Lösung „linearer“ Systeme reducirt werden kann, wenn man Teilbarkeit der Functionen nach „gebrochenen“ Potenzen jenes Moduls einführt. Da die vollständige Lösung eines Systems linearer Congruenzen ohne Schwierigkeit bewerkstelligt werden kann, so kann das ursprüngliche System von n linear unabhängigen algebraischen Formen auf ein anderes reducirt werden, in welchem einer der bei der Darstellung der ganzen Formen möglichen Nenner vertrieben ist, und durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man schliesslich zu einem System ζ_1, $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$, durch welches alle ganzen algebraischen Formen des Bereiches eindeutig in der Form

$$u_1\zeta_1 + u_2\zeta_2 + \cdots + u_n\zeta_n$$

mit homogenen ganzen Formen als Coefficienten dargestellt werden können, und welches somit als Fundamentalsystem der betrachteten Gattung zu bezeichnen ist. Sind die Dimensionen der

Functionen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ resp. $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, so ist das Geschlecht der Gattung durch die Zahl

$$p = \sum_{i=1}^{i=n} \mu_i - (n-1)$$

zu definiren. Ein ganz analoges und nur einfacheres Verfahren ist im Falle der zweiten Aufgabe anzuwenden, in welcher es sich um Herstellung eines Fundamentalsystems für alle diejenigen Formen handelt, welche für einen gegebenen Modul P ganz sind, d. h. welche für keine Nullstelle des Moduls P unendlich werden.

Nächst der Untersuchung der ganzen algebraischen Formen wendet sich der Verfasser zu dem weiteren Gebiete der „Formen erster Gattung". Mit diesem Terminus werden im Hinblick auf die Theorie der algebraischen Integrale diejenigen gebrochenen Formen belegt, welche nach Multiplication mit einer beliebig gewählten Form $P(x_1, x_2)$ für jede Nullstelle der Form P verschwinden. In der Herstellung eines Fundamentalsystems $\bar{\zeta}_1$, $\bar{\zeta}_2, \ldots, \bar{\zeta}_n$ für die Formen erster Gattung besteht die dritte Aufgabe, und zwar ergiebt sich das Resultat, dass dieses Fundamentalsystem mit dem ersten durch die linearen Gleichungen:

$$\zeta_k = \sum_i a_{ik} \bar{\zeta}_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

verbunden ist, worin $a_{ik} = S(\zeta_i \zeta_k)$ und die Summe über alle conjugirten Werte zu erstrecken ist. Hieraus folgt, dass die Dimensionen der Functionen $\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n$ resp. die Zahlen $-\mu_1$, $-\mu_2, \ldots, -\mu_n$ sind.

Ihren Abschluss findet die vorliegende Untersuchung in dem Nachweise, dass ein algebraisches Integral

$$\int \Phi . (x_2 dx_1 - x_1 dx_2)$$

(in welchem die Form Φ von der -2ten Dimension sein muss) dann und nur dann ein algebraisches Integral erster Gattung ist, wenn Φ eine Form erster Gattung ist. Da zufolge der für die Dimensionen der Formen $\bar{\zeta}$ erhaltenen Bestimmung die Formen $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ in der Gleichung ($\zeta_n = 1$):

$$\Phi = \bar{u}_1 \bar{\zeta}_1 + \bar{u}_2 \bar{\zeta}_2 + \cdots + \bar{u}_{n-1} \bar{\zeta}_{n-1} + \bar{u}_n \bar{\zeta}_n$$

resp. die Dimensionen μ_1-2, μ_2-2, ..., $\mu_{n-1}-2$, 0 haben müssen, so folgt leicht, dass die Integrale erster Gattung aus:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}(\mu_i-1) = p$$

linear unabhängigen componirt werden können; die Zahl p ist also wirklich die Anzahl der überall endlichen Integrale.

Das Verfahren zur Herstellung des ersten Fundamentalsystems erfährt in einer späteren Arbeit des Verfassers, über welche im nächsten Bande des Jahrbuchs referirt werden wird, eine Correctur und Vereinfachung. Lsg.

L. W. Thomé. Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen zur Bestimmung des Geschlechts einer beliebigen algebraischen Function. J. für Math. CVIII. 335-341.

Eine algebraische Function z von x sei durch die Gleichung n^{ten} Grades in z

$$f(z, x) = 0$$

definirt, worin unbeschadet der Allgemeinheit der Coefficient von z^n gleich 1 und die anderen Coefficienten als ganze rationale Functionen von x angenommen werden können. Die Gleichung sei ferner nach Angabe in der Abhandlung des Verfassers im Journ. für Math. CIV (F. d. M. XX. 1878. 319) als irreductibel nachgewiesen. Dann wird zunächst nach einem vom Verfasser angegebenen Verfahren eine ganze rationale Function s von z und x hergestellt von der Art, dass die n Zweige von s linear unabhängig sind. Die homogene lineare Differentialgleichung, der diese n Zweige genügen, ist dann offenbar von n^{ter} Ordnung. Diese wird gebildet und für jeden Punkt $x = a$, in welchem sich s verzweigt, die zugehörige determinirende Gleichung aufgestellt; ihre Wurzeln sind von einander verschiedene rationale Zahlen, deren Nenner höchstens gleich n ist. Die Aufsuchung dieser Wurzeln geschieht also durch directe Rechnung. Die Ordnungen der Verzweigungen bei $x = a$ ergeben sich dann nach den in der angeführten Abhandlung aufgestellten Sätzen in einfacher

Weise. Sind diese Ordnungen bekannt, so bestimmt sich das gesuchte Geschlecht p aus der Riemann'schen Formel

$$2(p-1) = w-2n,$$

wo w die Summe der Ordnungen der Verzweigungen bedeutet. Bis auf die Bestimmung der Punkte, in welchen sich s verzweigt (Verschwindungspunkte der Discriminante von $f=0$), sind alle zur Ermittelung von p erforderlichen Operationen durch directe Rechnung ausführbar. Hr.

P. A. Nekrassoff. Ueber den Fuchs'schen Grenzkreis. Math. Ann. XXXVIII. 82-90.

L. Fuchs. Ueber eine Abbildung durch eine rationale Function. J. für Math. CVIII. 181-192.

Herr Fuchs hatte in seinen „Bemerkungen zu der Arbeit im Bande 75" (J. für Math. CVI. 1-4, s. F. d. M. XXII. 1890. 428) seine frühere Regel zur Bestimmung des der gegebenen Function

$$F(w) = \frac{f(w)}{wg(w)}$$

(f und g ganze rationale Functionen, die für $w=0$ nicht verschwinden) zugehörigen Grenzkreises, um auch die Ausnahmefälle zu umfassen, in folgender Weise modificirt: Haben die beiden Gleichungen:

$$\psi(w, w_1) \equiv \frac{F(w)-F(w_1)}{w-w_1} = 0, \quad wF'(w)+w_1F'(w_1) = 0$$

Lösungen (w_1, w), für welche die Moduln von w_1 und w einander gleich sind, und ist der kleinste dieser Moduln kleiner als die Moduln der Wurzeln von $F'(w) = 0$, so ist derselbe der Radius des Grenzkreises.

Gegen diese Regel richtet sich die Kritik des Herrn Nekrassoff, der für die fragliche Bestimmung eine andere Regel aufstellt, wonach man, statt aus den obigen Gleichungen, aus den folgenden:

$$\psi(w, w_1) = 0, \quad wF'(w)+Aw_1F'(w_1) = 0,$$

wo A reell und positiv ist, die Lösungen (w, w_1) mit gleichen Moduln zu suchen und unter diesen die kleinste zu wählen hat.

Es handelt sich also wesentlich darum, ob A von 1 verschieden sein kann. Die Arbeit des Herrn Fuchs bezweckt den Nachweis, dass $A = 1$ sein muss, der auf zwei Arten geführt wird. Hiernach muss eine bei der Kritik des Herrn Nekrassoff auftretende algebraische Gleichung $\xi(a) = 0$ eine Identität darstellen. Es wäre zur völligen Klarstellung der Sache wünschenswert und auch an sich von Interesse, dies direct darzuthun. Hr.

P. Appell. Exemples de fonctions de plusieurs variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières. S. M. F. Bull. XIX. 125-127.

Man setze $t_n = e^{an^2+(x-a)n+y}$, $\theta_n = e^{x+2na}$ und verstehe unter $R(t, \theta)$ eine rationale Function von t und θ, die für $t = 0$ endlich bleibt. Dann befriedigen die Functionen

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} t_n R(t_n, \theta_n), \quad \varphi(x, y) = \prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1 - t_n R(t_n, \theta_n))$$

die Relationen

$$\varphi(x+2\pi i, y) = \varphi(x, y+2\pi i) = \varphi(x+2a, y+x) = \varphi(x, y).$$

Setzt man ferner

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^4+4xn^3+6yn^2+4zn},$$

und bildet die Functionen

$$F(x, y, z) = \prod_{\nu=1}^{\nu=k} \frac{\varphi(x, y, z+\gamma_\nu)}{\varphi(x, y, z+\gamma'_\nu)},$$

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=k} A_\nu \frac{\partial \lg \varphi(x, y, z+\gamma_\nu)}{\partial z},$$

wobei die Constanten A, γ, γ' nur den Bedingungen

$$\Sigma A_\nu = \Sigma(\gamma_\nu - \gamma'_\nu) = 0$$

unterworfen sind, so befriedigen diese Functionen die Relationen:

$$F\left(x + \frac{\pi i}{2}, y, z\right) = F\left(x, y + \frac{\pi i}{2}, z\right) = F\left(x, y, z + \frac{\pi i}{2}\right)$$
$$= F(x+a, y+2x+a, z+3x+3y+a) = F(x, y, z).$$

Die Constante a muss einen negativen reellen Bestandteil besitzen, damit die unendlichen Summen und Producte convergiren.

Hz.

G. Cassel. Öfver en afhandling af H. Weber med titel: „Ein Beitrag zu Poincaré's Theorie der Fuchs'schen Functionen“. Stockh. Akad. Bihang. XVI Afd. I. No. 2. 16 S.

Die Abhandlung von Hrn. Weber (F. d. M. XVIII. 1886. 360) enthält den Nachweis, wie man die Coordinaten einer reellen hyperelliptischen Curve als eindeutige Functionen einer dritten Variable darstellen kann, und zwar wird diese Aufgabe auf diejenige zurückgeführt, eine ganze Ebene conform auf ein ebenes Gebiet abzubilden, welches durch Absonderung gewisser Kreise, deren Anzahl endlich ist, entsteht. Herr Cassel macht eine analoge Untersuchung, indem er die Anzahl jener Kreise unendlich sein lässt; sie sind übrigens folgenden Bedingungen unterworfen: 1) Die Mittelpunkte liegen auf der reellen Axe und bilden eine „abzählbare“ Menge, so dass die Kreise mit C_μ bezeichnet werden können, wo μ alle positiven ganzen Werte durchläuft. 2) Alle C_μ liegen innerhalb eines endlichen Gebietes (was immer durch lineare Substitutionen erlangt werden kann). 3) Alle C_μ liegen ausserhalb einander, und die Doppelverhältnisse der Schnittpunkte zweier auf einander folgenden Kreise mit der reellen Axe haben eine untere, von Null verschiedene Grenze. Mit dieser Abbildungsfrage hängt in der That die eindeutige Darstellung der Coordinaten gewisser transcendenter Curven zusammen.

Bdn.

F. Gomes Teixeira. Extensión de un teorema de Jacobi. Progreso mat. I. 121-125.

Spanische Uebersetzung des Aufsatzes aus den Monatsheften für Math. I. 481 (F. d. M. XXII. 1890. 388). Tx. (Lp.)

O. Henrici. Theory of functions. Nature XLIII. 321-323, 349-352.

Eine ausführliche Besprechung der beiden Bände der Gesammelten Abhandlungen von H. A. Schwarz. Zum besseren Verständnisse für die englischen Leser hat der Verf. in dem

ersten Artikel die Grundbegriffe der Functionentheorie nach Weierstrass und Riemann entwickelt und die Bedeutung des Dirichlet'schen Princips beleuchtet. Lp.

G. Scheffers. Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen. Diss. Leipzig.
Referat in diesem Bande S. 384.

A. Sommerfeld. Die willkürlichen Functionen in der mathematischen Physik. Diss. Königsberg. 8°.
Referat in Abschnitt VII Cap. 2D.

H. Rohr. Ueber die aus fünf Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen. Diss. Marburg. 51 S. 8°. (1890).

Capitel 2.
Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen und der hypergeometrischen Reihen).

Emory McClintock. On independent definitions of the functions $\log x$ und e^x. American J. XIV. 72-86.

Der Verfasser schlägt vor, bei Definition von e^x folgendermassen vorzugehen: man solle zunächst $f_1(x)=\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ und $f_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$ einzeln für sich untersuchen, dann ihre Identität nachweisen. Ebenso solle man für $\log x$ mit $\lim_{h=0}\frac{x^h-1}{h}$ und $x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\cdots$ verfahren. Er nennt das „method of concurrent definition". Bdt.

H. PADÉ. Sur les fractions continues régulières relatives à e^x. C. R. CXII. 712-714.

Im Anschluss an des Verfassers Tableau angenäherter rationaler Functionen (F. d. M. XXII. 1890. 395) und an die Formeln, welche Hr. Hermite im Anfang seiner Abhandlung „Sur la fonction exponentielle“ gegeben hat, werden hier alle für e^x möglichen regulären Kettenbruchentwickelungen mitgeteilt; ihre Anzahl ist 10, bisher bekannt waren nur 5 (zum Teil specielle Fälle) derselben. R. M.

A. KUMAMOTO. A geometrical construction for e^{x+yi}. Tokio Math. Ges. IV. 344-345.

Die bekannte Darstellung durch die logarithmische Spirale wird durch Grenzübergang aus der Potenz $\left(1+\frac{x+yi}{n}\right)^n$ abgeleitet. R. M.

F. J. STUDNIČKA. Ueber die Berechnung der transcendenten Zahl e. Casop. XX. 61. (Böhmisch.)

Unter Zugrundelegung des Euler'schen Kettenbruches

$$F = \frac{1}{2.1}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.5}+\cdots$$

erhält man zunächst

$$e = \frac{1+F}{1-F},$$

und ferner die zur praktischen Verwendung günstige Formel

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1}-\frac{1}{1.7}+\frac{1}{7.71}-\frac{1}{71.1001}+\frac{1}{1001.18089}-\cdots$$

nebst den aus folgendem Schema

2	6	10	14	18	22	.
3	19	193	2721	49171	1084483	.
1	7	71	1001	18089	398959	.
e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	.

sich ergebenden Näherungswerten von e, so dass z. B. schon

$$e_7 = 2.7182818284590458$$

liefert. Auf diese Weise hat Hr. B. Tichánek, Lehramtscandidat, 225 Decimalstellen berechnet, wovon die erste Hälfte mit

$$\begin{aligned} e = 2.71828 \ &18284 \ 59045 \ 23536 \ 02874 \\ 71352 \ &66249 \ 77572 \ 47693 \ 69995 \\ 95749 \ &66967 \ 62772 \ 40766 \ 30353 \\ 54759 \ &45713 \ 82178 \ 52516 \ 64274 \\ 27466 \ &39193 \ 200 \cdots \end{aligned}$$

durch seinen Collegen Hrn. J. Minks auf dem gewöhnlichen Wege kontrollirt wurde. Std.

F. Lucas. Expression du nombre π par une série très convergente. C. R. CXII. 1050-1051.

$$\frac{\pi}{4} = 1-16 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(4m+1)^2(4m+3)^2(4m+5)^2}.$$

Die vier ersten Glieder geben $\pi = 3.1416$. Wz.

F. J. Studnička. Neue Formeln zur Berechnung der Laisantine $[l(1+\sqrt{2})]$. Casop. XX. 66.

Bietet zur Berechnung der Constante Π, welche Hr. Laisant bekanntlich als Analogon des Euler'schen π in die Theorie der Hyperbelfunctionen eingeführt hat, die Reihenformel

$$\Pi = l2 + 4\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{3\alpha^3} + \frac{1}{5\alpha^5} + \cdots\right],$$

wenn l den natürlichen Logarithmus und

$$\alpha = 5+4\sqrt{2}$$

bedeutet, und die Näherungsformel

$$\Pi_n = 2l\,\frac{2^{n+1}+(n)_1 2^{n-1}+(n-1)_2 2^{n-3}+\cdots}{2^n+(n-1)_1 2^{n-2}+(n-2)_2 2^{n-4}+\cdots},$$

welche z. B. für $n=8$ liefert:

$$\Pi_8 = 1.7627468 < \Pi.$$

Std.

Aug. Seydler. Notiz zur Berechnung der Zahl $l(1+\sqrt{2})$. Časop. XX. 89. (Böhmisch.)

Um diese mit $\frac{1}{4}\Pi$ bezeichnete und Laisantine genannte Constante bequem berechnen zu können, leitet der Autor zwei neue Formeln ab, und zwar, wenn die Bezeichnung

$$S(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} + \frac{1}{5u^5} + \cdots$$

eingeführt wird, die einfachere, zweireihige

$$\Pi = 20S(5+4\sqrt{2}) - 8S(33+24\sqrt{2})$$

und die zusammengesetztere fünfreihige

$$\Pi = 122S(33+24\sqrt{2}) - 30S(1158+816\sqrt{2})$$
$$-20S(39201+27720\sqrt{2}) - 20S(449) - 10S(4801),$$

während er mit Hülfe der Formel

$$4\Pi = {}^9/_2 l2 + l3 + l17 + 2S(1331713+941664\sqrt{2})$$

den Wert dieser Constante mit

$$\Pi = 1.7627\ \ 4717\ \ 4039\ \ 0860\ \ 5045$$

auf 20 Decimalstellen genau fixirt. Std.

C. Cailler. Sur la transcendance de „e“. Assoc. Franç. Marseille XX. 83-90.

Der Verfasser geht von der Betrachtung des Integrals

$$P_n = \frac{1}{p^n . n!}\int_x^\infty e^{-z}(z^p - x^p)^n dz$$

aus, mit welchem er sofort die der Function $R_n = e^x P_n$ verbindet. Mit Hülfe der Differentialgleichungen, denen die P_n genügen, gelangt er zu einer recurrirenden Formel für diese Functionen und damit zu einer recurrirenden Entwickelung der R_n, welche ganze Polynome in x sind. Diese R_n stellen die Verhältnisse $\frac{e^{x\alpha}}{e^x}$, $\frac{e^{x\beta}}{e^x}$, ... angenähert dar, wenn α, β, ... die p^{ten} Einheitswurzeln bedeuten. Der Verf. stellt über diese Polynome, welche gewissermassen den Näherungswerten des Lambert'schen Kettenbruchs analog sind, einige Sätze auf und schliesst mit einer

Anzahl negativer Sätze über die Exponentialfunctionen e^x, $e^{x\alpha}$, $e^{x\beta}$, ..., z. B.: Ist $f(z)$ ein ganzes Polynom von z mit ganzzahligen Coefficienten, so ist eine Gleichung von der Form

$$f(1)e^x+f(\alpha)e^{x\alpha}+f(\beta)e^{x\beta}+\cdots+f(\lambda)e^{x\lambda} = 0$$

unmöglich.

Sind a, b, c, d ganze Zahlen, so ist die Gleichung

$$ae^x+be^{-x}+c\cos x+d\sin x = 0$$

unmöglich. Lp.

V. Jamet. Sur le nombre e. Nouv. Ann. (3) X. 215-218.

Durch passende Bestimmung gewisser willkürlicher ganzer Zahlen gelingt es, den Hermite'schen Beweis für die Transcendenz der Zahl e zu vereinfachen. F.

F. J. Studnička. Ueber die Irrationalität der Ludolfine. Časop. XIX. 225. (Böhmisch.)

Enthält eine elementar angelegte Reproduction des von Hrn. Hermite in seinem bekannten „Cours" enthaltenen Beweises, dass π und π^2 „incommensurable" Grössen seien. Std.

V. Puchewicz. Note sur les approximations dans le calcul logarithmique. Nouv. Ann. (3) X. 393-399.

In manchen Büchern der Algebra wird behauptet: Für den Wert einer Zahl, die durch ihren Logarithmus gegeben ist, beträgt die Annäherung $\frac{1}{\varDelta}$, wenn die durch die Tafel gegebene Differenz $\varDelta$ beträgt. Diese Behauptung ist nach der Ansicht des Verfassers nicht zutreffend, weil für den durch die Tafel gegebenen Wert des Logarithmus die Annäherung selbst nur $\frac{1}{2}$ der letzten Stelle beträgt; er berechnet für eine mittels ihres Logarithmus gefundene Zahl die Annäherung, wenn diese für den Logarithmus gegeben ist. Wz.

Ch. Méray. Théorie analytique du logarithme népérien et de la fonction exponentielle. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

F. J. Studnička. Ueber das Verhältnis der goniometrischen Functionen zu gewissen algebraischen Ausdrücken. Casop. XIX. 249. (Böhmisch.)

In seiner Schrift, betitelt „Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques" geht Lucas von den beiden Ausdrücken

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n$$

aus, um schliesslich zu den Grundformeln der Goniometrie zu gelangen. Hier wird nun eine modificirte, bedeutend abgekürzte Reproduction dieses Ganges geboten. Std.

C. Juel. Et analytisk Bevis for de trigonometriske Funktioners Additionstheorem. Nyt Tidss. for Math. II B. 31-32.

Analytisch-geometrischer Beweis für das trigonometrische Additionstheorem. V.

C. Juel. Om Graendsevaerdien af x^n. Nyt Tidss. for Math. II A. 137-138.

Ueber den Grenzwert von x^n. V.

C. A. Laisant. Quelques formules relatives aux fonctions hyperboliques. S. M. F. Bull. XIX. 52-54.

Besteht zwischen den Veränderlichen x und y die Gleichung $\sin x = \mathrm{Th}\, y$, so heisst x die „hyperbolische Amplitude" von y und y die „Länge" von x. Durch leichte Umformung der Gleichung $\sin x = \mathrm{Th}\, y$ und nachherige Differentiation ergiebt sich

$$\int \frac{dx}{\cos x} = y, \quad \int \frac{dy}{\mathrm{Ch}\, y} = x.$$

Die Werte einiger anderer einfachen Integrale von trigonometrischen und hyperbolischen Functionen findet man auf ähnliche Weise. Hz.

W. Burnside. Note on the addition theorem for hyperbolic functions. Mess. (2) XX. 145-148.

Indem der Verfasser den hyperbolischen Sinus und Cosinus einer Zahl θ als die Ordinate und Abscisse eines Punktes P der gleichseitigen Hyperbel mit der halben Hauptaxe $OA = 1$ definirt, während der Sector POA gleich $\frac{1}{2}\theta$ ist, leitet er auf möglichst elementare Weise aus der Figur die Additionstheoreme für $\sinh(\alpha+\beta)$ und $\cosh(\alpha+\beta)$ her. Lp.

G. Teixeira. Extrait d'une lettre à M. Rouché. Nouv. Ann. (3) X. 312-317.

In einer Note „Sur la formule de Stirling" (C. R. CX. 513. 1890) beweist Hr. Rouché auf sehr einfache Weise die Formel

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\Theta p}{12(n+p)n}},$$

worin Θ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeutet und

$$\varphi(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}$$

ist; aus dieser Formel leitet er dann die Stirling'sche Formel ab, setzt jedoch bei seinen Entwickelungen n als ganze positive Zahl voraus. Der Verfasser erweitert diese Untersuchungen auf ein beliebiges, rationales oder irrationales n. Wbg.

J. B. W. V. Jensen. Gammafunctionernes Theori i elementaer Fremstilling III. Nyt Tidss. for Math. IIB. 33-56, 57-72, 83-85.

Der Verfasser giebt eine kurze, aber ziemlich vollständige Theorie der Gammafunctionen, indem er sich ausschliesslich auf die Grundlage der Functionentheorie stützt, das soll heissen auf denjenigen Teil der Theorie der unendlichen Producte und

Potenzreihen, welcher sich ohne Anwendung von Differential- und Integralrechnung entwickeln lässt. Daher werden die Integralausdrücke der Gammafunctionen gar nicht berücksichtigt. Zugleich werden die Haupteigenschaften der mit den Gammafunctionen verwandten Functionen (die Prym'schen Functionen u. s. w.) behandelt.

Als Ausgangspunkt für seine Theorie benutzt der Verfasser die Eigenschaft, dass die Γ-Functionen die Gleichung

$$f(s+1) = s \, . \, f(s)$$

befriedigen sollen; er zeigt aber, dass sie hierdurch nicht vollständig bestimmt sind. Die Γ-Function wird dann vollständig dadurch definirt, dass festgesetzt wird, die folgenden beiden Gleichungen sollen auf einmal stattfinden:

$$(1) \qquad \Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{s\cdot(s+1)\cdots(s+n)},$$

$$(2) \qquad \lim \frac{\Gamma(s+n)}{[n-1]n^s} = 1,$$

wo n eine ganze Zahl ist, während s alle möglichen reellen und complexen Werte annehmen kann. Es wird gezeigt, dass in allen Fällen die Γ-Function durch diese beiden Gleichungen eindeutig und vollständig definirt ist, indem $n^s = e^{sln}$, wo ln reell und positiv ist.

Der Verfasser findet den folgenden Ausdruck für $\Gamma(s)$:

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_1^\infty \frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^s}{1+\frac{s}{\nu}},$$

welcher ursprünglich von Euler angegeben ist. In diesem Falle, wie in allen anderen, wird angeführt, wer ursprünglich die Ausdrücke gefunden hat.

Danach werden die wesentlichsten Eigenschaften der Γ-Functionen entwickelt, zunächst dass $1/\Gamma(s)$ eine ganze transcendente Function ist mit den Nullstellen erster Ordnung 0, -1, -2, ... Infolge dessen hat man die Euler'sche Gleichung

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

und die Gauss'sche Gleichung:

$$\Gamma(s)\Gamma(s+\tfrac{1}{2})\ldots\Gamma\left(s+\frac{h-1}{h}\right)=h^{\frac{1}{2}-hs}(s\pi)^{\frac{h-1}{2}}\Gamma(hs).$$

Darauf folgen einige Anwendungen zur Bestimmung einiger unendlichen Producte.

Es wird jetzt die Reihenentwickelung für $l\Gamma(s)$ gegeben, und die Gudermann'sche Function

$$\omega(s) = \sum_0^\infty\left[(s+\nu+\tfrac{1}{2})l\,\frac{s+\nu+1}{s+\nu}-1\right]$$

wird definirt.

Die Grenzwerte für $\Gamma(s)$ und $\omega(s)$ werden untersucht, und der Satz wird bewiesen, dass

$$l\Gamma(s) = (s-\tfrac{1}{2})ls-s+l\sqrt{2\pi}+\frac{\theta}{12s},$$

wenn s reell und positiv, ausserdem $0<\theta<1$.

Von $\omega(s)$ wird die gleichmässige Convergenz gegen 0 gezeigt, falls die Entfernung zwischen s und dem nächsten Punkte der negativen reellen Axe ins Unendliche wächst. Wenn s auf die eben angegebene Weise wächst, hat man

$$\lim_{|s|=\infty}\frac{\Gamma(s)}{s^{s-\frac{1}{2}}e^{-s}\sqrt{2\pi}} = 1.$$

Danach wird die Function

$$\psi(s) = \lim_{n=\infty}\left(ln-\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\cdots-\frac{1}{s+n-1}\right)$$

definirt, von welcher gezeigt wird, dass sie in den Punkten 0, -1, -2, ... unendlich von der ersten Ordnung ist, in allen anderen Punkten sich aber regulär verhält. Mittels der Function $\psi_n(s)$ können Reihen von der Form

$$\Sigma(F(s+\nu)-F(t+\nu))$$

summirt werden, wenn

$$F(s) = \frac{as^{n-1}+bs^{n-2}+\cdots+l}{s^n+\alpha s^{n-1}+\cdots+\lambda}.$$

Wenn s, wie oben, ins Unendliche wächst, hat man

$$\lim_{|s|=\infty}[\Psi(s)-l(s)] = 0,$$

und es wird gezeigt, wie man diese Gleichung zu einer ange-

näherten Berechnung der Wurzeln der Gleichung $\psi(s) = 0$ verwenden kann.

Wenn $\frac{p}{q}$ rational, reell und kleiner als eins ist, wird untersucht, wie man $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$ mittels Logarithmen ausdrücken kann, und eine kleine Tafel solcher Werte wird mitgegeben.

Danach werden die Prym'schen Functionen $P(s)$ und $Q(s)$ eingeführt, indem

$$P(s) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{[\nu](\nu+s)}$$

und

$$\Gamma(s) = P(s)+Q(s),$$

wo $Q(s)$ eine ganze transcendente Function von s ist. Es ergiebt sich, dass $P(s)$ vollständig durch die Gleichungen

$$P(s+1) = sP(s)-e^{-1}$$

und

$$\lim_{n=\infty} \frac{P(n+s)}{[n-1]n^s} = 0$$

definirt ist, während $Q(s)$ durch die Gleichungen

$$Q(s+1) = sQ(s)+e^{-1}$$

und

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q(n+s)}{[n-1]n^s} = 1$$

erklärt wird. Es wird bewiesen, dass man auch den folgenden Ausdruck für $P(s)$ hat:

$$P(s) = e^{-1}\sum_1^\infty \frac{1}{s(s+1)\ldots(s+\nu-1)},$$

welcher von Bourguet herrührt.

Es folgt die Lösung der Fundamentalgleichung

$$f(s+1) = sf(s)-R(s),$$

wo $R(s)$ eine ganze rationale Function ist. Diese Gleichung ist von Lindhagen behandelt worden, doch ist seine Lösung nicht in expliciter Form gegeben. Herr Jensen giebt dieselbe in folgender Gestalt:

Wenn
$R(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s(s-1) + \cdots + a_m s(s-1)(s-2)\ldots(s-m+1)$,
und wenn man eine Function, welche die Fundamentalgleichung befriedigt, $S(s)$ nennt, so hat man

$$S(s) = K\Gamma(s) + eP(s)\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu + \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \sum_{\nu=1}^{\mu}(s-1)(s-2)\ldots(s-\mu+\nu),$$

wo K eine willkürliche Constante ist.

Danach werden die Wurzeln von $P(s) = 0$ untersucht, und es wird, wie Bourguet früher nachgewiesen hat, gezeigt, dass $P(s) = 0$ wenigstens eine Wurzel in jedem der folgenden Intervalle hat, nämlich $\left(-\frac{11}{2}, -5\right)$, $\left(-6, -\frac{11}{2}\right)$, $\left(-\frac{15}{2}, -7\right)$, $\left(-8, -\frac{15}{2}\right)$, ... und keine Wurzel ausserhalb dieser Intervalle. Dagegen wird die Untersuchung nicht erledigt, ob die Function innerhalb dieser Intervalle mehrere Wurzeln hat, oder ob sie, wie Bourguet meint, 4 imaginäre Wurzeln hat, was der Verf. in einer späteren Abhandlung zu erforschen beabsichtigt. Ebenso wird nicht untersucht, ob die Gleichung $\Phi(s) = 0$ Wurzeln hat. Es darf bemerkt werden, dass der Verf. die letzte Frage in einem Vortrag in dem Kopenhagener mathematischen Verein beantwortet und die Wurzeln angenähert berechnet hat.

Danach wird gelehrt, wie man verschiedene in der Abhandlung vorkommende Functionen wirklich nach ganzen Potenzen der unabhängigen Variabeln entwickeln kann, und wie man die Coefficienten in diesen Reihen berechnet. Zum Schluss wird gezeigt, wie man verschiedene der vorkommenden Functionen in Facultätenreihen entwickeln kann.

Wenn diese Abhandlung, obschon sie nur wenige neue Resultate enthält, etwas ausführlicher besprochen ist, so ist dies geschehen, weil sie in kurzer Darstellung eine ungemeine Fülle von Resultaten giebt, und weil die Darstellung einerseits elegant und sehr genau, andererseits aber doch übersichtlich ist, so dass ich glaube, dass es wert ist, die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf diese Abhandlung hinzulenken. V.

V. Ciani. Sopra una classe di funzioni analoghe alle funzioni euleriane. Batt. G. XXIX. 68-86.

Die hier betrachtete Verallgemeinerung der Euler'schen Γ-Function ist im wesentlichen dieselbe, die Hr. Appell (Math. Ann. XIX, cf. F. d. M. XIII. 1881. 388) und Hr. Pincherle (C. R. CVI. F. d. M. XX. 1888. 427) untersucht haben. Unter $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ Constanten verstanden, bilde man das Grössensystem

$$\pi = m_1\pi_1 + m_2\pi_2 + \cdots + m_n\pi_n,$$

wo $m_1, m_2, \ldots, m_n$ unabhängig von einander die Zahlenreihe 0, 1, 2, 3, ... durchlaufen, die eine Combination

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 0$$

ausgeschlossen. Der Verfasser stellt zunächst die Bedingung dafür auf, dass die in der complexen Zahlenebene dargestellten Grössen π ein Punktsystem bilden, von welchem in jedes endliche Gebiet der Ebene nur eine endliche Anzahl von Punkten fallen. Die Bedingung lässt sich am einfachsten dahin aussprechen, dass die Punkte $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ auf einer und derselben Seite einer passend durch den Nullpunkt gelegten Geraden liegen müssen. Ist diese Bedingung erfüllt, so convergirt die Summe $\sum\limits_{m_1, m_2, \ldots, m_n}' \frac{1}{\pi^p}$ $(p > n)$ absolut, und nach einem grundlegenden Satze von Hrn. Weierstrass stellt das Product

$$S(z|\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) = z\Pi\left\{\left(1-\frac{z}{\pi}\right)e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{\pi}\right)^k}\right\}$$

eine ganze transcendente Function von z dar. Der Verfasser stellt schliesslich den Logarithmus dieser Function, die offenbar eine Verallgemeinerung des reciproken Wertes der Function $\Gamma(z)$ ist, in Form eines bestimmten Integrales dar. Hz.

F. G. Teixeira. Sobre a representação da funcção $\log\Gamma(x)$ por um integral definido. Progreso mat. I. 185-187.

Der Verf. giebt einen Beweis für die Cauchy'sche Formel

$$\log\Gamma(x) = \int_0^1\left[\frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x + 1\right]\frac{dt}{\log t}.$$

Tx. (Lp.)

C. F. GAUSS. General examination of the infinite series

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots.$$

Tokio Math. Ges. IV. 126-170, 220-248.

Englische Uebersetzung der Gauss'schen Abhandlungen über die hypergeometrische Reihe, geliefert durch Hrn. D. Kikuchi.

Lp.

E. E. KUMMER. On the hypergeometric series

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots.$$

Tokio Math. Ges. IV. 276-325, 353-405.

Aus J. für Math. XV. 39-83, 127-172 ins Englische übersetzt von Hrn. H. Nagaoka. Lp.

J. THOMAE. Einige Beziehungen zwischen höheren hypergeometrischen Reihen. Leipz. Ber. XLIII. 459-480.

Es handelt sich in der vorliegenden Mitteilung um gewisse Beziehungen, die zwischen den Lösungen verschiedener homogener linearer Differentialgleichungen bestehen. Da die explicite Wiedergabe dieser Beziehungen die Grenze eines Referates überschreiten würde, so möge es genügen, das allgemeine Princip anzugeben, aus welchem die Beziehungen entspringen, und die Differentialgleichungen zu erwähnen, auf die der Verfasser dieses Princip anwendet. Das allgemeine Princip ist das folgende: Es seien $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1)\qquad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0,$$

wo $a_0, a_1, \ldots, a_n$ Functionen der unabhängigen Variable z sind. Ferner seien $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ die Determinanten der Matrize

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \dots, & y_n \\ y'_1, & y'_2, & \dots, & y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(k)}, & y_2^{(k)}, & \dots, & y_n^{(k)} \end{vmatrix} \qquad (k \leqq n).$$

Dann sind diese Determinanten die Lösungen einer Differentialgleichung

$$(2) \qquad b_0 Y^{(r)} + b_1 Y^{(r-1)} + \dots + b_r Y = 0,$$

deren Coefficienten $b_0, b_1, \dots, b_r$ sich durch die Coefficienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ ausdrücken. Die Differentialgleichungen, auf welche der Verfasser dieses Princip anwendet, sind von der Form:

$$(1-z)\frac{d^n y}{d\zeta^n} + (c_1 + d_1 z)\frac{d^{n-1}y}{d\zeta^{n-1}} + \dots + (c_n + d_n z).y = 0$$

$$(n = 3, 4),$$

$$(1-z)^2\frac{d^3y}{d\zeta^3} + (1-z)(c_1 + d_1 z)\frac{d^2y}{d\zeta^2} + (c_2 + d_2 z + e_2 z^2)\frac{dy}{d\zeta}$$
$$+ (c_3 + d_3 z + e_3 z^2)y = 0.$$

Dabei ist zur Abkürzung $\lg z = \zeta$ gesetzt, und die Grössen c, d, e bedeuten Constanten. Hz.

L. Gegenbauer. Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe. Wien. Ber. C. 225-244.

Der Verfasser betrachtet die ganze Function n^{ten} Grades von x, welche der Differentialgleichung

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)y'' - \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b} - \frac{r}{ab}x\right)y' - \frac{n}{ab}(r+n-1)y = 0$$

genügt. Für die Discriminante dieser Function giebt er eine Darstellung durch den Quotienten zweier Producte, deren einzelne Factoren sich in einfacher Weise aus a, b, p, q, r, n zusammensetzen. Der in dieser Darstellung enthaltene Satz umfasst als specielle Fälle die Sätze, welche die Herren Stieltjes, Posse, Hilbert und Halphen über die Discriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe aufgestellt haben. Der zweite Teil der Note enthält einen neuen Beweis für den Klein'schen Satz über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.

Dieser Beweis beruht auf der leicht zu erhärtenden Formel

$$A = \tfrac{1}{2}\text{sign}\{f(x_2)f'(x_2)\} - \tfrac{1}{2}\text{sign}\{f(x_1)f'(x_1)\} - \Sigma\text{sign}\{f(\xi)f''(\xi)\},$$

wo A die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ bedeutet, die zwischen x_1 und x_2 liegen, und die Summe sich auf alle zwischen x_1 und x_2 liegenden Nullstellen ξ von $f'(x)$ bezieht. Hz.

L. Gegenbauer. Ueber die Wurzeln der hypergeometrischen Reihe. Monatsh. f. Math. II. 125-130.

Der Beweis des Klein'schen Satzes über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe, welchen der Verfasser in einer früheren Arbeit (vgl. das vorstehende Referat) veröffentlicht hat, wird hier durch einen einfacheren ersetzt, wobei der Satz selbst in der Form zu Grunde gelegt wird, in welcher ihn Referent in einer in den Göttinger Nachrichten erschienenen Note bewiesen hat. Hz.

L. Saalschütz. Ueber einen Specialfall der hypergeometrischen Reihe dritter Ordnung. Schlömilch Z. XXXVI. 278-295, 321-327.

Der Verfasser entwickelt zunächst einen neuen Beweis für die schon früher von demselben aufgestellte Summenformel

$$1-(n)_1\frac{x(y+v+n-1)}{y(x+v)}+(n)_2\frac{x(x+1)(y+v+n-1)(y+v+n)}{y(y+1)(x+v)(x+v+1)} \mp \cdots = \frac{\Gamma(y)\Gamma(y-x+n)}{\Gamma(y-x)\Gamma(y+n)}\cdot\frac{\Gamma(x+v)\Gamma(v+n)}{\Gamma(v)\Gamma(x+v+n)}.$$

Wird die linke Seite dieser Formel als Function ihrer Argumente mit $f_n(x, y, v)$ bezeichnet, so gilt die Recursionsformel

$$f_n(x, y, v) = \frac{(y-x+n-1)(x+v+n)}{(y-x-1)(x+v)}f_n(x+1, y, v) + \frac{\Gamma(y)\Gamma(x+v)}{(y-x-1)\Gamma(-n)\Gamma(x+1)\Gamma(y+v+n-1)},$$

deren wiederholte Anwendung die Ableitung der folgenden Formel ermöglicht:

$$f_n(x, y, v) = \frac{\Gamma(1+x-y)\Gamma(x+v)\Gamma(y)\Gamma(1-v)}{\Gamma(1+x-n-y)\Gamma(x+v+n)\Gamma(y+n)\Gamma(1-v-n)}$$
$$-\frac{1}{x+1-y}\cdot\frac{\Gamma(y)\Gamma(x+v)}{\Gamma(-n)\Gamma(x+1)\Gamma(y+v+n-1)}$$
$$\times\left\{1+\frac{(x+1-n-y)(x+v+n)}{(x+1)(x+2-y)}+\cdots\right\}, \qquad (1-v>0$$

Hieran schliessen sich noch weitere, die Function f_n darstellende Reihen von ähnlicher Gestalt, aber mit anderen Convergenzbedingungen. Dieselben werden im folgenden auf zweifache Weise zur Anwendung gebracht: erstens indem man die Variabeln oder gewisse lineare Verbindungen derselben derart als ganze Zahlen einsetzt, dass f_n ein geschlossener Ausdruck wird, und zweitens: indem man die auf der rechten Seite dieser Formeln stehenden Reihen mit einander vergleicht. Die erhaltenen Identitäten werden durch Einsetzen specieller Zahlenwerte illustrirt. Ht.

A. Hurwitz. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Math. Ann. XXXVIII. 452-458.

Ein Abdruck der in F. d. M. XXII. 1890. 446 besprochenen Abhandlung. Ht.

M. Lerch. Déduction nouvelle de la formule de Legendre. Prag. Akad. Verh. I_2. 159-165. (Böhmisch mit französischem Resumé.)

Der Verfasser transformirt das Integral

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\, e^{a i\varphi}(1-2a\cos\varphi+a^2)^{\beta-1}d\varphi$$

durch die Substitution $e^{i\varphi}=t$ unter der Voraussetzung, dass $f(t)$ innerhalb des Kreises $|t|=1$ nur einfache, von Null verschiedene Pole hat. Setzt man in der allgemeinen so erhaltenen Formel $f(t)=t^n$, $\alpha=0$, so folgt:

$$(1)\qquad \int_0^{\pi}\cos(n\varphi).(1-2a\cos\varphi+a^2)^{\beta-1}d\varphi$$
$$=\sin(\beta\pi)\int_0^a t^{n-\beta}(a-t)^{\beta-1}(1-at)^{\beta-1}dt,$$

eine Formel, die für $\beta = \frac{1}{2}$ in die Legendre'sche Formel

$$(2) \qquad \int_0^\pi \frac{\cos(nx)dx}{\sqrt{1-2a\cos x + a^2}} = a^n \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x\, dx}{\sqrt{1-a^2\sin^2 x}}$$

übergeht. Aus (1) wird ferner eine andere Formel hergeleitet, die für $s = \frac{1}{2}$ das Resultat giebt:

$$\int_0^1 \frac{(1-a^2t^2)dt}{(1-2abt+a^2t^2)\sqrt{t(1-t)(1-a^2t)}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-2ab+a^2}}.$$

Wn.

B. Elliptische Functionen.

H. WEBER. **Elliptische Functionen und algebraische Zahlen.** Braunschweig. Vieweg u. Sohn. XIII + 504 S. 8°.

Das vorliegende Werk giebt zum ersten Male eine zusammenfassende Darstellung der Beziehungen, welche zwischen den elliptischen Functionen und der Algebra und Zahlentheorie bestehen und, nachdem Abel und Jacobi, Hermite und Kronecker Bahn gebrochen hatten, Gegenstand einer umfangreichen und interessanten Litteratur geworden sind. Es bildet so eine wertvolle Ergänzung zu Halphen's leider unvollendet gebliebenem Traité des fonctions elliptiques.

Der erste „analytische" Teil bringt eine Theorie der elliptischen Functionen, welche alles Wesentliche für den Gebrauch dieser Functionen enthält, und im besonderen die Hülfsmittel liefert, welche die Untersuchungen des zweiten „algebraischen" und des dritten „zahlentheoretischen" Teils erfordern.

Der Verfasser beginnt mit der Betrachtung der elliptischen Integrale, leitet in einfacher Weise die bekannten Normalformen her und lehrt die Zerlegung in Integrale der drei Gattungen; hier findet schon das Jacobi'sche Transformationsproblem seine Stelle, und die Begriffe der Modular und Multiplicatorgleichungen treten auf. Die Mittel zur Darstellung und Untersuchung der elliptischen Functionen, welche zunächst durch die Umkehrung des elliptischen Integrals erster Gattung definirt werden, gewährt

die Einführung der ϑ-Functionen. Ihre Theorie wird auf die Betrachtung der allgemeineren T-Functionen basirt, welche einen besonderen Fall der doppelt-periodischen Functionen dritter Art bilden, indem sie den Bedingungsgleichungen genügen:

$$T(u+\omega_1) = e^{-\pi i[a_1(2u+\omega_1)+b_1]} \,.\, T(u),$$
$$T(u+\omega_2) = e^{-\pi i[a_2(2u+\omega_2)+b_2]} \,.\, T(u).$$

Bei der Productdarstellung der ϑ-Functionen werden die vier Functionen des Periodenverhältnisses ω eingeführt:

$$\begin{aligned} \eta(\omega) &= q^{\frac{1}{12}}\, \Pi(1-q^{2n}), \\ f(\omega) &= q^{-\frac{1}{24}} \Pi(1+q^{2n-1}), \\ f_1(\omega) &= q^{-\frac{1}{24}} \Pi(1-q^{2n-1}), \\ f_2(\omega) &= \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \Pi(1+q^{2n}), \end{aligned} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

welche später für die algebraische Theorie der Transformation wie für die zahlentheoretischen Anwendungen grosse Bedeutung gewinnen. Nachdem noch die Transformationen der ϑ-Functionen ausführlich behandelt und im besonderen bei der Untersuchung der linearen Transformation die Weierstrass'sche σ-Function durch ihre Invarianteneigenschaft eingeführt worden ist, werden die elementaren Eigenschaften der elliptischen Functionen abgeleitet. Die Betrachtung der Modulfunctionen bringt endlich die Lösung des Umkehrproblems zum Abschluss.

Einen Anhang zum ersten Teil bilden zwei Anwendungen der elliptischen Functionen, eine geometrische: die Bestimmung der Oberfläche des dreiaxigen Ellipsoïds, und eine mechanische: die Theorie der Rotation eines festen Körpers um seinen Schwerpunkt.

Den zweiten algebraischen Teil eröffnet ein einleitendes Capitel, in welchem die algebraischen Voraussetzungen entwickelt werden. Die elementaren Sätze über endliche Gruppen, der Begriff der Abel'schen Gruppen, die Begriffe eines algebraischen Körpers, der Galois'schen Gruppe einer Gleichung und der Galois'schen Resolvente, die wesentlichen Eigenschaften der Abel'schen Gleichungen, die wichtigsten Sätze über ganze algebraische Zahlen und über ganze algebraische Functionen einer Veränderlichen, das alles wird auf wenigen Seiten sehr klar

dargestellt. Es folgt die Theorie der Multiplication und Teilung der elliptischen Functionen, welche zum Studium der Teilungsgleichungen für die Perioden und ihrer Galois'schen Gruppe führt. Hiermit ist der Uebergang zur Theorie der Transformationsgleichungen gegeben, von denen die Modular- und die Multiplicatorgleichungen besondere Fälle sind. Es handelt sich jetzt einmal um die wirkliche Aufstellung von Transformationsgleichungen, wobei die Arbeiten von Joubert, Kiepert, Klein, Schläfli und von Herrn Weber selbst die Grundlage bilden, und dann um die Untersuchung der zugehörigen Galois'schen Gruppe, welche bei Transformationsgleichungen für einen Primzahlgrad durchgeführt wird und in Galois' berühmtem Satze über die Erniedrigung des Grades der Modulargleichungen gipfelt. Den Schluss des Abschnittes bildet die eingehende Behandlung der Transformation fünften Grades, welche zur Auflösung der Gleichungen fünften Grades führt.

Der Ausgangspunkt des dritten zahlentheoretischen Teils ist die complexe Multiplication der elliptischen Functionen; hier sind Kronecker's Arbeiten von massgebendem Einflusse gewesen. Es zeigt sich zunächst, dass complexe Multiplication nur stattfinden kann, wenn das Periodenverhältnis ω einer ganzzahligen quadratischen Gleichung mit negativer Determinante:

$$A\omega^2 + B\omega + C = 0$$

genügt. Weiter ergiebt sich, dass jeder complexen Multiplication eine Klasse quadratischer Formen:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

zugeordnet ist, und dass die zu einer Determinante $D = B^2 - 4AC$ gehörigen Werte der absoluten Invariante $j(\omega)$, welche passend „Klasseninvarianten“ genannt werden, einer ganzzahligen Gleichung genügen, deren Grad gleich der zur Determinante D gehörigen Klassenanzahl ist; statt der Klasseninvariante $j(\omega)$ kann man ebenso gut eine primitive Zahl des zugehörigen algebraischen Körpers nehmen, welche ebenfalls als Klasseninvariante bezeichnet wird und einer „Klassengleichung“ genügt. Nunmehr geht der Verfasser über zur Berechnung von Klasseninvarianten, welche sich mit Hülfe der Ergebnisse des zweiten Abschnittes

in grossem Umfange durchführen lässt; ein Verzeichnis von Rechnungsresultaten ist dem Werke als Anhang beigegeben. Nachdem dann für den einfachsten Fall die Kronecker'sche Relation zwischen Klassenanzahlen hergeleitet ist, wird die Zerlegung der Klassengleichungen in Factoren behandelt, welche den Geschlechtern der Formklassen entsprechen. Mit Hülfe der Composition der quadratischen Formen wird die Galois'sche Gruppe der Klassengleichungen studirt und der Satz gewonnen, dass sie bei Adjunction der Quadratwurzel aus der Determinante der quadratischen Form Abel'sche Gleichungen sind, also, was schon Abel als Vermutung ausgesprochen hatte, durch Wurzelzeichen aufgelöst werden können. Die Irreducibilität der Klassengleichungen nachzuweisen gelingt aber erst, indem die Zerlegung der Zahlen eines algebraischen Körpers in die dem Körper angehörigen Primfactoren hinzugenommen wird. Hierauf wird Kronecker's merkwürdige Grenzformel für den Ausdruck

$$\sum_{x,y}(Ax^2+Bxy+Cy^2)^{-\varrho-1}-\frac{\pi}{\varrho\sqrt{-D}}$$

hergeleitet und zur Untersuchung der Normen von Klasseninvarianten benutzt. Das letzte Capitel ist der Teilung der elliptischen Functionen mit singulären Moduln gewidmet. St.

P. M. Pokrowsky. Kurze Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen. (Antrittsvorlesung, gehalten 10./22. September 1891.) Kiew Univ. Nachr. 1891. No. 9. 1-10. (Russisch.)

Am einfacheren Beispiele der trigonometrischen Functionen zeigt der Verfasser, wie die wichtigsten Eigenschaften dieser Functionen vermittelst des Integralausdrucks dargethan werden können, um dann die so gewonnenen Begriffe auf den Fall der elliptischen und Abel'schen Functionen anzuwenden und damit einen Ueberblick über den allgemeinen Ideengang in dieser Theorie zu geben. Si.

A. L. Baker. Elliptic functions. New York.

W. Scheibner. Ueber einige allgemeine Formen des elliptischen Differentials. Leipz. Ber. XLIII. 575-584.

Dass das zu der Curve dritter Ordnung $f(x, y) = 0$ gehörige Integral:

$$\int \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

sich in ein elliptisches Integral erster Gattung umwandeln lässt, hat Aronhold (Berliner Monatsberichte 1861) „durch kunstvolle, auf seine Invariantentheorie der ternären kubischen Formen gegründete Transformationen hergeleitet“. Herr Scheibner zeigt nun, dass man diese Zurückführung auch durch einfache directe Rechnung bewirken kann. Ein entsprechender Satz gilt für Raumcurven vierter Ordnung erster Species; das zugehörige Integral wird ebenfalls durch directe Rechnung in ein elliptisches übergeführt. St.

F. Brioschi. Sur la réduction de l'intégrale hyperelliptique à l'elliptique par une transformation du troisième degré. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VIII. 227-230.

Die Bedingungsgleichung dafür, dass ein hyperelliptisches Integral erster Gattung durch eine Transformation dritter Ordnung in ein elliptisches Integral übergeführt werden kann, hatte Herr Goursat (F. d. M. XVII. 1885. 466) in irrationaler Form angegeben, und es war dann Herrn Burkhardt (F. d. M. XXII. 1890. 488ff.) die Darstellung in rationaler Form gelungen. Herr Brioschi leitet Burkhardt's Bedingungsgleichung auf eine neue Art ab. St.

F. Brioschi. Sopra alcune formole ellittiche. Torino Atti XXVI. 586-595.

Es wird eine Reihe von Formeln entwickelt, welche die Transformation des elliptischen Integrals erster Gattung:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A_0x^4+4A_1x^3+6A_2x^2+4A_3x+A_4}}$$

auf die Weierstrass'sche Normalform:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}$$

mittels der linearen Substitution:

$$x = a_0 + \frac{l}{s-m}$$

betreffen; a_0 bedeutet eine Wurzel des Radicanden im Nenner.

St.

Bougaieff. Complément à un problème d'Abel. C. R. CXIII. 1025-1028.

Nach Abel kann das elliptische Integral:

$$\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{R}}$$

unter Umständen durch:

$$\frac{1}{m}\log\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$$

dargestellt werden; dabei sind p und q ganze rationale Functionen von x ohne gemeinschaftlichen Teiler, und ist q vom Grade λ, so ist p vom Grade $\lambda+2$ und $m=2(\lambda+2)$. Der Verfasser hat gefunden, dass die Bedingung, unter welcher eine solche Reduction möglich ist, in dem Verschwinden einer symmetrischen Determinante von $(\lambda+1)^2$ Elementen besteht, welche aus den Coefficienten von:

$$R = p_0x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4$$

durch einen symbolischen Differentiationsprocess zu gewinnen sind. Als Beispiel dient das Integral

$$\int \frac{(x+\frac{1}{2})dx}{\sqrt{x^4-2x^3-x}},$$

bei welchem $\lambda = 2$ ist.

St.

Ch. Hermite. Sur une formule de Jacobi concernant l'intégrale elliptique à module imaginaire. Hamb. Mitt. III. 22-24.

Herr Heymann (F. d. M. XX. 1888. 447) hat die berühmte

Gleichung Jacobi's, welche das elliptische Integral erster Gattung mit complexem Modul mittels zweier hyperelliptischen Integrale des Ranges zwei mit reellen Moduln ausdrückt, durch eine erheblich einfachere ersetzt. Herr Hermite zeigt nun, dass die Gleichung Heymann's ein besonderer Fall einer allgemeineren ist, zu der man gelangt, wenn man das Integral

$$\int \frac{U}{\sqrt{X}} \frac{dx}{\sqrt{x-a-ib}}$$

betrachtet, in welchem U eine rationale Function von x und X ein Polynom n^{ten} Grades von x mit reellen Coefficienten bezeichnet. Macht man nämlich die Substitution:

$$x-a = b\frac{t^2-1}{2t},$$

so ist:

$$\frac{dx}{\sqrt{x-a-ib}} = -\sqrt{\frac{b}{2}}\cdot\frac{(t+i)dt}{t\sqrt{t}},$$

woraus sich sofort die Zerlegung des Integrals in den reellen und rein imaginären Teil ergiebt. St.

S. Pincherle. Un sistema d'integrali ellittici considerati come funzioni dell'invariante assoluto. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII$_1$. 74-80.

Bekanntlich bilden die Kugelfunctionen erster Art, welche durch die Entwickelung

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(x)t^n$$

definirt werden, ein System von Functionen, zwischen denen die recurrenten Relationen zweiter Ordnung:

$$(n+1)P^{(n+1)}-(2n+1)xP^{(n)}+nP^{(n-1)} = 0$$

bestehen. Der Verfasser zeigt, dass durch die Entwickelung:

$$(1-3xt+t^3)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

ein System ganzer rationaler Functionen von x definirt wird, zwischen denen die recurrenten Relationen dritter Ordnung:

$$2(n+1)P_{n+1}-3(2n+1)xP_n+(2n+1)P_{n-2} = 0$$

bestehen. Den Functionen $P_n(x)$ wird ein System transcendenter Functionen $\sigma_n(x)$ zugeordnet, welche durch die Entwickelung:

$$\int_0^{e_1} \frac{dt}{(u-t)\sqrt{1-3xt+t^3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x) u^{-n-1}$$

gegeben werden (e_1 bedeutet eine Wurzel des Radicanden), und zwischen denen ebenfalls recurrente Relationen dritter Ordnung bestehen:

$$(2n+1)\sigma_{n+1} - 3(2n-1)x\sigma_{n-1} + 2(n-1)\sigma_{n-2} = 0.$$

Der Zusammenhang zwischen den Functionen P_n und σ_n ist ein doppelter. Erstens lässt sich σ_n darstellen in der Form:

$$\sigma_n = A_n + B_n\sigma_0 + C_n\sigma_1,$$

wobei A_n, B_n, C_n ganze rationale Functionen von x sind, welche mit P_n durch die Gleichung:

$$P_n = (-1)^n \frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n)} (B_n C_{n+1} - C_n B_{n+1})$$

verbunden sind. Zweitens besteht die Identität:

$$\frac{1}{x-z} = \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\sigma_n(x) P_n(z),$$

welche vermöge des Cauchy'schen Theorems die Entwickelung einer gegebenen Function $f(x)$ in Reihen nach den Functionen $\sigma_n(x)$ bzw. $P_n(x)$ ermöglicht. Ihr Analogon im Gebiete der Kugelfunctionen ist die Identität

$$\frac{1}{x-z} = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}(x) \,.\, P^{(n)}(z),$$

sodass die Functionen $\sigma_n(x)$ den Kugelfunctionen zweiter Art $Q^{(n)}(x)$ entsprechen. St.

J. Thomae. Ueber elliptische Integrale dritter Gattung. Schlömilch Z. XXXVI. 123-128.

Unter Voraussetzung eines reellen Moduls k wird gezeigt, wie man das elliptische Integral:

$$\int \frac{d\xi}{(\xi^2 - 2\alpha\xi + \beta^2)\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k\xi)}}$$

auf elliptische Integrale dritter Gattung mit reellen Parametern zurückführen kann. St.

W. Burnside. On a certain Riemann's surface. Lond. M. S. Proc. XXII. 410-416.

Die Note beschäftigt sich mit den beiden Integralen erster Gattung, die zu dem algebraischen Gebilde $s^3 = \frac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-\gamma)(z-\delta)}$ gehören. Dass diese Integrale sich auf elliptische zurückführen lassen, folgt unmittelbar aus den allgemeinen Sätzen, die Referent in seiner Abhandlung „Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen" (Math. Ann. XXXII, F. d. M. XX. 1888. 74) aufgestellt hat, und der Verfasser weist auch in einem Zusatz zu seiner Note die Thatsache, dass jenes Gebilde eine eindeutige Transformation in sich besitzt, als Grund der Reduction der Integrale nach. In der Note selbst berechnet der Verfasser die Perioden der beiden Normalintegrale erster Gattung, wobei sich herausstellt, dass dieselben nur zwei unabhängige Perioden haben, also auf elliptische Integrale zurückkommen. Hz.

J. Dolbnia. Die Integration mit Hülfe der elliptischen Functionen. Bull. Soc. phys.-math. Kasan. (2) I. 46-73.

Mit Hülfe der Weierstrass'schen $\wp$-Function wird gezeigt, dass jedes elliptische Integral durch algebraische Functionen und drei elliptische Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{u}{\sqrt{a_0}}, \quad \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right) du,$$

$$\int \left(\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 du$$

ausgedrückt werden kann. Eine Methode zur Reduction der Integrale $\int \left(\frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^{2k+1} du$ auf die Form $\int \left(\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^{2k} du$ wird angegeben. Die gefundenen Resultate werden zur Auflösung der Aufgabe benutzt, welche Abel gestellt hat: die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu finden, damit das

Integral

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}$$

sich algebraisch ausdrücken lasse. Wi.

M. Lerch. Contributions à la théorie des fonctions elliptiques, des séries et des intégrales définies. Prag. Akad. Verh. I_2. 133-148. (Böhmisch, mit französischem Résumé.)

Der böhmisch geschriebenen Abhandlung ist ein Résumé in französischer Sprache beigefügt, welchem der Referent entnimmt, dass es sich um die Verallgemeinerung bekannter Entwickelungen aus der Theorie der elliptischen Functionen handelt. Die Hauptformel lautet:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(s+nti)\Gamma(a-s-nti)}{\Gamma(a)} e^{2\pi u n i} = \frac{2\pi}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a}.$$

Ist a eine ganze Zahl, so lässt sich die Summe auf der linken Seite mittels elliptischer Functionen von dem Parameter ti ausdrücken. Interessant ist, dass sich aus dieser Formel eine Darstellung der Lambert'schen Reihe ergiebt, es ist nämlich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt\pi}}{1-e^{-nt\pi}} = \frac{-1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\vartheta_0'(z)\,dz}{\vartheta_0(z)(e^{t\pi+2z\pi i}-1)};$$

die Thetafunction hat den Parameter ti. St.

L. Kronecker. Die Legendre'sche Relation. Berl. Ber. 323-332, 343-358, 447-465, 905-908.

Die Abhandlung lässt sich als eine Fortsetzung der „Mitteilungen zur Theorie der elliptischen Functionen" (1883-1890) bezeichnen; sie hat den Zweck, vermöge der dort gewonnenen Resultate den inneren Grund und die wahre Bedeutung der Legendre'schen Relation

$$FE'+F'E-FF' = \tfrac{1}{2}\pi$$

festzustellen.

Der Referent meint einige von Kronecker erst im Laufe der Untersuchung eingeführte Bezeichnungen gleich von vorn herein anwenden zu sollen und schickt daher die betreffenden Auseinandersetzungen des Art. VIII dem eigentlichen Berichte voraus. An seine Bemerkungen über die Worte „Invariante" und „Atropos" in der Einleitung und in § 8 des Art. XXII jener Mitteilungen anknüpfend, schlägt Kronecker vor, die Gleichung, welche die Invarianteneigenschaft einer Function $\mathfrak{J}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ in Evidenz setzt, als „Atropie" zu bezeichnen. Besteht ferner für zwei Functionen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ eine Gleichung

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n)-\mathfrak{G}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n) = \mathfrak{J}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n),$$

in welcher $\mathfrak{J}$ eine Invariante der durch alle einander äquivalenten Systeme $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ gebildeten Klasse bedeutet, so sollen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ „isotrop" genannt werden, und die Gleichung, welche diese Eigenschaft zum Ausdrucke bringt, soll eine „Isotropie" heissen.

Der innere Grund der Legendre'schen Relation besteht nun in folgendem. Die Aequivalenz:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \sim (\sigma'_0, \tau'_0, \sigma', \tau', v', w')$$

werde durch die Gleichungen definirt:

$$\sigma'_0 = \alpha\sigma_0+\beta\tau_0, \quad \tau'_0 = \alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0, \quad \sigma' = \alpha\sigma+\beta\tau, \quad \tau' = \alpha'\sigma+\beta'\tau,$$
$$v' = \beta' v-\alpha' w, \quad w' = -\beta v+\alpha w,$$

in welchen $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ganze Zahlen bedeuten; $\alpha\beta'-\alpha'\beta$ sei gleich 1. Dann besteht für die Function „Series", welche durch die Doppelreihe:

$$\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) = \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}$$
$$(u_0 = v\sigma_0+w\tau_0, \; u = v\sigma+w\tau)$$

definirt ist, die „Atropie":

$$\mathrm{Ser}(v\sigma_0+w\tau_0, v\sigma+w\tau, v, w) = \mathrm{Ser}(v'\sigma'_0+w'\tau'_0, v'\sigma'+w'\tau', v', w').$$

Entwickelt man aber den für die Function Series früher hergeleiteten Ausdruck:

$$\frac{1}{v} e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}} \cdot \frac{\vartheta'\left(0, \frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u_0+u}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)}.$$

nach steigenden Potenzen der Grössen σ_0, τ_0, σ, τ, so hat auch jedes einzelne Aggregat von Gliedern einer und derselben Dimension für sich die angegebene Invarianteneigenschaft, also auch im besonderen das Aggregat der Glieder erster Dimension:

$$(v(\sigma+\sigma_0)+w(\tau+\tau_0))\left(\frac{2\tau_0\pi i}{v^2\sigma_0+vw\tau_0}+\frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{w}{v}\right)}\right),$$

und da der erste Factor des Productes offenbar selbst eine Invariante ist, so gilt dasselbe von dem zweiten Factor. Die so dargelegte Atropie:

$$\frac{2\tau_0\pi i}{v^2\sigma_0+vw\tau_0}+\frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{w}{v}\right)}$$

$$=\frac{2\tau'_0\pi i}{v'^2\sigma'_0+v'w'\tau'_0}+\frac{1}{3v'^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{w'}{v'}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{w'}{v'}\right)}$$

besagt aber genau dasselbe wie die Legendre'sche Relation, was man erkennt, wenn man die in dieser vorkommenden elliptischen Integrale durch Thetafunctionen ausdrückt.

Aus der eben angegebenen Atropie geht auch die hauptsächlichste Bedeutung der Legendre'schen Relation hervor. Verhältnismässig einfache Umformungen zeigen, dass sie sich vollständig ersetzen lässt durch die Gleichung:

$$\vartheta\left(\frac{u}{w},\,-\frac{v}{w}\right)=-i\left(\sqrt{-\frac{wi}{v}}\right)e^{\frac{u^2}{vw}\pi i}.\vartheta\left(\frac{u}{v},\,\frac{w}{v}\right),$$

und das ist die bekannte fundamentale Relation für die lineare Transformation der Thetafunctionen. Kronecker bemerkt noch, dass bereits Jacobi in § 56 der Fundamenta gezeigt hat, wie man, von der Legendre'schen Relation ausgehend, zur Transformationsgleichung gelangt, während umgekehrt Schellbach in seinem bekannten Buche durch Differentiation der Transformationsgleichung die Legendre'sche Relation erhält.

Die folgenden Artikel bezwecken, die Bedeutung der Eisenstein'schen „Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen" (1847) für den hier behandelten Gegenstand ins rechte Licht zu setzen; es ist an dieser Stelle nur möglich, die hauptsächlichsten Resultate dieser Untersuchung mitzuteilen. Eisenstein geht, anknüpfend an die Productentwickelung der Kreisfunctionen, von einem Doppelproducte aus, welches in anderer Bezeichnungsweise sich so schreiben lässt:

$$\prod_{m,n} \frac{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}.$$

Sein Wert wird bei einer gewissen Reihenfolge der Factoren durch den Quotienten zweier Thetafunctionen dargestellt. Von ihm lässt sich als Factor ein Teil absondern, welcher bei der linearen Transformation der Thetafunctionen seinen Wert behält und als „Eisenstein'sche Invariante" bezeichnet wird. Diese Invariante wird durch die Gleichung:

$$\mathrm{En}(u_0, u, v, w) = \prod_{m,n} \frac{u_0+mv+nw}{u+mv+nw}\, e^{\frac{u-u_0}{u+mv+nw}+\frac{1}{2}\left(\frac{u-u_0}{u+mv+nw}\right)^2}$$

gegeben und lässt sich auch dadurch definiren, dass ihr Logarithmus gleich demjenigen Teile der Entwickelung von:

$$\log \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)}$$

nach Potenzen von u_0-u ist, welcher erst mit der dritten Potenz anfängt; die Beziehung der Function En zur Weierstrass'schen Sigma-Function geht hieraus sofort hervor.

Die Gleichung, welche zwischen der Eisenstein'schen Invariante und dem ursprünglichen Doppelproducte besteht, führt zur Betrachtung der unendlichen Doppelsummen:

$$f_1(u, v, w) = \sum_{m,n} \frac{1}{u+mv+nw},$$

$$f_2(u, v, w) = \sum_{m,n} \frac{1}{(u+mv+nw)^2}.$$

Die Bestimmung der Wertänderungen dieser Reihen bei Substi-

tuirung von v', w' für v, w hat bereits Eisenstein in sehr sinnreicher Weise durchgeführt, dessen Deductionen Kronecker in wesentlich vereinfachter Form auseinandersetzt. Er gelangt dabei zu der wichtigen Gleichung:

$$\sum_{m,n}\frac{1}{(mv'+nw')^2}-\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^2}=\frac{2\alpha'\pi i}{vv'},$$

aus der bei der Annahme $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\alpha'=1$, $\beta'=0$ eine speciellere Relation hervorgeht, welche vollkommen identisch ist mit der Legendre'schen Relation in der am Anfange der Abhandlung angegebenen Gestalt. „Es zeigen also auch die Eisenstein'schen Entwickelungen, und zwar mit besonderer Deutlichkeit, die inhaltliche Uebereinstimmung der Legendre'schen Relation mit derjenigen, welche zwischen linear transformirten Thetafunctionen besteht." St.

V. Jamet. Sur les périodes des intégrales elliptiques. Nouv. Ann. (3) X. 193-196.

Zwischen den Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung besteht bekanntlich die Legendre'sche Relation. Herr Jamet hat bemerkt, dass man zu ihr geführt wird, wenn man das Volumen des dreiaxigen Ellipsoides mit Hülfe elliptischer Coordinaten berechnet. Es ergiebt sich nämlich dafür ein Doppelintegral, dessen Wert durch jene Perioden ausgedrückt werden kann. Die Vergleichung mit der bekannten Formel für das Volumen liefert dann sofort die Legendre'sche Relation.

St.

Th. S. Fiske. Weierstrass's elliptic integral. Annals of Math. VI. 7-11.

Die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen, wie sie, im Anschluss an Cauchy, Briot und Bouquet entwickelt haben, wird angewandt auf die Untersuchung des Integrals

$$\int_\infty^y\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}},$$

dessen Umkehrung die Weierstrass'sche $\wp$-Function liefert; im besonderen werden für den Fall reeller Invarianten die Ausdrücke der Perioden durch bestimmte Integrale hergeleitet.

St.

F. H. Loud. The elliptic functions defined independently of the calculus. Colorado Studies II. 48-81.

Jacobi hat in einer bekannten Abhandlung gezeigt, wie man gewisse Theoreme von Poncelet über Polygone, welche zugleich einem Kreise eingeschrieben und umgeschrieben sind, leicht mit Hülfe der elliptischen Functionen beweisen kann. Der Verfasser will umgekehrt eine Anwendung der elementaren Geometrie auf die elliptischen Transcendenten machen. Er beweist zunächst jene Theoreme und gelangt so zu einer Definition der elliptischen Functionen, welche unabhängig von den Begriffen der Differentiation und Integration ist. Wenn diese Betrachtungsweise auch zum Ziele führt, so muss sie doch als künstlich bezeichnet werden; denn eine Functionenklasse von solcher Wichtigkeit darf nicht, wie es übrigens auch bei Halphen geschieht, durch eine geometrische Aufgabe von untergeordneter Bedeutung eingeführt werden.

St.

W. Burnside. Two notes on Weierstrass's $\wp(u)$. Mess. (2) XXI. 84-87.

Die erste Note beschäftigt sich damit, die Gleichung zwischen $\wp u$, $\wp v$ und $\wp(u+v)$ in rationaler Form herzustellen, und verwertet die erhaltene Relation:

$$4(x+y+z)(xyz-\tfrac{1}{4}g_3) = (yz+zx+xy+\tfrac{1}{4}g_2)^2,$$

wo $x = \wp u$, $y = \wp v$, $z = \wp w$ gesetzt ist, für den Ausdruck von $\frac{\sigma_\lambda(u)\sigma_\lambda(v)\sigma_\lambda(w)}{\sigma(u)\sigma(v)\sigma(w)}$, wo $u+v+w = 0$. Die zweite ist betitelt: „Ueber $\wp u$, als eine Covariante einer Form vierter Ordnung betrachtet“, und leitet die von Hrn. F. Klein gegebene Deutung nach einer „rein synthetischen“ Methode her.

Lp.

Ch. Hermite. Sur la transformation des fonctiôns elliptiques. Palermo Rend. V. 155-157.

Es sei:

$$y = \frac{U}{V} = \lambda(x)$$

die Jacobi'sche Formel für die Transformation n^{ter} Ordnung. Zu ihr gehört die supplementare Transformation $y = \Theta(x)$, welche dadurch definirt wird, dass $\Theta[\lambda(x)]$ die Substitution ist, welche die Multiplication mit n giebt. Für die Bestimmung von $\Theta(x)$ bei gegebenem $\lambda(x)$ wird nun folgendes Verfahren angegeben. Setzt man:

$$\varphi(x) = A_0 x^{n+1} + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{\frac{n+1}{2}},$$
$$\psi(x) = B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-4} + \cdots + B_{\frac{n-1}{2}} x,$$

so lassen sich die $n+1$ Coefficienten A und B so bestimmen, dass die ganze Function vom Grade $n+1$ in x^2:

$$\varphi^2(x) - \psi^2(x)(1-x^2)(1-k^2x^2)$$

den Factor $U(x) - V(x) \cdot y$ zulässt. Dann aber besitzt sie auch den Factor $U + Vy$ und hat daher die Form:

$$A(U^2 - V^2y^2)[x^2 - \Theta^2(y)],$$

in welcher $\Theta(y)$ die gesuchte Function ist. St.

M. Krause. Ueber die Differentialgleichungen, denen die doppelt periodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten. IV, V, VI. Leipz. Ber. XLIII. 32-46, 289-307, 597-634.

Die in F. d. M. XXII. 1890. 468 besprochenen Untersuchungen über die Integration linearer homogener Differentialgleichungen mittels eindeutiger doppelt periodischer Functionen zweiter Art werden fortgesetzt. In IV handelt es sich um die Aufstellung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrale zwei von einander verschiedene einfache Unendlichkeitspunkte besitzen, während den Coefficienten ausserdem kein weiterer Unendlich-

keitspunkt zukommt. In V wird zuerst ein n-facher Unendlichkeitspunkt der Integrale und ein weiterer Unendlichkeitspunkt der Coefficienten, dann zwei vielfache Unendlichkeitspunkte der Integrale und kein weiterer Unendlichkeitspunkt der Coefficienten vorausgesetzt.

In VI geht der Verfasser über zu linearen homogenen Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren Integrale sämtlich eindeutige doppelt periodische Functionen zweiter Art sind. Gleichungen dieser Art waren schon von Hermite, Picard, Mittag-Leffler, Brioschi und Goursat behandelt worden, und zwar hatten die Integrale denselben Unendlichkeitspunkt erster Ordnung. Herr Krause stellt zuerst allgemeine Untersuchungen unter der Annahme an, dass der Unendlichkeitspunkt von der n^{ten} Ordnung ist, und führt darauf die Untersuchung für $n = 1$ und $n = 2$ wirklich durch. Alsdann nimmt er an, dass die Coefficienten noch einen weiteren Unendlichkeitspunkt erster Ordnung besitzen, und erledigt den Fall $n = 1$.

Die Untersuchungen dieses Abschnittes leiden an dem Mangel, dass nur mögliche Typen von Differentialgleichungen der verlangten Art angegeben werden, und es fraglich bleibt, ob die gefundenen Integrale wirklich unabhängig von einander sind, bezw. wann dies der Fall ist. St.

F. Schottky. Verhalten des Logarithmus einer elliptischen Function. J. für Math. CVIII. 342-345.

Ist $\varphi(u)$ eine eindeutige elliptische Function, und geht man von einem Punkte u' zu einem congruenten u'', so nimmt $\varphi(u)$ denselben Wert an, aber $\log\varphi(u)$ kann sich um ein Vielfaches von $2\pi i$ geändert haben. Zur Bestimmung der Aenderung von $\log\varphi(u)$ wird folgende Regel hergeleitet: Man construire über der Strecke $u'u''$ ein (im allgemeinen nicht primitives) Periodenparallelogramm, suche darin alle Null- und Unendlichkeitsstellen von $\varphi(u)$ auf und bestimme ihre senkrechten Abstände von der Geraden $u'u''$. Darauf bilde man die Summen der Abstände sowohl der Null- als auch der Unendlichkeitspunkte. Ihre Diffe-

renz, dividirt durch die Höhe des Parallelogramms, ist dann eine ganze Zahl k, und $2k\pi i$ ist die Aenderung, welche $\log\varphi(u)$ erfahren hat. St.

F. SCHOTTKY. Das Interpolationsproblem für elliptische Functionen. J. für Math. CVII. 189-195.

Das Cauchy'sche Interpolationsproblem, die rationale Function n^{ten} Grades zu bestimmen, welche für $2n+1$ gegebene Werte des Argumentes vorgeschriebene Werte annimmt, lässt sich dahin verallgemeinern, dass, wenn x und y zwei durch eine Gleichung ϱ^{ten} Ranges verbundene Variabeln sind, nach der rationalen Function n^{ten} Grades $z = R(x, y)$ gefragt wird, welche in $2n-\varrho+1$ gegebenen Punkten des Gebildes vorgeschriebene Werte annimmt. Der Verfasser beschränkt sich auf den Fall $\varrho = 1$ und findet, indem er z als Quotienten zweier Thetaproducte darstellt, dass die Bestimmung der Coefficienten von R auf eine quadratische Gleichung führt, sodass zwei verschiedene z existiren, die den gegebenen Bedingungen genügen. Zum Schluss wird das Resultat für die explicite Herstellung des Abel'schen Theorems bei hyperelliptischen Integralen verwertet.

St.

P. GÜNTHER. Zur Theorie der elliptischen Functionen. J. für Math. CVIII. 256-265, CIX. 43-50.

„Wenn zwei eindeutige elliptische Functionen (mit denselben Perioden)

$$(1) \qquad x = \varphi(u), \qquad y = \psi(u)$$

gegeben sind, zwischen denen ja immer eine algebraische Gleichung:

$$(2) \qquad f(x, y) = 0$$

bestehen muss, so kann man sich die Aufgabe stellen, auf rein algebraischem Wege folgende Probleme zu behandeln:

a) Vor Herstellung der Gleichung (2) zu entscheiden, ob dieselbe vom Range 0 oder 1 ist;

b) im ersteren Falle eine dritte elliptische Function

$$z = \chi(u) = \Re(x, y)$$

aufzustellen, durch welche sich x und y rational ausdrücken lassen, und diese Ausdrücke zu bilden (wiederum ohne Kenntnis von (2));

c) die Gleichung (2) herzuleiten."

Von den gewonnenen Resultaten werden zum Schluss noch Anwendungen gemacht auf die ebenen elliptischen Curven.

St.

Th. S. Fiske. On the doubly infinite products. New York M. S. Bull. I. 61-66.

Kurze historische Skizze dieser Theorie unter Anführung der Arbeiten von Euler, Abel, Jacobi, Eisenstein, Cayley, Weierstrass, nebst einigen Bemerkungen über die passende Art des Vortrags hierüber für Studenten.

Lp.

J. W. L. Glaisher. On the q-series derived from the elliptic and zeta functions of $\frac{1}{3}K$ and $\frac{1}{4}K$. Lond. M. S. Proc. XXII. 143-171.

In einer Abhandlung über die zahlentheoretische Function $H(n)$, welche den Ueberschuss der Anzahl der Divisoren von n bezeichnet, die $\equiv 1 (\text{mod.} 3)$ sind, über die Anzahl derer, die $\equiv 2 (\text{mod.} 3)$ sind (Proceedings XXI. 395, F. d. M. XXII. 1890. 203), hatte der Verfasser gezeigt, dass die q-Reihe, welche $H(n)$ zum Coefficienten des allgemeinen Gliedes hat, durch eine Zetafunction vom Argumente $\frac{1}{3}K$ ausgedrückt werden kann. Dies veranlasst ihn jetzt, für das vollständige System der sechzehn elliptischen und Zetafunctionen von $\frac{1}{3}K$ die Entwickelungen nach q aufzustellen und die arithmetische Natur ihrer Coefficienten zu untersuchen, welche sich als zahlentheoretische Functionen von ähnlicher Bedeutung wie $H(n)$ herausstellen. Zum Schluss werden ähnliche Untersuchungen für die Argumente $\frac{1}{4}K$ und $\frac{1}{6}K$ angestellt.

St.

J. W. L. Glaisher. On the elliptic functions of $\frac{1}{3}K$. Mess. (2) XX. 191-192.

Abdruck der Formeln für sechs der elliptischen Functionen von $\frac{1}{3}K$ aus der Abhandlung, über welche im vorangehenden Referate berichtet ist, unter Bezugnahme auf zwei Noten der Herren Forsyth und Burnside über denselben Gegenstand (F. d. M. XV. 1883. 384). Lp.

J. W. L. GLAISHER. Expressions for symmetrical functions of I, G, E in terms of q. Mess. (2) XXI. 65-69.

Im Anschluss an die Abhandlung „Recurring relations involving sums of powers of divisors", über welche in diesem Bande des Jahrbuchs S. 177 berichtet ist, giebt der Verfasser die Werte der symmetrischen Functionen von I, G, E an, von denen er bei der Herleitung seiner zahlentheoretischen Ergebnisse Gebrauch gemacht hatte. Die Formeln sind grösstenteils seinen Veröffentlichungen im Messenger XV entnommen (vergl. F. d. M. XVII. 1885, besonders S. 234 u. 430ff.). Lp.

L. KRONECKER. Ueber die Zeit und die Art der Entstehung der Jacobi'schen Thetaformeln. Berl. Ber. 1891. 653-659.

L. KRONECKER. Ueber die Zeit und die Art der Entstehung der Jacobi'schen Thetaformeln. J. für Math. CVIII. 325-334.

In der ersten Abhandlung, welche im ersten Teile der zweiten Abhandlung wieder abgedruckt ist, setzt der Verf. auseinander, in welcher Weise die von Jacobi in seinem Aufsatze: Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales (d. d. 21. Sept. 1835, J. für Math. XV, 199 und Ges. Werke I, 333) mitgeteilten Formeln, insbesondere die Formeln (4) und (12), die Vorstufe gebildet haben, von der aus Jacobi zu der allgemeineren, eine Epoche in der Geschichte der Theorie der elliptischen Functionen bezeichnenden Formel:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)+\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) \\ \quad =\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')+\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z'), \end{cases}$$

bei der

$$2w' = w + x + y + z, \quad 2x' = w + x - y - z, \quad 2y' = w - x + y - z,$$
$$2z' = w - x - y + z$$

ist (Ges. Werke I, 506), gelangt ist, und weiter, dass die Entdeckung dieser allgemeineren Formel (A) sehr bald nach der Vollendung des oben citirten Aufsatzes, nämlich noch Ende September oder Anfang October 1835 geschehen sein muss, da Jacobi die Formel (A) schon beim Beginn seiner von Rosenhain ausgearbeiteten Vorlesung über elliptische Functionen im Wintersemester 1835/36 erwähnt hat.

Der zweiten Abhandlung ist als zweiter Teil ein vollständiges Verzeichnis der von Jacobi gehaltenen Vorlesungen angefügt.

Kr.

W. Kapteyn. Nouvelle méthode pour démontrer la formule fondamentale des fonctions θ. Darboux Bull. (2) XV. 125-126.

Die Richtigkeit der Weierstrass'schen dreigliedrigen Thetaformel ergiebt sich sofort, wenn der Satz:

„Die Summe der Residuen einer elliptischen Function in Bezug auf die Unendlichkeitsstellen im Periodenparallelogramm ist gleich Null"

angewandt wird auf die doppeltperiodische Function:

$$f(t) = Ce^{\frac{2n\pi i t}{\omega}} \frac{\theta_1(t-a)\,\theta_1(t-b)\,\theta_1(t-c)}{\theta_1(t-x)\,\theta_1(t-y)\,\theta_1(t-z)},$$

in welcher c durch die Gleichung:

$$x + y + z - a - b - c = m\omega + n\omega'$$

definirt ist; m und n sind ganze Zahlen.

Dass der Verfasser die ganzen Zahlen m und n einführt, ist überflüssig; es genügt:

$$c = x + y + z - a - b$$

zu setzen, wodurch der Beweis sich erheblich vereinfacht.

St.

E. W. Bockhorn. Beziehungen zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Jacobi'schen Moduln. Solingen. 15 S. 4°.

P. Appell. Sur une expression nouvelle des fonctions elliptiques par le quotient de deux séries. American J. XIV. 9-14.

Eine eindeutige analytische Function, welche sich nur im Unendlichen wesentlich singulär verhält, und welche die Nullstellen a_1, a_2, ..., die Unendlichkeitsstellen b_1, b_2, ... besitzt, lässt sich bekanntlich als Quotient von zwei ganzen transcendenten Functionen darstellen, dessen Zähler die Stellen a, und dessen Nenner die Stellen b zu Nullstellen hat. Allgemeiner kann man aber als Zähler eine Function nehmen, welche einen Teil der Stellen a zu Nullstellen und einen Teil der Stellen b zu Unendlichkeitsstellen hat, wenn nur für den Nenner der Rest der Stellen a Unendlichkeitsstellen und der Rest der Stellen b Nullstellen sind. Zähler und Nenner lassen sich dann nach einem Theoreme von Mittag-Leffler durch Reihen darstellen, welche für jeden endlichen Wert von z convergiren. Die einzige Schwierigkeit besteht darin, die Coefficienten dieser Reihen und besonders die des ganzen Teiles der Entwickelungen zu berechnen. Diese Berechnung wird hier für die elliptische Function

$$\Theta_2(z) : \Theta_1(z)$$

durchgeführt unter der Voraussetzung, dass die Unendlichkeitsstellen in einer Hälfte der Ebene dem Zähler, in der anderen Hälfte dem Nenner zugewiesen werden. Das Resultat steht in engem Zusammenhange mit der von Heine eingeführten Verallgemeinerung der Euler'schen Gammafunction. St.

K. Schwering. Multiplication der lemniskatischen Function $\sin \operatorname{am} u$. J. für Math. CVII. 196-240.

Angeregt durch die Untersuchungen von Eisenstein und Kronecker, stellt der Verfasser sich die Aufgabe: die complexe Multiplication für die einfachste unter den elliptischen Functionen mit

singulärem Modul, die lemniskatische Function $x = \sin\text{am}\, u$, wirklich durchzuführen, also $y = \sin\text{am}(\alpha u + \beta u i)$ als Function von x explicite darzustellen.

Nachdem in § 1 historische Bemerkungen gegeben worden sind, folgen in den §§ 2-4 vorbereitende Sätze. Ist die Norm $p = \alpha^2 + \beta^2$ des Multiplicators $\alpha + \beta i$ eine ungerade Zahl (α ungerade, β gerade), so ergiebt sich für das gesuchte Multiplicationstheorem die Form:

$$y = \frac{\varphi(x^4)}{x^{p-1}\varphi(x^{-4})} = \frac{x^p + a_1 x^{p-4} + a_2 x^{p-8} + \cdots + (\alpha + \beta i)x}{1 + a_1 x^4 + a_2 x^8 + \cdots + (\alpha + \beta i)x^{p-1}}.$$

Es ist also:

$$\varphi(z) = z^\nu + a_1 z^{\nu-1} + a_2 z^{\nu-2} + \cdots + (\alpha + \beta i) \qquad (\nu = \tfrac{1}{4}(p-1)).$$

Die $\frac{1}{4}(p-5)$ Coefficienten a_1, a_2, ..., um deren Berechnung es sich handelt, sind ganze complexe Zahlen der Form $a + bi$, welche, wie schon Eisenstein bewiesen hat, sämtlich den Teiler $\alpha + \beta i$ besitzen.

Die erste Methode der Berechnung (§ 5) besteht darin, dass zunächst y nach steigenden Potenzen von x entwickelt, und die Entwickelungscoefficienten mittels der Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = (\alpha + \beta i)\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

berechnet werden. Kennt man sie, so braucht man nur noch die Hälfte der Coefficienten a zu bestimmen, und dazu können die Identitäten dienen, welche daraus folgen, dass die Multiplication mit $(\alpha + \beta i).(\gamma + \delta i)$ sich auf zwei verschiedene Weisen ausführen lässt. Auf diesem Wege ergiebt sich das Resultat, dass allgemein a_n eine ganze Function des Grades n, sowohl von $(\alpha + \beta i)^4$ als auch von p ist. Es lassen sich auch die drei ersten und die beiden letzten Coefficienten a wirklich berechnen; aber bald werden die Ausdrücke abschreckend verwickelt, und es folgt daher in § 6 eine andere Methode.

Ist g die primitive Wurzel (mod. p), für welche

$$g^{\frac{p-1}{4}} \equiv i (\text{mod.}\, \alpha + \beta i)$$

ist, so haben die Grössen

$$\gamma_r = \sin\operatorname{am}\frac{4g^r K}{\alpha+\beta i} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{4}(p-5)),$$

die Eigenschaft, dass die Identität:

$$1+a_1 x^4+a_2 x^8+\cdots+(\alpha+\beta i)x^{p-1} = \prod_r (1-\gamma_r^4 x^4)$$

besteht. Sucht man nun die Potenzsummen:

$$S_h = \sum_r \gamma_r^{4h}$$

mit Hülfe der bereits ermittelten Grössen a zu bestimmen, so zeigt sich, dass die Ausdrücke für S_1, S_2, S_3 bei weitem einfacher sind als die für die Grössen a gefundenen. Dies führt auf den Gedanken, statt der a_n die S_h zu berechnen, aus denen erstere sich leicht bestimmen lassen. Diese Methode ergiebt zwar eine Reihe interessanter Sätze, ist aber für die praktische Berechnung ebenfalls ungeeignet.

Die dritte Lösung des Multiplicationsproblems, welche in den §§ 7 und 8 gegeben wird, steht in engem Zusammenhange mit der Jacobi'schen Transformationsmethode. Eine ganze Function $F(x)$ vom Grade $\nu = \frac{1}{2}(p-1)$:

$$F(x) = 1+b_1 x+b_2 x^2+\cdots+b_\nu x^\nu+\cdots+b_2 x^{2\nu-2}+b_1 x^{2\nu-1}+x^{2\nu}$$

wird definirt durch die Gleichung:

$$1-y = \frac{(1-x)F^2(x)}{1+a_1 x^4+\cdots+(\alpha+\beta i)x^{p-1}},$$

und für sie die „Hauptgleichung" hergeleitet:

$$F(x) = \frac{(x-1)^{2\nu}}{L}\left\{1-a_1\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+a_2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4-\cdots\pm(\alpha+\beta i)\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2\nu}\right\},$$

in welcher:

$$L = (1+i)^{3\nu} i^{\operatorname{ind}(1+i)}$$

zu setzen ist. Diese merkwürdige Relation führt die Multiplication auf die Bestimmung der Function $F(x)$ zurück, deren Coefficienten b viel kleiner sind als die Coefficienten a. Zur Berechnung der Grössen b werden dann lineare Relationen hergeleitet, und

es ergiebt sich so die Möglichkeit, bis $p = 53$ die Rechnungen wirklich durchzuführen. Aus der Hauptgleichung wird noch die Functionalgleichung:

$$\varphi\left(\frac{-4z}{(z-1)^2}\right) = \frac{z^\nu}{(z-1)^{2\nu}} \cdot \varphi(z) \cdot \varphi(z^{-1})$$

gewonnen, welche in sofern von Interesse ist, als sich aus ihr im folgenden Paragraphen ein Beweis für das biquadratische Reciprocitätsgesetz ergiebt.

Aber erst die vierte Methode, welche in § 9 dargelegt wird, führt zu einer befriedigenden Lösung der Aufgabe. Sie beruht darauf, dass neben der Multiplication mit der primären complexen Zahl $\varrho = \alpha + \beta i$ eine zweite Multiplication mit der Primzahl $\eta = \gamma + \delta i$ von der Norm q betrachtet wird. Zu der letzteren gehören, entsprechend den früheren Grössen γ_r, die Grössen:

$$\delta_s = \sin\operatorname{am}\frac{4h^s K}{\eta} \qquad (h^{q-1} \equiv i \bmod.\eta).$$

Wird noch der grösste gemeinschaftliche Teiler von $\frac{q-1}{4}$ und $\operatorname{ind}(1+i)$ (der Index ist hier, wie im folgenden, mod. η zu nehmen) mit Q bezeichnet und $\frac{1}{4}(q-1) = t\,.\,Q$ gesetzt, so gilt die wichtige Gleichung:

$$\{\varphi(\delta_0^4)\}^M = \prod_{r=1}^{t}\left\{\frac{\delta_{(t-r)\operatorname{ind}(1+i)+\operatorname{ind}\varrho}}{\delta_{(t-r)\operatorname{ind}(1+i)}}\left(1-\delta^4_{(t-r)\operatorname{ind}(1+i)}\right)^{2\nu}\right\}^{2^{r-1}-1}$$
$$(M = 2^t - 1),$$

zu deren Behandlung eine Resolvente ω eingeführt wird. Es kann hier nur das Schlussresultat angegeben werden. Es sei $\Phi_1 = 1$, $\Phi_2 = 1 + \delta^4$ und Φ_3, Φ_4, ... seien dadurch bestimmt, dass jede folgende Grösse aus der vorhergehenden hervorgeht, indem man δ^4 durch $\frac{-4\delta^4}{(1-\delta^4)^2}$ ersetzt und dann den Nenner fortschafft. Diese Φ leisten die fortgesetzte Multiplication mit $1+i$; es ist:

$$\sin\operatorname{am}(1+i)^m u = \frac{(1+i)^m \delta\, \Phi_1\, \Phi_2 \ldots \Phi_{m-1}}{\Phi_m} \cdot \sqrt{1-\delta^4}$$
$$(\delta = \sin\operatorname{am} u).$$

Aus den Functionen Φ erhält man dann die Function φ durch die Gleichung:

$$\{\varphi(\delta_0^4)\}^M =$$
$$(1+i)^{Mm} i^{Mn} \{\Phi_1(\delta_0^4)\Phi_2(\delta_0^4) \dots \Phi_{m-1}(\delta_0^4) . \sqrt{1-\delta_0^4}\}^M \, \Phi_t^{p-2^m}(\delta_0^4).$$

Hierin ist $M = 2^t - 1$ und $\varrho \equiv (1+i)^m i^n (\text{mod.}\,\eta)$; für $m = 1$ bedarf die Gleichung einer gewissen Modification. Mit Hülfe dieser Formel ist man „nun im Stande, in unerschöpflicher Fülle Multiplicationstheoreme aufzustellen"; denn sie leisten eine „recurrente Berechnung jeder Teilungsgleichung aus anderen einfacheren" und geben so eine Lösung des Multiplicationstheorems, welche, wie der Verfasser mit Recht sagt, „nicht mehr viel zu wünschen übrig lässt". St.

L. Kiepert. Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. I. Math. Ann. XXXIX. 145-178.

Nachdem Herr Kiepert seine Untersuchungen über die Transformation der elliptischen Functionen durch die Einführung der Parametergleichungen zu einem gewissen Abschlusse gebracht hat, wendet er sich nunmehr dazu, die wiederholt in Aussicht gestellten Anwendungen seiner Resultate auf die complexe Multiplication der elliptischen Functionen zu geben.

Der erste Abschnitt der vorliegenden Abhandlung enthält die allgemeine Theorie der complexen Multiplication, und zwar geschieht die Untersuchung mit Hülfe der Weierstrass'schen Bezeichnungsweise, welche auch hier sich als sehr zweckmässig erweist. Es ergiebt sich schliesslich das Problem, die zu einer und derselben Determinante gehörigen singulären Invarianten zu berechnen, zu dessen Lösung im zweiten Abschnitte die L-Gleichungen benutzt werden. Ist nämlich n die Norm des complexen Multiplicators, und kennt man die L-Gleichung für die Transformation n^{ten} Grades, so gelingt es, für den singulären Wert von $\frac{\omega'}{\omega}$ immer eine, häufig sogar zwei Wurzeln der L-Gleichung direct zu finden, und durch Einsetzen ihres Wertes ergiebt

sich eine Gleichung zur Bestimmung der singulären Invariante. Es folgt die Behandlung einer grossen Anzahl von Beispielen, welche sich mit Hülfe der L-Gleichungen für $n = 2, 3, 4, 5, 7, 9, 13, 25$ und 49 durchführen lassen. In den folgenden Abhandlungen sollen andere, für die Berechnung der singulären Invarianten noch geeignetere Methoden erläutert werden.

St.

C. Bigiavi. Sul rapporto $\frac{\eta'}{\eta}$ considerato come funzione del rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ dei periodi delle funzioni ellittiche di Weierstrass. Annali di Mat. (2) XIX. 261-268.

Das Verhältnis $\frac{\eta'}{\eta} = \lambda$ ist eine eindeutige Function von $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$, welche in der ganzen positiven Halbebene definirt ist und die reelle Axe zur natürlichen Grenze hat. Um die conforme Abbildung jener Halbebene auf die λ-Ebene, welche durch $\lambda = \lambda(\tau)$ definirt wird, zu untersuchen, nimmt Herr Bigiavi die Vermittelung der absoluten Invariante $J = J(\tau)$ in Anspruch und stellt zu diesem Zwecke λ dar als Quotienten zweier particulären Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$J(1-J)\frac{d^2y}{dJ^2}+\frac{1}{6}(10-19J)\frac{dy}{dJ}-\frac{169}{144}y = 0.$$

Auf diese Weise ergiebt sich, dass dem Kreisbogendreiecke Γ' in der τ-Ebene mit den Ecken $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, i, $+i\infty$ und den Winkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0$ die positive J-Ebene und der positiven J-Ebene in der λ-Ebene das Kreisbogendreieck Δ' mit den Ecken: $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-i$, $+i\infty$ und den Winkeln $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0$ entspricht. Nachdem dieses Resultat gewonnen ist, macht die weitere Untersuchung keine Schwierigkeiten, denn einmal geht aus dem Dreieck Γ, welches aus Γ' und seinem Spiegelbilde in Bezug

auf die imaginäre Axe besteht, durch die linearen, ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1:

$$\tau_h = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$$

eine Schar von Dreiecken Γ_h hervor, welche die positive Halbebene vollständig und lückenlos bedecken, andererseits zeigt die Gleichung:

$$\lambda\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \frac{\alpha\lambda(\tau)+\beta}{\gamma\lambda(\tau)+\delta},$$

dass dieselbe Substitution:

$$\lambda_h = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta},$$

auf das Dreieck Δ angewandt, welches aus Δ' und seinem Spiegelbilde in Bezug auf die imaginäre Axe besteht, ein Dreieck Δ_h liefert, welches dem Dreiecke Γ_h entspricht. St.

X. Stouff. Sur des fonctions voisines des fonctions modulaires. Toulouse Ann. V. C. 1-16.

Die Abhandlung ist eine Fortsetzung der in F. d. M. XXII. 1890. 180 besprochenen, in welcher der Verfasser Fuchs'sche Gruppen betrachtet hatte, bei denen die Coefficienten der linearen Substitutionen aus p^{ten} Wurzeln der Einheit gebildet sind. Unabhängig von ihm hatte zu derselben Zeit Herr Bianchi (F. d. M. XXII. 1890. 178) sich mit Gruppen derselben Art beschäftigt. Es werden jetzt zunächst im Anschluss an die Resultate von Herrn Bianchi gewisse Gruppen untersucht, welche mit Hülfe von fünften Wurzeln der Einheit gebildet werden. Es folgt die Herstellung der Fuchs'schen Functionen, welche zu der einfachsten Gruppe dieser Art gehören. Zum Schluss wird gezeigt, wie man für die nächst einfache Gruppe die zugehörige Fuchs'sche Gleichung herstellen kann. St.

F. Brioschi. Sur une classe d'équations modulaires. C. R. CXII. 28-32.

Die Formel für die Transformation n^{ter} Ordnung (n Prim-

zahl) von:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

ist bekanntlich:

$$\xi = \frac{u}{J^2},$$

in welcher J eine ganze Function von x vom Grade $\frac{1}{2}(n-1)$ bedeutet. Bezeichnet man noch mit δ die Discriminante der ursprünglichen, mit Δ die Discriminante der transformirten Function, so gilt der Satz, dass das Quadrat der Grösse

$$y = \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{8}} J(x)$$

einer Jacobi'schen Modulargleichung genügt. St.

F. Brioschi. Sur une forme nouvelle de l'équation modulaire du huitième degré. American J. XIII. 381-386.

Setzt man:

$$c_1 = \xi, \quad c_2 = \xi^2 - \tfrac{1}{12} g_2, \quad c_3 = \xi^3 - \tfrac{1}{4} g_2 \xi - \tfrac{1}{4} g_3,$$
$$c_4 = \xi^4 - \tfrac{1}{2} g_2 \xi^2 - g_3 \xi - \tfrac{1}{48} g_2^2,$$

so lautet die neue Form der Modulargleichung achten Grades:

$$c_4 + c_2 c_3^{\frac{2}{3}} + c_3^{\frac{4}{3}} = 0. \qquad \text{St.}$$

C. Runge. Ueber eine numerische Berechnung der Argumente der cyklischen, hyperbolischen und elliptischen Functionen. Acta Math. XV. 221-247.

Das Verfahren, welches Herr Runge zur Berechnung des Argumentes gewisser Functionen anwendet, findet sich, wie Herr Lohnstein (Acta Math. XVI. 141) bemerkt hat, bereits bei Schellbach: Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen, Berlin 1864, § 159. Dort fehlt jedoch die Bestimmung der Genauigkeit der Rechnungsresultate, welche Herr Runge elegant durchgeführt hat. Zur Erläuterung dienen einige sehr sorgfältig behandelte Beispiele. St.

Hj. Tallquist. Ueber specielle Integrationen, bei denen die Oberfläche eines ungleichaxigen Ellipsoids das Integrationsgebiet bildet. Acta Soc. Scient. Fennicae. Helsingfors. 329-348.

Behandlung der folgenden Frage: wie findet man den Wert des über die ganze Fläche eines ungleichaxigen Ellipsoids erstreckten Integrals einer ganzen Function der zweiten Potenzen der Coordinaten, wenn die Axen des Ellipsoids die Coordinatenaxen sind? Die Integrale reduciren sich auf elliptische, bei deren Untersuchung die Weierstrass'schen Bezeichnungen benutzt werden. Als Anwendung behandelt der Verfasser neben zwei ähnlichen Fragen das folgende Problem: die Oberfläche eines Ellipsoids ist mit Masse belegt; in jedem Punkte ist die Dichte umgekehrt proportional dem Quadrate der Normale, welche vom Mittelpunkte des Ellipsoids auf die Tangentialebene des Punktes gezogen wird; wie gross ist die über die ganze Fläche ausgebreitete Masse? (Die Aufgabe für den Fall einer der Normale umgekehrt proportionalen Dichte ist behandelt in Tisserand's „Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal", Paris 1877, S. 156ff. Lp.) Bdn.

J. McCowan. On a representation of elliptic integrals by curvilinear arcs. Edinb. M. S. Proc. IX. 55-58.

Gbs.

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

P. M. Pokrowsky. Ueber die Transformationen ultraelliptischer Integrale und Functionen erster Klasse. Mosk. Math. Samml. XV. 397-572.

Im ersten Capitel werden die ultraelliptischen Integrale erster Klasse $\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$ (wo $\varphi(x)=0$ nur reelle Wurzeln hat) nach

der Methode von Richelot auf die Normalform reducirt (De integralibus Abelianis primi ordinis. J. für Math. XII.). Diese Methode führt zu dem Resultate, dass alle zugehörigen linearen Transformationen in zwei Klassen zerlegt werden können; jede der Klassen enthält sechs Transformationen, für welche sowohl die linearen Substitutionen als auch die Ausdrücke der transformirten Moduln gegeben sind. Die Differentialgleichungen der Transformation nebst den Coefficienten und die linearen Relationen zwischen den Perioden der gegebenen und der transformirten Integrale werden durch das Studium der Riemann'schen Flächen gefunden.

Im zweiten Capitel behandelt der Verfasser die Frage nach den linearen Transformationen der Θ-Functionen und der ultraelliptischen Functionen. Die Function $\Theta_{\binom{0,0}{0,0}}(v_1, v_2; \delta)$ wird durch die Reihe $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{p_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{p_2} e^{2\pi i(p_1 v_1 + p_2 v_2) + \Phi(p_1, p_2)}$ definirt. Nachdem für jede Transformation die Argumente und die Periodicitätsmoduln der Θ-Functionen gefunden sind, welche dem ursprünglichen und dem transformirten System der Gleichung entsprechen, giebt die Hermite'sche Methode die Relationen zwischen den Functionen selbst, und die allgemeine Transformationsformel der Θ-Functionen wird in einer sehr einfachen Form gefunden. Die beiden Gruppen (reelle und imaginäre) der linearen Transformationen werden umständlich behandelt, und jede derselben wird durch das ursprüngliche und das transformirte System der ultraelliptischen Gleichungen, durch die Relationen zwischen den Argumenten und Moduln und durch die Ausdrücke der transformirten Functionen in den gegebenen charakterisirt.

Das dritte Capitel ist den Transformationen zweiten Grades gewidmet, speciell den beiden hauptsächlichen Transformationen, welche den beiden Landen'schen Transformationen der elliptischen Integrale analog sind.

Das vierte Capitel behandelt die entsprechenden Transformationen der Θ-Functionen. Die successive Anwendung der zwei Transformationen führt zur Verdoppelung der Argumente der

Θ-Functionen, und der Verfasser giebt die einfachen Formeln zur Verdoppelung.

Das fünfte Capitel endlich ist der wesentlichsten Frage der Theorie der Transformationen zweiten Grades gewidmet: es werden gefunden die algebraischen Relationen zwischen den Grenzen der Integrale des ursprünglichen und des transformirten Systems und die quadratischen Gleichungen, welche in dem Abel'schen Theorem ihren Ursprung haben. Wi.

J. Dolbnia. Remarques sur la théorie des fonctions abéliennes. Nouv. Ann. (3) X. 478-502.

Die vorliegende Abhandlung schliesst sich an den vierten Abschnitt der Theorie der Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan (Leipzig 1866) an. Im ersten Artikel werden zwei Hülfssätze aufgestellt und bewiesen; der zweite Artikel untersucht mit Hülfe derselben die zwischen den Periodicitätsmoduln zweier von einander unabhängigen Abel'schen Integrale der ersten Gattung bestehenden Relationen. Kr.

F. Schottky. Theorie der elliptisch - hyperelliptischen Functionen von vier Argumenten. J. für Math. CVIII. 147-178, 193-255.

Die aus dem Jacobi'schen Umkehrproblem für $\varrho = 4$ entspringenden Thetafunctionen sind bekanntlich nicht die allgemeinsten Thetafunctionen von vier Veränderlichen, sondern sie sind durch eine bestimmte vom Verfasser mit $J = 0$ bezeichnete Relation charakterisirt. Sind ausserdem noch die Nullwerte von zwei geraden Thetafunctionen Null, so hat man es mit dem hyperelliptischen Falle zu thun. Die letzteren Relationen können aber auch erfüllt sein, ohne dass die erstere es ist; und das ist der vom Verfasser behandelte Fall.

Unter einer „particulären Lösung der Thetarelationen" versteht der Verfasser ein System algebraischer Functionen von einer oder mehreren Veränderlichen, welche, statt der Theta in

die Relationen eingesetzt, dieselben sämtlich befriedigen. Die Argumente selbst werden dann Integrale; die Anwendung der Additionstheoreme führt von der particulären Lösung zur allgemeinen. In den §§ 1, 2 zeigt der Verfasser, wie die herkömmliche Theorie der Thetafunctionen von zwei und drei Argumenten dieser Auffassung sich unterordnet; ausserdem giebt er noch eine Skizze einer anderen Behandlungsweise des Falles $\varrho = 3$, welche zwei Thetafunctionen gleich 0 annimmt, um eine particuläre Lösung zu erhalten. Von § 3 an wendet sich der Verfasser zu dem eingangs genannten Specialfalle $\varrho = 4$ und leitet (§ 3-8) zunächst die erforderlichen Relationen zwischen den Constanten ab.

Der zweite Abschnitt wendet sich dann den Thetafunctionen selbst zu. In der „particulären Lösung" erscheint zunächst eine Anzahl von Thetaquotienten als rationale Functionen der Coordinaten der Punkte einer Raumcurve vom Range 1, also als elliptische Functionen eines Argumentes u (§ 9-11). Indem eine weitere Thetarelation noch zu Hülfe genommen wird, erscheinen sämtliche Thetaquotienten als elliptische Functionen zweier Argumente w, w', bezw. sie lassen sich algebraisch durch solche Functionen ausdrücken (§ 12-20).

Der dritte Abschnitt geht vermittelst des Additionstheorems von dieser particulären Lösung zur allgemeinen über. Bdt.

H. S. White. Abel'sche Integrale auf singularitätenfreien, einfach überdeckten, vollständigen Schnittcurven eines beliebig ausgedehnten Raumes. Nova Acta Leop.-Carol. Akad. LVII$_2$. 41-128.

Die vorliegende Arbeit schliesst sich eng an die von Herrn F. Klein in Math. Ann. XXXVI. veröffentlichte Abhandlung an: „Zur Theorie der Abel'schen Functionen" (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 498), indem sie zwei dort allgemein charakterisirte algebraische Formen unter speciellen Voraussetzungen wirklich aufstellt.

Ein Integral dritter Gattung lässt sich nämlich (nach § 8

der citirten Abhandlung) in der Form darstellen:

$$P_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x \int_\eta^\xi d\omega_z\, d\omega_\zeta \frac{\Psi(z, \zeta; (u, v))}{(u_z v_\zeta - v_z u_\zeta)},$$

wo die u, v beliebige Grössen, die $z_1, z_2, \ldots, z_n$ und die $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ homogene Coordinaten der beiden veränderlichen Curvenpunkte z, ζ sind. Ψ ist dann eine algebraische Form auf der Curve, die nur zum Teile bestimmt ist.

Soll nun dieses so definirte Integral im Sinne des Herrn Klein normirt werden, so ist Ψ an der im Raume R_{n-1} von $n-1$ Dimensionen gelegenen Curve womöglich als rationale Covariante zu definiren. Dies war bisher in den beiden einfachsten Fällen durchgeführt, nämlich 1) durch Herrn Pick (Wien. Ber. XCIV, F. d. M. XVIII. 1886. 424) für die sogenannten binomischen Gebilde, die sich analytisch darstellen, indem man das binäre Gebiet $z_1 : z_2$ zu Grunde legt und

$$\sqrt[m]{F_{m\nu}(z_1 z_2)}$$

adjungirt, und 2) bei den ebenen Curven $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ ohne Doppelpunkt von demselben Autor.

Die erste Aufgabe, welche sich nun die vorliegende Arbeit stellt, besteht darin, die Bestimmung der Form Ψ auch für diejenigen Curven durchzuführen, welche im $(n-1)$-dimensionalen Raume (R_{n-1}) die singularitätenfreien vollständigen Schnitte der $n-2$ algebraischen Flächen

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ \ldots,\ f_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

ausmachen, wobei diese Curven als einfach überdeckt aufgefasst werden. Der Verfasser nennt solche Curven elementare Curven und findet, dass es immer möglich ist, eine Form Ψ anzugeben, welche eine simultane ganze Covariante der Grundformen $f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}$ ist.

Sind ferner irgend p linear unabhängige Integrale erster Gattung $w_1, w_2, \ldots, w_p$ und ein beliebiges Integral dritter Gattung auf einer elementaren Curve in der Form

$$w_\nu^{x,y} = \int_y^x \varphi_\nu(z)\, dw_z \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p); \qquad P_{\xi\eta}^{xy} = \int_\eta^\xi Z_t^{xy}\, dw_t$$

gegeben, dann ist durch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} z_t^{xy}, & z_{t'}^{xy}, & \ldots, & z_{t^{(p)}}^{xy} \\ \varphi_1(t), & \varphi_1(t'), & \ldots, & \varphi_1(t^{(p)}) \\ \vdots & & & \\ \varphi_p(t), & \varphi_p(t'), & \ldots, & \varphi_p(t^{(p)}) \end{vmatrix} = \text{Alg.}(x, y;\ t, t', \ldots, t^{(p)}),$$

wo $t, t', \ldots, t^{(p)}$ $p+1$ beliebige Punkte der Curve sind, eine algebraische Function von x, y gegeben. Da dieselbe als Function von x (beziehungsweise y) an jeder der $p+1$ Stellen $t^{(i)}$ einfach algebraisch unendlich wird, sonst aber überall endlich bleibt, so ist:

$$X(x, y;\ t, t', \ldots, t^{(p)}, (u, v)) = \prod_0^p {}_i \{(u_x v_{t^{(i)}} - u_{t^{(i)}} v_x)(u_y v_{t^{(i)}} - v_y u_{t^{(i)}})\} \times \text{Alg.}(x, y;\ t, t', \ldots, t^{(p)})$$

eine überall endlich bleibende homogene Function $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades in x, beziehungsweise y. Diese Function X nennt der Verfasser Reductionsform und stellt sich als zweite Aufgabe (die bisher noch nicht vollständig behandelt ist), diese Reductionsform in allen den Fällen zu bilden, in welchen nunmehr das Ψ bekannt ist, d. h. also für die elementaren Curven einschliesslich der ebenen Curven. Die Untersuchung der Frage giebt dann das Resultat, dass X eine rationale, ganze Covariante der Grundformen der Curve ist. Ihre Bildungsweise giebt der Verfasser an.

Bezüglich der Methode, die zur Gewinnung der Formen Ψ und X verwendet wird, mag noch bemerkt werden, dass der Verfasser aus der Art und Weise, wie Herr Pick a. a. O. für die elementaren Curven der Ebene die Formen Ψ und X bildet, ein empirisches Verfahren für die Bildung der entsprechenden Formen in höheren Räumen ableitet und ähnlich bei der Darstellung der X verfährt.

Dieser kurze Ueberblick, der der Einleitung der vorliegenden Arbeit entnommen ist, muss genügen, da ein genaueres Eingehen in die Einzelheiten der Arbeit wegen der hierzu nötigen Formeln unmöglich ist. Bm.

H. Burkhardt. Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. Zweiter Teil. Math. Ann. XXXVIII. 161-224.

Bei Besprechung dieser Arbeit müssen wir uns, wie bei dem Referate über den ersten Teil (F. d. M. XXII. 1890. 488), aus den dort angeführten Gründen wieder auf eine gedrängte Inhaltsangabe der fünf neuen Abschnitte, die sie enthält, beschränken.

Der Abschnitt VIII giebt eine allgemeine Theorie der hyperelliptischen $X_{\alpha\beta}$ (also „eigentlicher" hyperelliptischer Functionen) für $p = 2$. Diese von Herrn F. Klein in seinen Vorlesungen eingeführten, den elliptischen X_α entsprechenden Jacobi'schen Functionen besitzen neben anderen besonders die wichtige Eigenschaft, dass sie bei linearer Transformation der Perioden lineare und homogene Substitutionen mit constanten Coefficienten erfahren. Dieselben sind zwar schon von Herrn Witting (Math. Ann. XXIX, F. d. M. XIX. 1887. 501) behandelt worden; da jedoch dessen Darstellung, wie der Verfasser bemerkt, nicht frei von Unrichtigkeiten ist und auch mehrfach vereinfacht werden kann, so hat sich derselbe entschlossen, im Vorliegenden eine vollständige Theorie dieser Functionen zu entwickeln.

Aus diesen $X_{\alpha\beta}$ werden, gerade wie im elliptischen Falle, gerade und ungerade Jacobi'sche Functionen abgeleitet, nämlich die

$$\tfrac{1}{2}(n^2+1) \text{ Functionen } Y_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(X_{\alpha\beta}+X_{-\alpha-\beta})$$

und die

$$\tfrac{1}{2}(n^2-1) \text{ Functionen } Z_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}-X_{-\alpha-\beta};$$

im Falle einer geraden Charakteristik sind die $Y_{\alpha\beta}$ gerade und die $Z_{\alpha\beta}$ ungerade Functionen, während im Falle einer ungeraden Charakteristik das Umgekehrte stattfindet. Bei linearer Periodentransformation erfahren die Y $\tfrac{1}{2}N$, die Z dagegen N lineare Substitutionen, wobei $N = (n^4-1)n^3(n^2-1)n$ ist. Da die Gruppe der Z-Substitutionen für $n = 3$ schon von den Herren Witting und Maschke (Math. Ann. XXXIII. 317, F. d. M. XXI. 1889. 142) ausführlich untersucht worden, so beschränkt sich der Ver-

fasser auf die Untersuchung der Gruppe der Y für den Fall $n = 3$, welcher der IX. Abschnitt gewidmet ist.

Für $n = 3$ ergeben sich fünf Functionen $Y_{\alpha\beta}$, und diese erfahren bei denjenigen linearen Transformationen der Perioden, welche die Charakteristiken in sich überführen, eine Gruppe G von $\frac{1}{2}N = 25920$ linearen homogenen Substitutionen. Die Untersuchung dieser Gruppe wird nach zwei Richtungen durchgeführt. Einmal werden die Untergruppen und dann die Invarianten von G aufgestellt, d. h. solche rationale ganze Functionen der Y, welche bei allen Operationen von G in sich übergehen. Dabei werden die Invarianten von G aus den Invarianten ihrer Untergruppen aufgebaut, wobei die Y als homogene Coordinaten eines Punktes in einem vierdimensionalen Raume gedeutet und die linearen Substitutionen der Y als Collineationen dieses Raumes aufgefasst werden. Die Untersuchung von G ergiebt fünf Arten von Untergruppen, von denen vier bereits für die Gruppe der Z von Herrn Witting aufgestellt wurden.

Der X. Abschnitt enthält die bereits erwähnte Ableitung der Invarianten der Gruppe G. Es ergeben sich zunächst fünf Invarianten J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18} (die Zahlenindices bedeuten die Grade); dazu kommt eine ungeraden Grades J_{45}, deren Quadrat eine ganze Function der fünf zuerst angeführten ist, und ausserdem noch eine besondere Invariante 40sten Grades F_{40}, die sich ebenfalls durch die ersten fünf darstellt. Den Schluss des Abschnittes bildet der Beweis für die Vollständigkeit des erhaltenen Formensystems.

Der XI. Abschnitt beschäftigt sich mit dem „Formenproblem" der Y, d. h. mit der Aufgabe, die Y zu berechnen, wenn die Werte der Invarianten

$$J_4 = a, \quad J_6 = b, \quad J_{10} = c, \quad J_{12} = d, \quad J_{18} = e$$

und ausserdem noch $J_{45} = f$, natürlich in Uebereinstimmung mit der erwähnten Relation, gegeben sind. Dieses Problem besitzt 25920 Auflösungen, die sämtlich aus einer von ihnen durch Anwendung der Substitutionen der Gruppe G hervorgehen. Anschliessend an die gewonnenen Untergruppen, werden schliesslich

die Anfangsterme einer Resolvente 36sten und einer Resolvente 40sten Grades aufgestellt.

Der XII. und letzte Abschnitt steht wieder in engem Zusammenhange mit den Untersuchungen des ersten Teiles, indem der Verfasser die im zweiten Teil gewonnenen Resultate auf die in jenem behandelte Multiplicatorgleichung anwendet, und zwar in der Weise, dass er die Identität der eben erwähnten Resolvente 40sten Grades (in Y^2) für den Fall $v_1 = v_2 = 0$ (v_1 und v_2 sind die Argumente der Thetafunctionen) mit jener Multiplicatorgleichung nachweist. Bm.

W. Wirtinger. Zur Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlechte 3. Monatsh. f. Math. II. 55-60.

Diese kurze Notiz knüpft an die Arbeiten der Herren F. Klein und Pascal an (Math. Ann. XXXVI, F. d. M. XXII. 1890. 498 und Annali di Mat. (2) XVII u. XVIII, F. d. M. XXI. 1889. 506 u. XXII. 1890. 491), in welchen die Reihenentwickelungen für die 64 Sigmafunctionen dreier Argumente nach ganzen, positiven Potenzen der Integralsummen erledigt werden, und giebt in kurzen Zügen einen Weg an, auf welchem es gelingt, von den σ-Functionen zur Lösung des Umkehrproblems überzugehen, d. h. für diejenigen rationalen symmetrischen Functionen der oberen Grenzen in den (viergliedrigen) Integralsummen, welche gleichzeitig Functionen der Integralsummen selbst sind, Reihenentwickelungen anzugeben, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich der 15 Coefficienten jener ebenen singularitätenfreien C_4 angehören, die als algebraisches Gebilde zu Grunde gelegt ist. Eine ausführliche Darlegung und Begründung der Resultate wird für später versprochen. Bm.

A. Krazer und F. Prym. Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen. Kurz zusammengefasst und herausgegeben von A. Krazer. Leipzig (1892). B. G. Teubner. XII u. 134 S. 4°.

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen, von denen der erste den Titel: „Theorie der Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken“, der zweite den Titel: „Theorie der Transformation der Thetafunctionen“ führt. Ueber die Entstehung und Bedeutung des ersten Teiles mag hier das Folgende bemerkt werden.

Die Verfasser waren schon in ihren früheren Arbeiten über Thetafunctionen bestrebt, durch Auffindung allgemeiner Formeln die bis dahin bekannten speciellen Thetaformeln gruppenweise zusammenzufassen und dadurch eine Uebersicht über die Vollständigkeit der vorhandenen Formelsysteme, über ihre gegenseitigen Beziehungen und über die inneren Gründe ihrer Existenz zu erhalten. In diesem Sinne wurde zunächst in der ersten der fünf unter dem Titel: „Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie“ (Leipzig 1882, F. d. M. XIV. 1882. 419) zusammengefassten Abhandlungen die Riemann'sche Thetaformel mitgeteilt, welche, wie in der fünften dieser Abhandlungen und für den Fall $p = 2$ ausführlich in der Arbeit: „Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel“ (Leipzig 1882, vergl. dieses Jahrb. a. a. O.) gezeigt wurde, die Quelle aller Relationen zwischen jenen 2^{2p} Thetafunctionen ist, deren Charakteristiken aus halben Zahlen bestehen, und die dem entsprechend die zum Falle $r = 2$ gehörigen genannt werden. Das weitere Bestreben der Verfasser war dann, eine Thetaformel aufzufinden, welche die gleiche Bedeutung für die zu beliebigem r gehörigen Thetafunctionen hat. Die Untersuchung des Falles $r = 3$ in der Abhandlung: „Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind“ (Math. Ann. XXII. 416, vergl. dieses Jahrb. a. a. O.) zeigte den Weg zu dieser Formel, und es wurde dieselbe sodann für beliebiges r in der Abhandlung: „Ueber die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel“ (Acta Math. III. 240, vergl. dieses Jahrb. a. a. O.) aufgestellt.

Indessen hatte sich schon bald gezeigt, dass die Riemann'sche Thetaformel und ihre soeben erwähnte Verallgemeinerung für beliebiges r selbst nur ganz specielle Fälle weit allgemeinerer

Thetaformeln sind. Eine solche allgemeine Formel wurde schon in der zweiten der oben erwähnten, 1882 erschienenen fünf Abhandlungen und bald darauf, nachdem sich für die Herstellung derselben bessere Hülfsmittel dargeboten hatten, in allgemeinerer Form in der Abhandlung: „Ableitung einer allgemeinen Thetaformel“ (Acta Math. III. 216, vergl. dieses Jahrb. a. a. O.) mitgeteilt.

Die in der letzten Arbeit angewandten Hülfsmittel bestanden in der Einführung neuer Summationsbuchstaben in der das Product der Thetafunctionen darstellenden np-fach unendlichen Reihe vermittelst einer linearen, dort speciell orthogonalen Substitution, verbunden mit der Einschiebung eines passend gewählten discontinuirlichen Factors mit den Werten 1 und 0 zur Beseitigung der zunächst vorhandenen Beschränkung in der Summation nach den neuen Summationsbuchstaben. Diese Methode der Umformung unendlicher Reihen, die in ihrer Anwendbarkeit durchaus nicht auf die Thetareihen beschränkt ist, lässt sich, von allem Zufälligen befreit, folgendermassen darstellen.

In der q-fach unendlichen absolut convergenten Reihe:

$$\text{(F)} \qquad W = \sum_{m_1,\dots,m_q}^{-\infty,\dots,+\infty} f(m_1|\cdots|m_q),$$

deren allgemeines Glied $f(m_1|\cdots|m_q)$ ausser den Summationsbuchstaben $m_1, \dots, m_q$ noch beliebige andere Grössen, Constanten und Variabeln, enthalten möge, und bei der die Summation so auszuführen ist, dass jede der q Grössen m, unabhängig von den übrigen, die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, führe man an Stelle der Summationsbuchstaben $m_1, \dots, m_q$ mit Hülfe der Substitution:

$$\text{(S)} \qquad rm_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=q} c_{\mu\nu} n_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \dots, q),$$

bei der r eine positive ganze Zahl, die c ganze Zahlen mit nicht verschwindender Determinante sind, neue Summationsbuchstaben $n_1, \dots, n_q$ ein. Man erhält dann, wenn man den Ausdruck, in den das allgemeine Glied $f(m_1|\cdots|m_q)$ durch Einführung der Grössen n übergeht, mit $g(n_1|\cdots|n_q)$ bezeichnet und die in der vorliegenden Arbeit pag. 18 u. f. und pag. 70 u. f. angegebenen

Schlüsse durchführt, für W die neue Gleichung:

$$\text{(G)} \qquad r^{p} s W = \sum_{\varrho_1,\dots,\varrho_q}^{0,1,\dots,\bar{C}-1} \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_q}^{0,1,\dots,r-1} \sum_{n_1,\dots,n_q}^{-\infty,\dots,+\infty} e^{\varphi} g\left(n_1 + \frac{\overline{\overline{\varrho}}_1}{C} \Big| \cdots \Big| n_q + \frac{\overline{\overline{\varrho}}_q}{C}\right),$$

$$\varphi = \frac{2\pi i}{r} \sum_{\nu=1}^{\nu=q} \left(n_\nu + \frac{\overline{\overline{\varrho}}_\nu}{C}\right) \bar{\sigma}_\nu,$$

in der zur Abkürzung:

$$\overline{\overline{\varrho}}_\nu = r \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \gamma_{\mu\nu} \varrho_\nu, \quad \bar{\sigma}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} c_{\mu\nu} \sigma_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \dots, q)$$

gesetzt ist, bei der ferner C die Determinante der q^2 Zahlen c, $\bar{C}$ den absoluten Wert von C und $\gamma_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $c_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet, bei der endlich s die Anzahl der Normallösungen des Congruenzsystems:

$$r \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \gamma_{\mu\nu} x_\mu \equiv 0 (\text{mod.} C) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, q)$$

vertritt.

Die im Vorstehenden in allgemeinster Weise zum Ausdruck gebrachte Umformung einer unendlichen Reihe durch Einführung neuer Summationsbuchstaben vermittelst einer linearen Substitution, die hinsichtlich ihrer Gültigkeit nur an die Bedingung geknüpft ist, dass auch die neu auftretenden q-fach unendlichen Reihen absolut convergent sind, konnte nun sofort zur Gewinnung weiterer, allgemeinerer Thetaformeln verwandt werden, wenn man die bisherige Beschränkung, nur Thetafunctionen mit den nämlichen Parametern in den Kreis der Betrachtung zu ziehen, fallen liess. Die Verf. gingen dem entsprechend bei den Untersuchungen des ersten Teils der vorliegenden Arbeit von einem Producte von n p-fach unendlichen Thetareihen mit verschiedenen Parametern aus, legten der linearen Substitution (S), vermittelst welcher an Stelle der bisherigen np Summationsbuchstaben

$$m_\mu^{(\nu)} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \dots, n \\ \mu = 1, 2, \dots, p \end{pmatrix}$$

np neue Summationsbuchstaben

$$n_\mu^{(\nu)} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \dots, n \\ \mu = 1, 2, \dots, p \end{pmatrix}$$

eingeführt wurden, von vorne herein freiwillig die Beschränkung auf, dass sie in jeder ihrer Gleichungen nur Grössen m und n mit demselben unteren Index enthalte, und stellten sich die Aufgabe, diese Substitution (S) in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass durch sie das vorgelegte Thetaproduct in eine Summe von Thetaproducten übergeführt werde. Es zeigte sich dabei, dass diese Aufgabe identisch ist mit der Aufgabe, eine Form:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} (a^{(1)}_{\mu\mu'} x^{(1)}_{\mu} x^{(1)}_{\mu'} + \cdots + a^{(n)}_{\mu\mu'} x^{(n)}_{\mu} x^{(n)}_{\mu'})$$

durch eine Substitution:

$$\text{(S)} \qquad r_\mu x^{(\nu)}_{\mu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} c^{(\nu\varrho)}_{\mu} y^{(\varrho)}_{\mu} \qquad \binom{\nu = 1, 2, \ldots, n}{\mu = 1, 2, \ldots, p}$$

der angegebenen Art in eine Form:

$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} (b^{(1)}_{\mu\mu'} y^{(1)}_{\mu} y^{(1)}_{\mu'} + \cdots + b^{(n)}_{\mu\mu'} y^{(n)}_{\mu} y^{(n)}_{\mu'})$$

überzuführen, und es ergab sich, dass dieses Verlangen nicht nur Bedingungen für die Coefficienten der Substitution (S), sondern auch Beziehungen zwischen den Grössen $a^{(\varrho)}_{\mu\mu'}$, den Parametern der ursprünglichen Thetafunctionen, nach sich zieht. Nachdem diese arithmetische Grundlage der gestellten Aufgabe im zweiten Abschnitte entwickelt ist, wird im dritten Abschnitte die der allgemeinsten derartigen Ueberführung einer Form A in eine Form B entsprechende Thetaformel (Θ) pag. 20 aufgestellt. Diese „Fundamentalformel für die Theorie der Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken“ bildet den Mittelpunkt des ersten Teiles. Mit ihrer Aufstellung (1884) war wieder ein bedeutender Schritt in der Gewinnung allgemeiner Thetaformeln geschehen, da sie nicht nur alle von den Verf. selbst früher angegebenen Thetaformeln als specielle Fälle umfasst, sondern auch darüber hinaus solche Formeln, welche zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Parametern bestehen (z. B. Schröter'sche Formeln); zugleich aber hatte die durchgeführte Untersuchung das bemerkenswerte Resultat zu Tage gefördert, dass jeder derartigen Thetaformel die Ueberführung einer Form A in eine

Form B durch eine Substitution (S) zu Grunde liegt, und dadurch die Gewinnung specieller Thetaformeln auf die rein arithmetische Aufgabe zurückgeführt, specielle Formenpaare A, B von der Beschaffenheit anzugeben, dass die Form A durch eine Substitution (S) in die Form B übergeht. Die in den folgenden Abschnitten des ersten Teils durchgeführten Untersuchungen können als Musterbeispiele für die derartige Gewinnung speciellerer Thetaformeln angesehen werden. —

Zum zweiten Teile der Arbeit, welcher die Transformationstheorie der Thetafunctionen behandelt, sei das Folgende bemerkt. Die bisherigen Methoden zur Zusammensetzung einer Transformation aus einfachen konnten einerseits, da sie zur Ausführung dieser Zusammensetzung die Kenntnis der Zahlenwerte der $4p^2$ Transformationszahlen voraussetzen, nicht zur Herstellung einer allgemeinen Transformationsformel benutzt werden; sie erwiesen sich aber andererseits, von ganz speciellen Fällen abgesehen, auch dann, wenn die Transformationszahlen gegeben vorlagen, wegen der grossen Anzahl der auftretenden einfachen Transformationen als ungeeignet zur Gewinnung der Transformationsformel. Die Verf. erkannten, dass diese Uebelstände durch das Verlangen der Ganzzahligkeit der Transformationszahlen bedingt seien, und dass nur nach Aufhebung dieser Beschränkung ein wesentlicher Fortschritt in der Behandlung der Transformationstheorie gemacht werden könne. Nicht also der Wunsch, die Transformationstheorie durch Zulassung gebrochener Transformationszahlen willkürlich zu verallgemeinern, sondern die Ueberzeugung, dass nur durch diese Verallgemeinerung für die Lösung des Transformationsproblems neue Wege erschlossen werden könnten, bestimmte die Verf., den Begriff der Transformation durch Zulassung beliebiger rationaler Zahlen als Transformationszahlen zu erweitern.

Da eine beliebige nichtlineare Transformation nunmehr aus einer linearen und zwei ganz speciellen nichtlinearen Transformationen zusammengesetzt werden kann, so liegt der Schwerpunkt der von den Verf. geschaffenen Transformationstheorie in der linearen Transformation. Bezüglich dieser werden im 2., 3.

und 4. Abschnitte durch directe Umformung der Thetareihe drei Transformationsformeln (I), (II), ($III^{(q)}$) abgeleitet und die durch sie dargestellten linearen Transformationen als die drei „elementaren linearen Transformationen" eingeführt. Aus ihnen kann, wie im 5. Abschnitte gezeigt wird, jede lineare Transformation zusammengesetzt werden, und zwar übersteigt die Anzahl der bei der Zusammensetzung einer Transformation auftretenden elementaren Transformationen niemals die Zahl sechs. Durch Verbindung der diesen elementaren linearen Transformationen entsprechenden Thetaformeln wird sodann im 6. Abschnitte die Formel für die allgemeine lineare Transformation gewonnen. Es mussten zwar für die Durchführung der Untersuchungen des 5. und 6. Abschnitts bezüglich des Verhaltens der Transformationszahlen β vier Fälle unterschieden und gesondert behandelt werden; doch gelang es schliesslich, die auf diese Weise erhaltenen vier verschiedenen Formeln in eine einzige Formel (L) pag. 118 zusammenzufassen. Im 7. Abschnitte wird dann endlich aus dieser Formel und jenen beiden Formeln, welche den oben erwähnten, bei der Zusammensetzung einer nichtlinearen Transformation auftretenden, zwei speciellen nichtlinearen Transformationen entsprechen, die allgemeinste Transformationsformel zusammengesetzt.

Man ersieht, dass durch die von den Verf. eingeführte Erweiterung des Transformationsbegriffs in der That eine von der bisherigen durchaus verschiedene Behandlung der Transformationstheorie ermöglicht wurde; aber nicht nur zu der von den Verf. durchgeführten Herstellung einer allgemeinen Transformationsformel, sondern auch zur Gewinnung specieller Transformationsformeln bietet die entwickelte Theorie die geeigneten Hülfsmittel.

Was den Umfang der Arbeit angeht, so war der Herausgeber bestrebt, nicht nur die Resultate der von Herrn Prym und ihm angestellten Untersuchungen vollständig mitzuteilen, sondern auch stets die Methoden, welche zu diesen Resultaten geführt haben, klar erkennen zu lassen; an Litteraturangaben finden sich in der Einleitung jene Abhandlungen zusammengestellt, denen die Verf. Anregung bei ihren Arbeiten verdankt haben. Kr.

E. HUEBNER. Ueber die Umformung unendlicher Reihen und Producte mit Beziehung auf die Theorie der elliptischen Functionen. Pr. (No. 10) Kneiphöf. Gymn. Königsberg i. Pr. 41 S. 4°.

Wenn man in einer n-fach unendlichen, absolut convergenten Reihe an Stelle der bisherigen Summationsbuchstaben $m_1, \ldots, m_n$, die unabhängig von einander alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen, neue Summationsbuchstaben $m'_1, \ldots, m'_n$ mit Hülfe einer linearen Substitution einführt, so erhebt sich die Frage, in welcher Weise über die neuen Grössen m' zu summiren ist. Der Verf. behandelt diese Frage in der vorliegenden Abhandlung und unterzieht insbesondere die Fälle $n = 1, 2, 3$ einer eingehenden Untersuchung. Es hätte erwähnt sein sollen, dass das Princip, die Summation nach den m' von einer ihr anhaftenden Beschränkung durch Einschiebung eines discontinuirlichen Factors mit den Werten 1 und 0 zu befreien, von Herrn Prym herrührt und schon im Jahre 1882 von ihm angewandt wurde (Acta Math. III. 199 und 216, F. d. M. XIV. 1882. 419). Inzwischen ist die Frage nach der Umformung einer mehrfach unendlichen Reihe durch Einführung neuer Summationsbuchstaben vermittelst einer linearen Substitution von Herrn Prym und dem Ref. in allgemeinster Weise behandelt worden (Krazer und Prym, Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen, Leipzig 1892, vergl. das vorangehende Referat). Kr.

F. VON DALWIGK. Beiträge zur Theorie der Thetafunctionen von p Variablen. Nova Acta Leop.-Carol. Akad. LVII. 221-263; Diss. Marburg. 4°.

Die Abhandlung besteht aus zwei selbständigen Teilen. Im ersten Teile werden folgende auf Thetafunctionen beliebig vieler Variabeln bezügliche Fragen erörtert. § 1 und § 2 behandeln die Darstellung der allgemeinen Thetafunctionen n^{ter} Ordnung durch n^p specielle unter ihnen, wie sie in allgemeinster Form schon Herr Prym (Untersuchungen über die Riemann'sche Theta-

formel etc. p. 28, Leipzig 1882, F. d. M. XIV. 1882. 419) mitgeteilt hat. § 3 beschäftigt sich mit dem Convergenzbeweise für die p-fach unendliche Thetareihe und giebt zwei Beweise an, von denen der erste, ebenso wie der Beweis von Riemann (Gesammelte Werke p. 452) und der von Herrn Thomae (Schlömilch Z. XXV. 43, vergl. F. d. M. XII. 1880. 364), die p-fach unendliche Thetareihe durch gruppenweise Zusammenfassung ihrer Glieder mit einer einzigen einfach unendlichen Reihe, der zweite, ebenso wie der Beweis von Rosenhain (Mém. s. l. fonct. de deux variables etc. Mém. prés. XI. 388) und der von Herrn Prym und dem Ref. (Neue Grundl. e. T. d. allgem. Thetaf. p. 3. Leipzig 1892), dieselbe mit dem Producte von p einfach unendlichen Reihen vergleicht. § 4 enthält die bekannten Grundformeln für die Thetafunctionen. § 5 stellt, wesentlich nach den von Herrn C. Neumann in der zweiten Auflage seiner Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale (Leipzig 1884, F. d. M. XVI. 1884. 336) angegebenen Gesichtspunkten, die Lehre von dem Verschwinden der Thetafunction dar. § 6 endlich handelt von den Normalintegralen zweiter und dritter Gattung und ihrer Darstellung durch Thetafunctionen. — Der zweite Teil beschäftigt sich mit dem Umkehrproblem im Falle $p = 2$. Kr.

B. Igel. Ueber die Parameterdarstellung der Verhältnisse der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. Monatsh. f. Math. II. 157-176.

Herr Staude hat (Math. Ann. XXIV. 281, F. d. M. XVI. 1884. 431) die vierten Potenzen der aus den Nullwerten der 10 geraden Thetafunctionen gebildeten Quotienten rational durch die sechs Verzweigungswerte des zu Grunde liegenden hyperelliptischen Gebildes ausgedrückt; der Verf. stellt analoge Ausdrücke für die aus den Nullwerten der Derivirten der sechs ungeraden Thetafunctionen gebildeten Quotienten auf und giebt an, dass diese Ausdrücke die gleichen seien, ob man nach der ersten oder nach der zweiten Variable differentiirt.

Herr Bolza hat (Diss. Göttingen 1886, F. d. M. XVIII. 1886. 407) den Fall behandelt, dass für die Thetafunctionen zweier Veränderlichen der Parameter τ_{12} den Wert $\frac{1}{2}$ besitzt, in welchem Falle die zugehörigen Functionen mit den Parametern $4\tau_{11}$, $4\tau_{12}$, $4\tau_{22}$ in Producte zweier einfach unendlichen Thetareihen zerfallen. Der Verf. beschäftigt sich mit den Relationen, welche dann zwischen den aus den Nullwerten der ursprünglichen Thetafunctionen gebildeten Ausdrücken p, q, r bestehen.

Der Ref. kann die in der Einleitung ausgesprochene Ansicht über die Arbeit des Herrn Staude nicht teilen; auch war es ihm nicht möglich, sich von der Richtigkeit der in den beiden Teilen der Arbeit mitgeteilten Resultate zu überzeugen.

Kr.

J. Thomae. Ueber Thetafunctionen, deren Argumente einem System von Drittelperioden gleich sind. Schlömilch Z. XXXVI. 41-44.

Soll eine Thetafunction mehrerer Veränderlichen verschwinden, wenn für die Argumente ein System von Drittelperioden gesetzt wird, so muss zwischen den Moduln der Thetafunction eine Beziehung statthaben. Diese Beziehung wird von dem Verf. in der vorliegenden Note für den Fall der Thetafunctionen zweier Veränderlichen aufgestellt. Kr.

H. Sievert. Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Fünfteln ganzer Zahlen bestehen. Pr. Neues Gymn. Nürnberg. 31 S. 8°.

Der Referent hat (Math. Ann. XXII. 416, F. d. M. XIV. 1882. 419) die Beziehungen zwischen jenen Thetafunctionen einer Veränderlichen untersucht, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. Die dort angewandten Methoden sind von dem Verf. in der vorliegenden Abhandlung auf den Fall der Thetafunctionen einer Veränderlichen, deren Charakteristiken aus Fünfteln ganzer Zahlen bestehen, übertragen worden. Die mit ihrer Hülfe erhaltenen Resultate können

kurz so ausgesprochen werden. Setzt man:

$$e^{\frac{1}{5}\varrho\varrho'\pi i}\vartheta^5[\varrho](v) = \vartheta^5\{\varrho\}(v),$$

$$e^{\frac{1}{5}\varrho\varrho'\pi i}\vartheta[\varrho](v)\vartheta[\varrho+\sigma](v)\vartheta[\varrho+2\sigma](v)$$
$$\times\vartheta[\varrho-\sigma](v)\vartheta[\varrho-2\sigma](v) = \vartheta\{\varrho,\sigma\}(v),$$

so giebt es im ganzen 25 verschiedene Functionen $\vartheta^5\{\varrho\}(v)$ und 30 verschiedene Functionen $\vartheta\{\varrho,\sigma\}(v)$. Diese 55 Functionen werden als Grundfunctionen eingeführt. In Artikel 5 werden die zwischen ihren Nullwerten bestehenden Relationen eingehend untersucht; im Artikel 6 werden durch fünf Functionen $\vartheta\{m\beta,\alpha\}(v)$, $m = {0,\,1,\,2, \atop -1,\,-2,}$ in Artikel 7 und 8 durch fünf Functionen $\vartheta^5\{\eta+m\alpha\}(v)$, $m = {0,\,1,\,2, \atop -1,\,-2,}$ die 50 jedesmal übrigen Grundfunctionen mit Hülfe von Constanten, die sich aus den Nullwerten der 55 Grundfunctionen und fünften Einheitswurzeln rational zusammensetzen, linear ausgedrückt. Kr.

E. Wiltheiss. Die partiellen Differentialgleichungen der Abel'schen Thetafunctionen dreier Argumente. Math. Ann. XXXVIII. 1-23.

Der Verf. stellt das Ergebnis seiner Untersuchung im Schlussparagraphen selbst folgendermassen zusammen.

Die Curve vierter Ordnung, welche den Abel'schen Integralen vom Range III zu Grunde liegt, sei:

$$f = \sum_{\lambda=0}^{4}\sum_{\mu=0}^{4-\lambda} A_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}\,x_1^\lambda x_2^\mu x_3^{4-\lambda-\mu}$$

und werde symbolisch mit $a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = e_x^4$ bezeichnet. Wenn man nun unter Einführung eines willkürlichen Variabelnsystems w_1, w_2, w_3:

$$g(abc)^2(abe)^2[c_u c_w e_u e_w + c_u^2 e_w^2] - 5(abc)^4 e_u^2 e_w^2 = L,$$

$$(abc)^2[a_x^2 b_x^2 c_w^2 + a_x a_w b_x b_w c_x^2] = \bar{f} = \sum_{\lambda=0}^{4}\sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \bar{A}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}\,x_1^\lambda x_2^\mu x_3^{4-\lambda-\mu}$$

setzt, wenn man ferner das Operationszeichen

$$\delta = \sum_{\lambda=0}^{4}\sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \bar{A}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}\frac{\partial}{\partial A_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}}$$

einführt, so genügen die sämtlichen 64 Thetafunctionen:

$$Th(u_1, u_2, u_3) = ce^{\eta(u_1, u_2, u_3)}\,\vartheta(v_1, v_2, v_3),$$

welche zu der Curve f gehören, der Differentialgleichung:

$$\delta Th + \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 Th}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} w_\alpha w_\beta + \frac{1}{288} L\,Th = 0.$$

Diese Differentialgleichung hat die Invarianteneigenschaft. In derselben sind sechs einzelne Differentialgleichungen zusammengefasst, welche sich daraus ergeben dadurch, dass die Coefficienten der w_1, w_2, w_3 einzeln gleich Null gesetzt werden.

Kr.

J. Schröder. Bemerkung über das zweite Glied der Potenzentwickelung der durch $\mu = 0$ charakterisirten hyperelliptischen σ-Functionen. Hamb. Mitt. III. 7-11.

Die Integration der Differentialgleichung für $d\log\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ erfordert, dass der Wert des zweiten Gliedes $\Gamma_2(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ der zugehörigen σ-Entwickelung für die besonderen Argumentwerte $(w_1, w_2, \ldots, w_p) = (k_\lambda^{p-1}, k_\lambda^{p-2}, \ldots, k_\lambda^0)$, wo k_λ einen Verzweigungspunkt der zweiblättrigen Fläche bezeichnet, festgestellt wird. Bezeichnet man mit $\varDelta_{\varphi\psi}(z)$ die zweite Ueberschiebung der beiden Partialformen φ_z^{p+1}, ψ_z^{p+1}, in welche zur Bildung der vorliegenden σ-Function die Grundform f_z^{2p+2} zerspalten wurde, so war der in Rede stehende Wert schon früher auf anderem Wege als:

$$\Gamma_2(k_\lambda^{p-1}, k_\lambda^{p-2}, \ldots, k_\lambda^0) = \frac{p(p+1)^2}{16(2p+1)} \varDelta_{\varphi\psi}(k_\lambda)$$

ermittelt worden. In der vorliegenden Abhandlung wird dieses Resultat direct aus der von Herrn Klein gegebenen allgemeinen Definitionsgleichung der σ-Functionen abgeleitet. Kr.

F. Caspary. Sur deux systèmes d'équations différentielles dont les fonctions hyperelliptiques de première espèce forment les intégrales. C. R. CXII. 1305-1308.

Auf Grund des von dem Verf. (C. R. CXI. 225, F. d. M.

XXII. 1890. 487) mitgeteilten Satzes, dass die fünfzehn hyperelliptischen Functionen erster Ordnung den fünfzehn Elementen a_{mn}, p_h, v_h $(m, n, h = 1, 2, 3)$ eines orthogonalen Systems proportional sind, folgen aus den Beziehungen zwischen den Grössen a_{mn}, p_h, v_h zahlreiche Differentialgleichungen und algebraische Relationen zwischen den genannten Functionen. Eine Reihe solcher Gleichungen wird in der vorliegenden Note aufgestellt. Kr.

F. Caspary. Sur une méthode élémentaire pour établir les équations différentielles dont les fonctions thêta forment les intégrales. C. R. CXII. 1120-1123.

Herr Caspary hat sich wiederholt mit den altbekannten Beziehungen zwischen orthogonalen Substitutionen und elliptischen Functionen beschäftigt, ohne jedoch zu wesentlich neuen Resultaten zu gelangen. Von grösserer Bedeutung sind seine Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen den Elementen eines orthogonalen Systems und den Thetafunctionen mehrerer Argumente; denn sie liefern, wie hier gezeigt wird, eine elegante Methode zur Aufstellung von Differentialgleichungen, deren Integrale solche Thetafunctionen sind. St.

F. Caspary. Sur les deux formes sous lesquelles s'expriment, au moyen des fonctions thêta de deux arguments, les coordonnées de la surface du quatrième degré, décrite par les sommets des cônes du second ordre qui passent par six points donnés. C. R. CXII. 1356-1359.

Herr Schottky hatte gezeigt, dass die Coordinaten eines Punktes der Fläche vierter Ordnung, welche von den Spitzen der Kegel zweiter Ordnung beschrieben wird, die durch sechs gegebene Punkte des Raumes gehen, proportional sind Producten aus vier Thetafunctionen zweier Variabeln, von denen drei ungerade sind. Her Caspary hat eine zweite Darstellung der Coor-

dinaten gefunden, bei welcher sie den Producten aus drei Thetafunctionen proportional sind, von denen eine einzige ungerade ist (vergl. das folgende Referat). St.

F. Caspary. Nouvelle manière d'exprimer, au moyen des fonctions hyperelliptiques de première espèce, les coordonnées d'un point de la surface du quatrième degré décrite par les sommets des cônes du second ordre qui passent par six points donnés. Darboux Bull. (2) XV. 308-317.

Herr Schottky hat zuerst gezeigt (J. für Math. CV. 1889. 238), dass sich die Coordinaten eines Punktes jener Fläche vierten Grades, welche der Ort der Spitzen aller Kegel zweiter Ordnung ist, die durch sechs gegebene Punkte des Raumes gehen, durch Thetafunctionen zweier Argumente ausdrücken lassen, und zwar, dass diese Coordinaten den Producten von je vier Thetafunctionen proportional sind, von welchen immer drei ungerade sein müssen. Der Verfasser, welcher in C. R. CXII. 1356. gezeigt hatte, dass man diese Coordinaten auch durch Producte von je drei Thetafunctionen darstellen kann, von denen immer eine ungerade ist, zeigt in der vorliegenden Note, dass, wenn man statt der passend transformirten Thetafunctionen hyperelliptische Functionen erster Gattung einführt, eine elegante, äusserst einfache Darstellung dieser Coordinaten sowohl wie der Flächengleichung erreicht wird. Diese Darstellung erhält er durch alleinige Benutzung zweier bekannten Relationen zwischen den hyperelliptischen Functionen erster Ordnung und zeigt dann die Identität derselben mit der aus dem Theorem von Pappus abgeleiteten Gleichungsform der Fläche. Der Aufsatz enthält auch eine vollständige Litteraturangabe über diese interessante Fläche vierter Ordnung, welche geeignet scheint, einesteils wichtige Relationen zwischen den hyperelliptischen Functionen aufzudecken, während andernteils aus des Verfassers Darstellung wieder interessante geometrische Folgerungen gezogen werden können. Bm.

E. PASCAL. Sulle sestiche di contatto alla superficie di Kummer. (Memoria VII.) Annali di Mat. (2) XIX. 159-176.

Die vorliegende Abhandlung bildet die Fortsetzung jener Untersuchungen des Verf. (Annali di Mat. (2) XVIII. 131 und 227, F. d. M. XXII. 1890. 492), welche sich im Anschlusse an die Vorlesungen des Hrn. F. Klein (ausgearbeitet von H. Burkhardt. Math. Ann. XXXV. 198, F. d. M. XXI. 1889. 496) mit den hyperelliptischen Functionen erster Ordnung und speciell mit der Darstellung der Kummer'schen Fläche durch dieselben beschäftigen. Kr.

G. LANGE. Ueber die linearen homogenen Differentialgleichungen, denen die Periodicitätsmoduln Abel'scher Integrale genügen für den Fall, dass die Irrationalität dritten Grades ist. Diss. Halle. 8°.

W. F. OSGOOD. Zur Theorie der zum algebraischen Gebilde $y^m = R(x)$ gehörigen Abel'schen Functionen. Diss. Erlangen. 61 S. 8°. (1890.)

D. Kugel- und verwandte Functionen.

G. LEJEUNE DIRICHLET. On the series whose general term involves two angles and which serves to represent an arbitrary function between given limits. Tokio Math. Ges. IV. 9-32.

Englische, von Herrn Fujisawa gelieferte Uebersetzung der Abhandlung aus J. für Math. XVII. 35-56. Lp.

A. MASING. Die Anwendung des Princips der höchsten und kleinsten Exponenten zur Bestimmung der Form der Kugelfunctionen. Mosk. Math. Samml. XVI. 173-176.

Es wird das ganze Integral der Gleichung

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y = 0$$

nach der Methode der unbestimmten Coefficienten und Exponenten ermittelt. Wi.

R. Fujisawa. Note on a new formula in spherical harmonics. Tokio Math. Ges. IV. 7-8, Mess. (2) XXI. 40-41.

Bezeichnet $P_n(\cos\gamma)$ den bekannten Coefficienten in der Entwickelung von $(1-2a\cos\gamma+a^2)^{-\frac{1}{2}}$, und setzt man $Q_n = \sum_{i=0}^{n} P_i P_{n-i}$, so ist $Q_n - Q_{n-2} = 2\cos n\gamma$. R. M.

F. Caspary. Sur les fonctions sphériques. S. M. F. Bull. XIX. 11-18.

Der Verfasser reproducirt zunächst verschiedene auf die Kugelfunctionen bezügliche Recursionsformeln und leitet aus denselben durch Differentiation und Combination mehrerer derselben die Gleichung ab:

$$(1)\qquad \frac{d^{\lambda+1}(x^2-1)^{\mu+1}P_n^{(\mu+1)}}{dx^{\lambda+1}} = C(x^2-1)^{\mu-\lambda}P_n^{(\mu-\lambda)}.$$

Darin ist P_n die einfache Kugelfunction, die oberen Indices an P_n sind Differentiationsindices, und die Constante C hat den Wert

$$(2)\qquad C = (n-\mu)\dots(n-\mu+\lambda)(n+\mu-\lambda+1)\dots(n+\mu+1)$$
$$(\lambda = 0, 1, 2, \dots, \mu),\quad (\mu = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Aus Gleichung (1) ergeben sich mehrere Verallgemeinerungen bekannter Formeln, so z. B. für $\lambda = \mu$ eine Verallgemeinerung der Differentialgleichung der Kugelfunctionen, für $\lambda = \mu-1$ und durch Anwendung einer Beltrami'schen Formel für $(x^2-1)P_n'$ eine Verallgemeinerung der letzteren. Endlich lassen sich aus (1) auch die Formeln von Rodrigues und Jacobi herleiten.

Weiter wird durch Differentiation der vorher erwähnten Beltrami'schen Formel eine Formel gewonnen, die man als Ver-

allgemeinerung einer Hermite'schen Formel ansehen kann, die aber ohne erhebliches Interesse ist. Die zum Schluss gemachte Bemerkung, dass sich alle für die P_n abgeleiteten Formeln mittels des Neumann'schen Integralausdrucks auf die Q_n übertragen lassen, findet sich schon bei Neumann. Wn.

O. Callandreau. Sur le calcul des polynômes $X_n(\cos\vartheta)$ de Legendre pour les grandes valeurs de n. Darboux Bull. (2) XV. 121-124.

Aus der Darstellung der Kugelfunction X_n einerseits und der Bessel'schen Function J (in der gewöhnlichen Bezeichnung J_0) andererseits durch bestimmte Integrale ergiebt sich folgende Beziehung zwischen beiden Functionen:

$$(1) \qquad X_n(\cos\vartheta) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty e^{-x\cos\vartheta} J(x\sin\vartheta) x^n \, dx.$$

Darin ist $0 \leq \vartheta \leq \pi$ zu nehmen. Setzt man auf der rechten Seite von (1) für die Function J die bekannte semiconvergente Reihe, so erhält man für X_n eine zuerst von Hrn. Darboux (cf. F. d. M. X. 1878. 279) aufgestellte Reihe, die eine Verallgemeinerung des Laplace'schen Näherungswertes von $X_n(\cos\vartheta)$ bildet und zur angenäherten Berechnung dieser Function für grosse n benutzt werden kann.

Ferner erhält man aus dem Restgliede der Entwickelung von J, das sich nach einer früheren Untersuchung des Verfassers (cf. F. d. M. XXII. 1890. 523) als Doppelintegral darstellen lässt, eine neue Form des Restes der Darboux'schen Reihe. Durch Discussion des neuen Restgliedes (dasselbe hat die Form eines dreifachen Integrals) folgt, dass der Rest der Reihe für $X_n(\cos\vartheta)$, absolut genommen, kleiner ist als das erste nicht berücksichtigte Glied der Reihe. Ferner lässt sich in gewissen Fällen auch das Vorzeichen des Restes bestimmen. Wn.

M. Lerch. Démonstration élémentaire de la formule asymptotique relative aux polynômes de Legendre. Prag. Akad. Verh. I_2. 149-158. (Böhmisch mit französischem Résumé.)

Die durch die Gleichung

$$\frac{1}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^\mu} = \Sigma\alpha^n Z_n \qquad (0<\mu<1)$$

definirten Functionen Z_n nehmen für sehr grosse Werte von n die Form an

$$Z_n = \frac{n^{\mu-1}}{2^\mu\Gamma(\mu)}(x+\sqrt{x^2-1})^n\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)^\mu(1+\varepsilon_n),$$

wo

$$\lim_{n=\infty}\varepsilon_n = 0$$

ist. Damit die vorstehende Form gültig sei, muss

$$|x+\sqrt{x^2-1}|>1$$

sein; ferner ist unter der μ^{ten} Potenz der Hauptwert derselben zu verstehen. Für $\mu=\frac{1}{2}$ ergiebt sich der asymptotische Wert der Kugelfunctionen.

Das Resultat wird noch dahin erweitert, dass die durch die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1+r_1\alpha+r_2\alpha^2+\cdots+r_p\alpha^p}} = \Sigma\alpha^n Y_n$$

definirten Functionen Y_n für grosse n den asymptotischen Wert

$$\frac{\varrho_1^n}{\sqrt{n\pi}}\prod_{\sigma=2}^{p}\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_1-\varrho_\sigma}}$$

haben. Hierin ist $\frac{1}{\varrho_1}$ der absolute Wert der kleinsten Wurzel der Gleichung

$$1+r_1\alpha+r_2\alpha^2+\cdots+r_p\alpha^p = 0,$$

während die ϱ_σ die reciproken Werte der übrigen Wurzeln dieser Gleichung sind. Wn.

J. Perry. Tables of spherical harmonics, with examples of their practical use. Nature XLIII. 118-119.

Bericht über einen Vortrag in der Londoner Physikalischen Gesellschaft. Der Verfasser definirt die fragliche Function als eine homogene Function von x, y, z, welche der Gleichung genügt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Die Anwendungen beziehen sich auf Beispiele aus der Potentialtheorie. Lp.

J. Perry. Table of zonal spherical harmonics, calculated by Messrs. C. E. Holland, P. R. Jones, and C. G. Lamb. With a short explanation and some illustrations of its uses. Phil. Mag. (5) XXXII. 512-523.

Bezeichnet man die betreffende Function mit $P_n(\cos\theta)$, so giebt die Tafel die Werte von P_n für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ von $\theta = 0^0$ bis $\theta = 90^0$, von Grad zu Grad auf vier Decimalstellen. Einige elementare Beispiele ihres Gebrauchs sind zugefügt.

Gbs. (Lp.)

E. W. Hobson. Systems of spherical harmonics. Lond. M. S. Proc. XXII. 431-449.

Der Verfasser erweitert den Begriff der Kugelfunctionen, indem er an folgende bekannte Eigenschaft anknüpft: Sind r, ϑ, φ räumliche Polarcoordinaten, so erhält man die allgemeinste Kugelfunction n^{ter} Ordnung [in der bei uns üblichen Bezeichnung $r^n X_n(\vartheta, \varphi)$] dadurch, dass man $\frac{1}{r}$ nach n beliebigen Richtungen differentiirt und dann mit r^{2n+1} multiplicirt (vergl. z. B. Thomson und Tait, Theoret. Phys. I, Zusatz B; Maxwell, Electricity and Magnetism, Vol. I, part. I, Cap. IX). Speciell ist

$$r^n P_n(\cos\vartheta) = (-1)^n \frac{r^{2n+1}}{n!}\frac{\partial^n\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^n},$$

falls z die Axe des Polarcoordinatensystems ist. Die fragliche Erweiterung besteht nun darin, dass man von der erwähnten

Eigenschaft als Definition ausgeht, dabei aber an Stelle von $\frac{1}{r}$ eine andere Lösung der Gleichung $\Delta V = 0$ setzt, und zwar eine solche, die in Bezug auf r vom Grade -1 ist. Die allgemeinste Lösung von $\Delta V = 0$, die diese Eigenschaft hat, ist:

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{r} F[\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\vartheta \pm i\varphi],$$

oder, wenn man rechtwinklige Coordinaten statt der Polarcoordinaten einführt:

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{r} f\left(\frac{x \pm iy}{r+z}\right).$$

Je nach der Wahl der willkürlichen Function f erhält man auf diese Weise verschiedene Systeme von Kugelfunctionen.

Es wird nun zunächst gezeigt, dass man die Differentiation des Ausdrucks (b) nach einer beliebigen Richtung durch eine Differentiation eines anderen Ausdrucks derselben Form nach der Axe z ersetzen kann, so dass die allgemeine Kugelfunction die Form hat

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[\frac{1}{r} f\left(\frac{x \pm iy}{r+z}\right)\right],$$

oder auch

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}\left[f_1\left(\frac{x \pm iy}{r+z}\right)\right].$$

Sodann werden einzelne, aus speciellen Annahmen über f sich ergebende Functionen untersucht. Nimmt man in dem Ausdruck (a) für F eine lineare Function, so erhält man die gewöhnlichen Kugelfunctionen zweiter Art (der Verfasser nennt dieselben line-harmonics, während die Kugelfunctionen erster Art point-harmonics genannt werden). Speciell wird

$$\frac{Q_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r} \log \sqrt{\frac{r+z}{r-z}}\right).$$

Daraus ergiebt sich für Q_n eine Formel, die der Verfasser für neu hält, die indessen schon früher von Hermite und Beltrami abgeleitet ist (cf. F. d. M. XVI. 1884. 452; XIX. 1887. 507).

Uebrigens mag bemerkt werden, dass der Verfasser, abweichend von der üblichen Definition, in den Gleichungen für $P_n(\cos\vartheta)$ und $Q_n(\cos\vartheta)$ rechts den Factor $\frac{1}{2^n}$ hinzufügt; hier ist jener Factor fortgelassen.

Die zugeordneten Functionen erster und zweiter Art gewinnt der Verfasser durch n-fache Differentiationen nach z aus folgenden Ausdrücken:

$$\frac{(r\pm z)^m}{r}, \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{r}[(z+r)^m+(z-r)^m]\log\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}.$$

Er untersucht weiter noch kurz die aus der Differentiation der Functionen

$$\frac{1}{r}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{r}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\log\sqrt{\frac{r+z}{r-z}}$$

hervorgehenden Functionen, die er circulatory harmonics nennt, dehnt die Untersuchungen auf die Cylinderfunctionen aus und leitet zum Schluss für die allgemeinste von φ unabhängige Kugelfunction (d. h. für die allgemeinste von φ unabhängige Lösung der Gleichung $\Delta V=0$) den Ausdruck ab:

$$\int_0^\pi f(z+i\sqrt{x^2+y^2}\cos\psi)d\psi+\int_0^\infty F[z+i\sqrt{x^2+y^2}\cosh u]du$$

(cosh ist der hyperbolische Cosinus), sowie die entsprechenden Ausdrücke für den Factor von $\cos m\varphi$ (resp. $\sin m\varphi$) in der Entwickelung von V nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von φ.

Der Verf. erwähnt, dass die Idee der hier betrachteten Verallgemeinerung schon von Donkin (Philos. Trans. 1857) ausgesprochen, dass der von diesem aufgestellte Ausdruck für die allgemeine Kugelfunction indessen zu complicirt ist, um daraus weitere Schlüsse zu ziehen. Wn.

L. Gegenbauer. Ueber die Ringfunctionen. Wien. Ber. C. 745-766.

Um von den Kugelfunctionen auf die sogenannten Ringfunctionen, d. h. die Functionen, die bei den Potentialaufgaben eines Kreisrings auftreten (vgl. über dieselben u. a. F. d. M. XIV.

1882. 799, XXI. 1889. 515), zu gelangen, muss man dem Index der Kugelfunctionen andere als ganzzahlige Werte beilegen. Macht man dasselbe mit der vom Verfasser früher (cfr. F. d. M. XVI. 1884. 452) untersuchten Function $C_n^\nu(x)$, die sich als Coefficient von α^n bei der Entwickelung von

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}$$

ergiebt, und welche daher als eine verallgemeinerte Kugelfunction angesehen werden kann, so gelangt man zu einer naturgemässen Erweiterung des Begriffs der Ringfunctionen. Diese verallgemeinerten Ringfunctionen bilden den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Der Verfasser geht bei derselben indessen nicht von der vorher erwähnten Function $C_n^\nu(x)$ aus, sondern von der in seiner früheren Arbeit ebenfalls untersuchten Function $D_n^\nu(x)$, dem zweiten particulären Integrale der Differentialgleichung, der $C_n^\nu(x)$ genügt. Die für $D_n^\nu(x)$ geltende, nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe behält noch einen Sinn, wenn der untere Index n nicht mehr eine positive ganze Zahl ist; diese Reihe wird daher zur Definition der Function D für beliebige untere Indices benutzt. Von den so definirten Functionen D bieten ein besonderes Interesse dar die Functionen $D_{n+\nu-\varrho}^\varrho(x)$, wo n eine ganze Zahl, ϱ und ν bebeliebig sind. Für diese gilt nämlich die Gleichung:

$$(1)\qquad \frac{1}{(x-y)^{\nu+\varrho}} = \frac{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)}{\Pi(\nu+\varrho-1)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)D_{n+\nu-\varrho}^\varrho(x)C_n^\nu(y),$$

eine Gleichung, die erkennen lässt, dass gerade die Function $D_{n+\nu-\varrho}^\varrho(x)$ eine naturgemässe Verallgemeinerung der Ringfunction zweiter Art bildet. Diese Function wird daher im folgenden mit $R_{n,2}^{\varrho,\nu}(x)$ bezeichnet, und für dieselbe werden verschiedene Integraldarstellungen mitgeteilt, von denen nur die eine hier angeführt werden möge:

$$R_{n,2}^{\varrho,\nu}(x) = \frac{x^{\varrho-1}}{i^{n+\nu}}\int_0^{\infty} e^{-xz}z^{\varrho-1}J^{n+\nu}(iz)\,dz.$$

Darin ist J die Bessel'sche Function mit dem Index $n+\nu$. Sodann werden mehrere recurrente Relationen mitgeteilt, die zwi-

schen den R mit verschiedenen oberen und unteren Indices bestehen. Aus ihnen ergiebt sich weiter, dass die Function $R_{n,2}^{\varrho,\nu}$ der Differentialgleichung

$$(2) \qquad (1-x^2)y''-(2\varrho+1)xy'+[(n+\nu)^2-\varrho^2]y = 0$$

genügt. $R_{n,2}^{\varrho,\nu}$ geht daher für die speciellen Werte $\varrho=\frac{1}{2}$, $\nu=0$ in die gewöhnliche Ringfunction über.

Die Differentialgleichung (2) besitzt die beiden particulären Integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^{2\varrho-1}(it)\,dt}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos it)^{n+\nu+\varrho}}$$

und

$$\int_0^{\infty} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\varrho}\sin^{2\varrho-1}\varphi\,d\varphi,$$

und zwar ist das erste derselben, von einem constanten Factor abgesehen, gleich $R_{n,2}^{\varrho,\nu}$. Das zweite Integral bildet daher die Verallgemeinerung der Ringfunctionen erster Art und wird, mit einem gewissen constanten Factor multiplicirt, $R_{n,1}^{\varrho,\nu}$ genannt.

Auch für die Functionen $R_{n,1}^{\varrho,\nu}$ werden mehrere Recursionsformeln abgeleitet, ferner verschiedene Beziehungen zwischen Reihen, die nach den Functionen R oder nach Producten derselben fortschreiten, und Integralen. Endlich wird für die in Rede stehenden Functionen das folgende Additionstheorem aufgestellt. Es ist

$$R_{n,1}^{\varrho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda R_{n,1}^{\varrho+\lambda,\nu}(x_1)R_{n,1}^{\varrho+\lambda,\nu}(x_2)(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_2^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}C_\lambda^{\varrho-\frac{1}{2}}(\cos\varphi),$$

wo die a_λ gewisse Constanten bezeichnen. Eine ähnliche Gleichung gilt für $R_{n,2}^{\varrho,\nu}$. Wn.

S. Pincherle. Una nuova estensione delle funzioni sferiche. Bologna Mem. (5) I. 337-369.

Der Verfasser betrachtet die durch die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{t^3-3tx+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$$

definirte Function $P_n(x)$. $P_n(x)$ ist eine ganze rationale Function von x, die der Differenzengleichung

$$(2)\qquad 2(n+1)F(n+1)-3(2n+1)xF(n)+(2n-1)F(n-2)=0$$

genügt, und zwar ist $P_{-2}=0$, $P_{-1}=0$, $P_0=1$. Der Differenzengleichung (2) genügen ausser P_n noch zwei andere Functionen Q_n und R_n, die bei passender Fortsetzung von Q_{-1}, Q_0, Q_1, R_{-1}, R_0, R_1 ganze Functionen von x vom Grade $n-1$, resp. $n-2$ sind.

Der Differenzengleichung (2) genügt auch das elliptische Integral

$$(3)\qquad \omega_n(x) = -\int_{e_3}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}\sqrt{t^3-3tx+1}},$$

wo e_3 die absolut grösste Wurzel der Gleichung

$$(4)\qquad t(x)\equiv t^3-3tx+1=0$$

ist. ω_n muss sich daher durch P_n, Q_n, R_n ausdrücken lassen, und zwar ergiebt sich

$$(5)\qquad \omega_n(x) = P_n(x)\int_0^{\omega}\frac{du}{\wp(u)}-\tfrac{1}{2}\eta Q_n(x)+\omega R_n(x),$$

falls $\wp(u)$ die Weierstrass'sche Function ist, ω und η die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung

$$[\wp(\omega)=e_3,\ \zeta(\omega)=\eta].$$

Neben dem elliptischen Integrale (3) spielt für die weitere Untersuchung noch das folgende eine Rolle:

$$(6)\qquad \sigma_n = \int_0^{e_1}\frac{t^n dt}{\sqrt{t^3-3tx+1}},$$

in dem e_1 die absolut kleinste Wurzel der Gleichung (4) ist. σ_n genügt der Differenzengleichung

$$(7)\quad (2n+1)F(n+1)-3x(2n-1)F(n-1)+2(n-1)F(n-2)=0.$$

Die drei von einander unabhängigen Lösungen von (7) seien $A_n(x)$, $B_n(x)$, $C_n(x)$; dieselben sind bei passender Bestimmung von A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2 ganze Functionen von x von den Graden $\frac{n}{2}-1$, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}-1$ für gerade n, resp. von den

Graden $\frac{n-3}{2}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-1}{2}$ für ungerade n. Mittels derselben lässt sich das Integral (6) folgendermassen ausdrücken:

$$(8)\qquad \sigma_n(x) = A_n(x) + B_n(x).\sigma_0 + C_n(x).\sigma_1.$$

Zwischen den Integralen der Differenzengleichungen (2) und (7) finden nun recurrente Relationen statt, von denen folgende hier Platz finden mögen. Es ist

$$(9)\qquad A_n = (-1)^n \frac{4.6\ldots 2n}{3.5\ldots(2n-1)}(R_n Q_{n-1} - Q_n R_{n-1}),$$

umgekehrt wird

$$(9^a)\qquad P_n = (-1)^n \frac{3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots 2n}(B_n C_{n+1} - C_n B_{n+1}),$$

und ähnliche Gleichungen bestehen für B_n, C_n, Q_n, R_n.

Nach einem Excurs über die Wurzeln der Gleichung (4) und dem Nachweise, dass die Function $\sigma_n(x)$ sich für gerade x in eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln lässt, deren Anfangsglied $\frac{1}{x^{n+1}}$ ist, wendet sich der Verfasser den Reihen zu, die nach den Functionen $P_n(x)$, resp. $\sigma_n(x)$ fortschreiten. Die Grundlage für die Entwickelung einer Function in eine derartige Reihe bildet die Gleichung:

$$(10)\qquad \frac{1}{x-z} = \tfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sigma_n(z)P_n(x).$$

Aus derselben ergiebt sich, dass jede in der Nähe von $x=0$ reguläre Function sich in eine Reihe der Form

$$(11)\qquad f(x) = \Sigma a_n P_n(x)$$

entwickeln lässt, die innerhalb einer einfach zusammenhängenden, von einer gewissen Curve C_ϱ begrenzten Fläche convergirt, und deren Coefficienten durch die Gleichung

$$(11^a)\qquad a_n = -\frac{3}{4\pi i}(2n+1)\int\limits_{C_\varrho}\sigma_n(z)f(z)dz$$

bestimmt sind. Dagegen lässt sich jede in der Umgebung von $z=\infty$ reguläre Function in eine Reihe von der Form

$$(12)\qquad f(z) = \Sigma b_n \sigma_n(z)$$

entwickeln, die in dem Teil der complexen Ebene convergirt, der ausserhalb einer gewissen geschlossenen Curve C_ϱ (ohne Doppel- oder mehrfache Punkte) liegt. Die Coefficienten der Reihe (12) sind

$$(12^a) \qquad b_n = -\frac{3(2n+1)}{4\pi i}\int_{C_\varrho} f(x)P_n(x)dx.$$

Es werden noch die Bedingungen der Convergenz der besprochenen Reihen, insbesondere der Reihe (10) erörtert, und sodann wird zum Schluss gezeigt, dass die Functionen $P_n(x)$ und $\sigma_n(x)$ je einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung genügen, und zwar den folgenden:

$$4(4x^2-1)P_n'''+96x^2P_n''-x(12n^2+24n-91)P_n' \\ -n(2n+3)(2n+9)P_n = 0,$$

$$4(4x^2-1)\sigma_n'''+144x^2\sigma_n''-x(12n^2-24n-291)\sigma_n' \\ -(n-3)(2n-7)(2n+5)\sigma_n = 0.$$

Wn.

W. D. Niven. On ellipsoidal harmonics. Lond. Phil. Trans. CLXXXII(A). 231-278.

Der Verfasser bemerkt, dass man die Theorie der Lamé'schen Functionen („ellipsoidal harmonics") gewöhnlich auf Lösungen der Laplace'schen Gleichung gründet, indem man dieselben auf passende Weise durch Glieder mit elliptischen Coordinaten als unabhängigen Variabeln ausdrückt, und dass diese von Lamé eingeführte Darstellungsart des Gegenstandes die vollständigste Ausbildung durch die Hand von Heine in seinen „Kugelfunctionen" erhalten hat und wahrscheinlich die directeste und wirksamste für alle praktischen Zwecke ist. Nichtsdestoweniger scheinen ihm jedoch die Cartesischen Gestalten dieser Functionen manche Vorteile hinsichtlich der Klarheit und Verständlichkeit zu besitzen; auch ist er durch das Lesen der Green'schen Abhandlung über Ellipsoide von veränderlicher Dichte und durch die Untersuchung von Thomson und Tait über die Kugelfunctionen dazu geführt worden, die Entwickelung des Gegenstandes durch Cartesische Processe zu versuchen.

Indem der Verf. sich mit dem allgemeinen dreiaxigen Ellipsoide beschäftigt, betrachtet er zuerst die Fälle, welche die auf das Innere des Ellipsoids anwendbaren Formen betreffen, danach die für das Aeussere brauchbaren Formen. Vermittelst gewisser zwischen den Lamé'schen und manchen Kugelfunctionen aufgestellten Beziehungen ist es in erster Stelle möglich, die Cartesischen Formen der Lamé'schen Functionen zu erhalten und demnächst in Lamé'schen Functionen eine Entwickelung zu bestimmen, die an der Oberfläche des Ellipsoids willkürlich vorgegebene Werte hat. Als ein besonderer Fall wird der vorgegebene Wert als eine homogene Function der Coordinaten x, y, z angenommen, und es ist leicht, von da zu dem Falle einer beliebigen, nach aufsteigenden Potenzen von x, y, z entwickelbaren Function überzugehen. Der Verfasser hat auch den reciproken Abstand zwischen zwei Punkten entwickelt, von denen einer auf der Oberfläche liegt.

Der massgebende Satz für äussere Functionen, auf den viele Entwickelungen der Arbeit sich stützen, bezieht sich auf den Ausdruck dieser Functionen mit Hülfe von Differential-Operationen an dem Potential in einem äusseren Punkte für ein Ellipsoid mit veränderlicher Dichte. Der angezogene Satz wird in ähnlicher Art gefunden, wie bei Clerk Maxwell, als er eine physikalische Deutung einer Kugelfunction ermittelte.

Zur Erläuterung betrachtet der Verfasser das Problem des in einem Körper von ellipsoidischer Gestalt inducirten Magnetismus; ferner in einem äusseren Punkte das Potential einer dünnen von ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzten Schale, deren Dichte dem Abstande von einem festen Punkte umgekehrt proportional ist; endlich einen Satz über elektrische Capacität.

Der spätere Teil der Abhandlung enthält Untersuchungen über verschiedene innere und äussere Formen der betrachteten Functionen, verwendbar für verlängerte und abgeplattete Sphäroide. Es wird gezeigt, wie die Functionen des verlängerten Sphäroids auf diejenigen des Kreiscylinders und auf die des Umdrehungs-Paraboloids zurückkommen. Der Schlussteil be-

schäftigt sich mit Beweisen der Additionstheoreme für Lamé'sche Functionen, für Kugelfunctionen zweiter Art und für Bessel'sche Functionen. Cly. (Lp.)

M. Bôcher. Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Gekrönte Preisschrift. Göttingen. Dieterich'sche Universitäts-Buchdruckerei. (W. Fr. Kaestner.) IV + 66 S. 4°.

Siehe Abschnitt X, Capitel 5.

A. Sommerfeld. Die willkürlichen Functionen in der mathematischen Physik. Diss. Königsberg i. Pr. 75 S. 8°.

Die Arbeit betrifft die Darstellung willkürlicher Functionen durch Fourier'sche Reihen und Integrale, sowie durch Reihen, die nach Cylinder- oder Kugelfunctionen fortschreiten. Zur Ableitung der Sätze über die Darstellbarkeit einer Function durch eine der in Rede stehenden Reihen betrachtet der Verfasser jene Reihen als Grenzfälle allgemeinerer Reihen. Letztere werden dadurch gewonnen, dass die einzelnen Glieder der üblichen Reihen mit gewissen, von einer neu eingeführten Hülfsvariable t abhängigen Factoren, Convergenzfactoren genannt, multiplicirt werden. Durch passende Wahl dieser Factoren kann man es erreichen, dass 1) die verallgemeinerten Reihen für beliebige positive Werte von t convergiren, und dass dieselben 2) für $t=0$ in die üblichen Reihen übergehen. Es bleibt dann zu untersuchen, unter welchen Bedingungen bei dem letzteren Grenzübergang die Convergenz erhalten bleibt. Dies die leitende Idee, zu der der Verfasser dadurch geführt ist, dass in der mathematischen Physik gerade Darstellungen von der Art der verallgemeinerten Reihen auftreten.

Zuerst wird das Fourier'sche Integral besprochen, und zwar wird unter dem Integralzeichen der Factor $e^{-\lambda^2 t}$ hinzugefügt. Es wird also die Function

$$(1)\qquad \Phi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} d\lambda \int_a^b f(\alpha)\cos\lambda(x-\alpha)d\alpha$$

betrachtet und gezeigt, dass, falls $a < x < b$ und $f(x)$ eine innerhalb des Intervalls $a \ldots b$ stetige Function ist,

$$(2) \qquad \lim_{t=0} \Phi(t) = f(x)$$

ist. Der Beweis wird dadurch geführt, dass in (1) die Reihenfolge der Integration vertauscht und das Integral nach λ ausgeführt wird. Von dem entstehenden einfachen Integral verschwinden beim Uebergang zu $t = 0$ alle Bestandteile mit Ausnahme der unmittelbar bei $\alpha = x$ liegenden. Es bleibt also nur der Wert von

$$\lim_{t=0} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{x-\delta}^{x+\delta'} f(\alpha) e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}} d\alpha$$

zu ermitteln. Wählt man die kleinen Grössen δ und δ' so, dass $\frac{\delta}{\sqrt{t}}$ für kleine t sehr gross wird, so lässt sich das letzte Integral durch Einführung einer neuen Integrationsvariable auf eine Form bringen, die den Grenzübergang auszuführen ermöglicht. Nachdem noch gezeigt ist, dass das Resultat für beliebige integrable Functionen $f(x)$ zwischen beliebigen reellen Grenzen richtig bleibt, wird ein dem Integral (1) analoges Integral untersucht, bei dem nur $e^{-\lambda t}$ an Stelle von $e^{-\lambda^2 t}$ steht. Auch dieses zweite Integral wird gleich $f(x)$ für $t = 0$, und zwar unter den gleichen Bedingungen für die Function f.

Entsprechende Sätze gelten für die Fourier'schen Reihen. Die Reihe

$$(3) \qquad u = \sum_0^\infty e^{-n^2 t}(A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

in der A_n und B_n sich in bekannter Weise durch $f(x)$ ausdrücken, lässt sich vermittelst einer aus der Theorie der Theta-Reihen bekannten Formel transformiren, wodurch sich

$$(4) \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha) \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\alpha+2\pi n)^2}{4t}}$$

ergiebt. Beim Grenzübergang für $t = 0$ verschwinden rechts alle Glieder ausser dem für $n = 0$. Der Wert, den letzteres annimmt, ergiebt sich aus den bei den Fourier'schen Integralen

abgeleiteten Resultaten, und man erhält

$$(5)\qquad \lim_{t=0} u = f(x),$$

ein schon von Harnack (Schlömilch Z. XXXII, cf. F. d. M. XIX. 1887. 1190) abgeleitetes Resultat. Auch diese Untersuchung wird auf die Reihe ausgedehnt, die den Convergenzfactor e^{-nt} statt $e^{-n^2 t}$ hat.

Das zweite Capitel beschäftigt sich mit der Darstellung willkürlicher Functionen durch Cylinderfunctionen. Die Grundlage der Entwickelung bildet hier folgende, schon von Hankel (Math. Ann. VIII. 470, cf. F. d. M. VII. 1875. 301) aufgestellte Formel:

$$(6)\qquad \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} J_n(\lambda x) J_n(\lambda a)\lambda\, d\lambda = \frac{i^n}{2t} e^{-\frac{x^2+a^2}{4t}} J_n\left(\frac{-iax}{2t}\right).$$

Für diese Formel wird hier zunächst ein neuer, sehr einfacher Beweis gegeben, der darauf beruht, dass in der Gleichung

$$(7)\qquad \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu e^{-(\lambda^2+\mu^2)t} \cos\lambda(x-\alpha)\cos\mu(y-\beta)$$
$$= \frac{1}{4t} e^{-\frac{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}{4t}}$$

an Stelle von x, y, α, β, λ, μ Polarcoordinaten r, ψ, r', ψ', ϱ, φ eingeführt und dann beide Seiten nach Cosinus der Vielfachen von $\psi-\psi'$ entwickelt werden. Aus (6) folgt, dass an der Grenze für $t=0$ das auf der linken Seite von (6) stehende Integral gleichmässig stetig in die Function

$$\frac{1}{2\sqrt{t\alpha x\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}}$$

übergeht, falls x und α reelle positive Zahlen sind, dagegen in die Function

$$\frac{1}{2t} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \quad\text{resp.}\quad \frac{1}{2t} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

falls x resp. α gleich 0 ist und gleichzeitig $n=0$, während für $x=0$ oder $\alpha=0$ und $n>0$ der Grenzwert des Integrals 0 ist. Auf diese vorbereitenden Resultate gestützt, beweist der Verfasser durch ähnliche Ueberlegungen wie im ersten Capitel die Glei-

chung:

$$(8)\qquad \lim_{t=0}\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}\lambda\,d\lambda\int_a^b f(\alpha)J_n(\lambda x)J_n(\lambda\alpha)\alpha\,d\alpha = f(x).$$

Darin sind a und b positive Zahlen, t ist ein positiver Parameter, n eine positive ganze Zahl (incl. 0), während $f(x)$ in dem Intervall $a < x < b$ stetig ist. Die Gleichung (8) gilt noch, wenn man a nach 0 ausdehnt und $x = 0$ setzt, für den Fall $n = 0$; sie gilt für $a = 0$, $x = 0$ nicht mehr, wenn $n > 0$, vielmehr wird dann die rechte Seite von (8) gleich 0.

Ferner wird bewiesen, dass die Gleichung (8) noch richtig bleibt, wenn links $e^{-\lambda t}$ an Stelle von $e^{-\lambda^2 t}$ gesetzt wird. Dazu wird die folgende Hülfsformel benutzt:

$$(9)\qquad \int_0^\infty e^{-\lambda t}J_n(\lambda x)J_n(\lambda\alpha)\lambda\,d\lambda = \frac{t}{\pi}\left(\frac{2}{A}\right)^{\frac{3}{2}} P_m^{\frac{1}{2}}(\xi).$$

Darin ist $P_m^{\frac{1}{2}}$ die zugeordnete Kugelfunction mit dem Hauptindex $\frac{1}{2}$ ferner

$$A^2 = [t^2+(x+\alpha)^2][t^2+(x-\alpha)^2],$$
$$\xi = \frac{t^2+x^2+\alpha^2}{A}.$$

Zur Ableitung von (9) wird ein der linken Seite von (7) analoges Doppelintegral betrachtet, in dem nur $\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ an Stelle von $\lambda^2+\mu^2$ steht, und dies Doppelintegral wird nach Einführung von Polarcoordinaten auf doppelte Weise nach Cosinus der Vielfachen von $\psi-\psi'$ entwickelt.

Wesentlich andere Convergenzfactoren als in den bisherigen Fällen treten bei der Entwickelung einer Function nach Kugelfunctionen auf, die den Inhalt des dritten (Schluss-) Capitels bildet. Durch Untersuchung des dreifachen Integrals, das dem in (7) auftretenden Doppelintegral analog ist, gewinnt der Verf., indem er in jenem dreifachen Integral räumliche Polarcoordinaten einführt und einmal das Integral, sodann den durch Ausführung der Integration sich ergebenden Wert in eine Reihe entwickelt, folgenden Hülfssatz: Es ist

$$(10)\qquad \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi}P^n(\cos\gamma)C_2^n(t) = \frac{1}{2\pi t}e^{-\frac{1-\cos\gamma}{t}}.$$

Darin hat der Convergenzfactor $C_2^n(t)$ den Wert:

$$(11) \qquad C_2^n(t) = i^n \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{1}{t}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{-i}{t}\right).$$

Wie in den beiden ersten Capiteln zwei Convergenzfactoren, $e^{-\lambda^2 t}$ und $e^{-\lambda t}$ zu den gleichen Resultaten führten, so existirt auch hier neben dem Factor $C_2^n(t)$ ein anderer

$$(12) \qquad C_1^n(t) = -2t\frac{dQ^n(t+1)}{dt},$$

wo, wie üblich, Q^n die Kugelfunction zweiter Art bezeichnet; und es ist

$$(13) \qquad \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} P^n(\cos\gamma)\, C_1^n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{t}{(t+1-\cos\gamma)^2}.$$

Aus den erwähnten Hülfssätzen folgt, dass, wenn t ein positiver Parameter, $f(\vartheta, \varphi)$ eine stetige Function,

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')$$

ist,

$$(14) \qquad \lim_{t=0} \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} C_\sigma^n(t) \int_0^\pi \sin\vartheta' d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' f(\vartheta'\varphi') P^n(\cos\gamma) = f(\vartheta, \varphi)$$

ist. Darin bezeichnet $C_\sigma^n(t)$ einen der Factoren (11) oder (12).

Zum Schluss wird darauf hingewiesen, dass man für die Entwickelung nach Kugelfunctionen noch andere Convergenzfactoren finden kann. So folgt z. B. durch Betrachtungen der Potentialtheorie, dass $(1-t)^n$ ein solcher Factor ist.

Wn.

Druckfehler.

S. 446 Gl. (2) statt lim lese man $\lim\limits_{n=\infty}$.

„ 447 Zeile 2 von oben statt $(s\pi)^{\frac{1}{2}(h-1)}$ lese man $(2\pi)^{\frac{1}{2}(h-1)}$.

„ „ „ 7 „ unten statt $\psi_n(s)$ lese man $\psi(s)$ und ihrer Ableitungen.

„ „ „ 2 „ „ „ $\Psi'(s)$ lese man $\psi(s)$.

„ 449 „ 16 „ oben statt $\Phi(s)$ lese man $Q(s)$.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

C. Segre. Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Rivista di Mat. I. 42-66.

G. Peano. Osservazioni sull'articolo precedente. Rivista di Mat. I. 66-69.

C. Segre. Una dichiarazione. G. Peano. Risposta. Rivista di Mat. I. 154-159.

Der Aufsatz des Herrn Segre besteht aus einer Sammlung von Bemerkungen und Ratschlägen, welche er für seine Schüler bestimmt und bescheiden als nützlich nur für Anfänger bezeichnet. Nachdem er an die völlige Umgestaltung erinnert hat, welche die Geometrie in unserem Jahrhunderte erfahren hat, empfiehlt er im § I seiner Arbeit (und auch anderswo) der mathematischen Jugend, jene zu leichten Untersuchungen zu meiden, zu denen die heutige Theorie der geometrischen Verwandtschaften führen kann. Um wirklich wichtige Forschungen kennen zu lernen, giebt er (§ II) den Anfängern den Rat, die Klassiker der ex-

acten Wissenschaften zu studiren und ihre mathematischen Gedanken zu verarbeiten. Einen mächtigen Antrieb zu mathematischer Forschung findet er in der Anwendung unserer Wissenschaft auf die Erklärung physikalischer Erscheinungen (§ III); ferner eine Methode, um die Kräfte zu üben, solche Untersuchungen durchzuführen, in der gleichzeitigen Beschäftigung mit der Analyse und der Geometrie (§ IV). Das führt natürlich den Verfasser auf die Bemerkung, dass, wenn man dem Anfange unseres Jahrhunderts die Schöpfung der reinen (analytischen und geometrischen) Methoden verdankt, jetzt sich die Ueberzeugung verbreitet, dass es ausserordentlich nützlich ist, beide Methoden wechselweise zu brauchen (§ V). Der Verfasser spricht nachher (§ VI) von den nicht ganz strengen Methoden, mit denen man bei einigen geometrischen Untersuchungen sich vorläufig begnügen muss, und setzt sehr klar aus einander, in welchen Fällen und in welchem Masse denselben ein Platz in der Wissenschaft eingeräumt werden kann. Der nächste Paragraph ist der Aufzählung der vornehmsten Aufgaben gewidmet, welche von der Transformationstheorie ihre Auflösung erwarten. Die drei letzten Paragraphen behandeln die n-dimensionale Geometrie. Im § VIII lernt man die drei verschiedenen Gesichtspunkte kennen, von denen aus dieselbe betrachtet wird; im § IX werden die wichtigsten Aufgaben genannt, welche sie auflösen muss; im § X endlich wird auf verschiedene Weisen bewiesen, dass der Raum ohne Rücksicht auf die Zahl seiner Dimensionen von nun an das Gebiet sein muss, in welchem die geometrischen Gebilde betrachtet werden.

Der Segre'sche Aufsatz enthält mehr, als man aus den wenigen Zeilen ersehen kann, auf die wir der Kürze wegen uns beschränken mussten; wir empfehlen seine Lectüre allen denen, welche als Geometer schon arbeiten oder zu arbeiten wünschen. Einige der in den §§ VI und VIII dargelegten Ideen haben zwischen dem Verfasser und dem Leiter der „Rivista" eine Polemik veranlasst, über die zu berichten wir für unnötig erachten. La.

EDWARD T. DIXON. The foundations of geometry. Cambridge. Deighton, Bell and Co. VII + 143. [Nature XLIII. 554-555.]

Dieses Werk über die Grundlagen der Geometrie ist es wert, sorgfältig gelesen zu werden. Der I. Teil „über den logischen Stand der Wissenschaft der Geometrie" hat psychologische Tragweite, ist aber mit dem übrigen Werke eng verbunden. Im II. Teile entwickelt der Verf. seine „subjective Theorie der Geometrie, abgeleitet aus den beiden Grundvorstellungen der Lage und der Richtung". Folgendes ist die „implicite Definition der Richtung": a) Eine Richtung kann durch die Nennung zweier Punkte angegeben gedacht werden, als die Richtung von dem einen zu dem anderen. b) Wenn ein Punkt sich von einer gegebenen Lage beständig in einer gegebenen Richtung bewegt, so giebt es nur einen Weg oder eine Folge von Lagen, die er durchlaufen kann. (Solcher Weg kann ein „directer Weg" heissen, und eine stetige Folge von Punkten, die solche Lagen einnehmen, eine „gerade Linie".) c) Wenn die Richtung von A nach B dieselbe ist wie die von B nach C, so ist die von A nach C die nämliche Richtung. d) Wenn zwei unbegrenzte gerade Linien, die sich schneiden, beide von einer dritten Geraden in zwei unterschiedlichen Punkten geschnitten werden, so schneidet jede unbegrenzte Gerade, welche sich nach derselben Richtung erstreckt wie diese letzte, und welche die eine der beiden ersten schneidet, auch die andere. Diese Definition, sowie die „implicite Definition der Lage" (die thatsächlich überhaupt nicht eine Definition zu sein scheint) und drei andere Axiome, von denen das dritte lautet, der Raum könne von jeder Lage aus in ihm als nach drei und nur nach drei unabhängigen Richtungen sich ausdehnend vorgestellt werden, bilden die hauptsächlichen Grundlagen der subjectiven Geometrie. Die Entwickelung der Theoreme, welche den Namen der grundlegenden in der Geometrie erhalten können, wird sehr sorgfältig durchgeführt. Der dritte Teil des Buches beschäftigt sich mit der „Anwendbarkeit der vorangehenden subjectiven Geometrie auf die Geometrie des materiellen Raumes". Der Referent ist nicht im Stande gewesen, mit der Kritik, welcher er dieses Buch unterziehen wollte, zu

einem ihm genügenden Abschlusse zu kommen; daher begnügt er sich damit, die Aufmerksamkeit auf das Werk zu lenken, da es ein sorgfältiges Studium von allen verdient, welche ein Interesse an den Hypothesen besitzen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Gbs. (Lp.)

E. STUDY. Von den Bewegungen und Umlegungen. (I. u. II. Abhandlung.) Math. Ann. XXXIX. 441-566.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, eine möglichst vollständige und systematische Theorie der Ortsveränderungen eines geometrischen Gebildes zu geben. Je nachdem das Gebilde in ein congruentes oder ein symmetrisches übergeführt wird, handelt es sich hierbei um eine „Bewegung" oder eine „Umlegung". Die Gliederung des Stoffes ergiebt sich zunächst aus der Behandlungsweise, die in der ersten Abhandlung synthetisch, in der zweiten analytisch ist, unter Benutzung rechtwinkliger Parallel-Coordinaten. In zweiter Linie kommen die verschiedenen Gebiete: Gerade, Ebene und Raum in Betracht, innerhalb deren die Ortsveränderungen stattfinden, in dritter Linie die verschiedenen Arten der Bewegungen selbst, wozu auch der Unterschied zwischen endlichen und unendlich kleinen Bewegungen zu rechnen ist. — Durch die bisherigen Einzelarbeiten auf diesem Gebiete ist besonders die Theorie der Bewegungen bevorzugt und gefördert worden, während die Theorie der Umlegungen, namentlich im Gebiete des Raumes, in der Entwickelung zurückgeblieben ist. Doch dürfte diesen letzteren Untersuchungen die Arbeit des Hrn. Goursat über die Anwendung der orthogonalen Substitution (F. d. M. XXI. 1889. 530) um so mehr zuzurechnen sein, da nicht nur die Wirkung der dort angewandten Operationen in Bewegungen und Umlegungen von Gebilden besteht, sondern auch, ganz im Geiste des Verfassers der vorliegenden Arbeit, von dem wichtigen Hülfsmittel der Transformationsgruppen umfangreiche Anwendung gemacht wird. Mit Recht bemerkt nämlich der Verfasser, dass diese Theorie, nebst denjenigen Methoden, welche die nichteuklidische Geometrie und die Systeme der

höheren complexen Zahlen liefern, mit dem von ihm behandelten Gegenstande in naher Beziehung stehen, und es werden denn auch diese Methoden ausgiebig und erfolgreich von ihm verwendet.

Im ersten Abschnitt werden die Chasles'schen Untersuchungen über Bewegung neu dargestellt und durch Discussion gewisser Ausnahmefälle vervollständigt; Bewegungen und Umlegungen werden in je zwei Transformationen von bestimmter Art zerlegt, wobei für die Gebiete mit verschiedener Dimensionenzahl charakteristische Verschiedenheiten hervortreten, ein analoges Fortschreiten aber nur zwischen zwei Gebieten von n^{ter} und $(n+2)^{ter}$ Stufe zu beobachten ist. Zur Formulirung der Transformation dient die von Hrn. H. Wiener angewandte Bezeichnung. Von besonderem Nutzen erweist sich für räumliche Betrachtungen der vom Verfasser neu eingeführte Begriff der „Umschraubung", der eine „Umwendung" (Drehung um $2R$) und eine Verschiebung in der Richtung der Umwendungsaxe in sich schliesst und dazu dient, congruente Raumgebilde zur Deckung zu bringen. Schraubungen (um andere Winkel), Drehungen und Schiebungen werden in ihren Combinationen, ihren Wirkungen auf Raumgebilde und im Zusammenhange mit den ihnen entsprechenden geometrischen Transformationen betrachtet, ebenso ganze Gruppen von Bewegungen, die in einem charakteristischen Merkmal übereinstimmen. Wird ein Gebilde durch eine Bewegung in ein anderes übergeführt, so bilden die Verbindungslinien homologer Punkte den „Sehnencomplex" der Bewegung. Diese Definition führt weiter auf den von Möbius gefundenen Zusammenhang zwischen linearen Complexen und unendlich kleinen Bewegungen, sowie mit Hülfe der Darstellung von Kräften durch Linienteile (im Sinne Grassmann's) auf die Zusammensetzung unendlich kleiner Bewegungen. Es folgt die Zerlegung der Umlegungen in Spiegelungen, der Bewegungen in Umlegungen, ferner die „Bewegungen im Strahlenbündel", wobei die Strahlen oder Ebenen eines Punktes als Raumelemente auftreten, und, vermöge des Zusammenhanges der Strahlenbündel mit der nichteuklidischen Geometrie, sich das Resultat ergiebt, dass die Theorie der Bewegungen und Um-

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Ausführliches Inhaltsverzeichnis und Namenregister folgen am Schlusse des Bandes.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe. Berlin W. Kurfürstenstrasse 139.

legungen im Raume als Grenzfall der Theorie der Bewegungen im Strahlenbündel angesehen werden kann.

Im zweiten Abschnitte wird gezeigt, wie den die Bewegungen im Raume darstellenden Transformationen acht homogene Parameter eindeutig umkehrbar zugeordnet werden können. Diese Zuordnung wird dann auf die Umlegungen ausgedehnt, wobei auch die einschlägigen Untersuchungen Euler's berücksichtigt werden. Von abkürzender Wirkung auf die Rechnungen erweist sich die Theorie der höheren complexen Einheiten, insbesondere die Quaternionenrechnung. Drei Sätze, deren einer bereits von Rodrigues gefunden war, handeln von den Coefficienten der oben genannten Transformationen, die als sehr einfache lineare Functionen von sieben unabhängigen Verhältnisgrössen dargestellt werden. Auch hier wird wieder eine einfache geometrische und mechanische Deutung gewisser Parameter mit den Mitteln der Ausdehnungslehre erzielt. Im ganzen werden in diesem zweiten Abschnitt die gleichen Gegenstände behandelt wie im ersten, jedoch im Interesse der Kürze mit verschiedenen Einschränkungen, und im Interesse der Abwechselung so, dass die räumlichen Untersuchungen den auf die Ebene bezüglichen vorangehen. Ein specielleres Eingehen auf die inhaltreiche Arbeit ist an dieser Stelle nicht möglich. Hinzuzufügen ist nur noch, dass auch zahlreiche Litteraturangaben den Leser über den Umfang dessen, was auf diesem Gebiete früher schon geleistet worden, orientiren.

Schg.

W. Killing. Ueber die Clifford-Klein'schen Raumformen.

Math. Ann. XXXIX. 257-278.

Von den hier betrachteten Raumformen ist eine specielle, zweidimensionale Art zuerst von Clifford angegeben, allgemein sind sie dann von Hrn. F. Klein behandelt worden. Sie besitzen die charakteristische Eigenschaft, dass sie nur bei speciellen Bewegungen eines Teiles als Ganze in sich bewegt werden können. Ausserdem haben sie, ebenso wie die vom Verf. als Polarform des Riemann'schen Raumes bezeichnete elliptische Raumform, mehrfachen Zusammenhang. Der Verfasser leitet ihre rein geo-

metrische Berechtigung aus den allgemeinen Gesetzen der Bewegung ab, und gelangt für positives constantes Krümmungsmass zur Aufstellung aller möglichen Fälle dieser Raumformen, die übrigens nur für ungerade Dimensionenzahl existiren. Für verschwindendes und negatives Krümmungsmass wird dieses Problem einstweilen nur analytisch formulirt. Hinsichtlich der Mechanik dieser Raumformen wird bemerkt, dass dieselbe nur teilweise mit der des euklidischen Raumes übereinstimmt; aus der erwiesenen geometrischen Berechtigung jener Formen könne aber auf die Möglichkeit geschlossen werden, auch eine einwandfreie Mechanik für sie zu begründen. Schg.

F. Pietzker. Die Gestaltung des Raumes. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Braunschweig. O. Salle. VII + 110 S. 8°.

Der Titel lässt auf eine objective Prüfung der bisherigen Forschungsergebnisse hinsichtlich der modernen Raumtheorien schliessen. Dem entspricht aber der Inhalt nicht. Der Verfasser nimmt von vorn herein gegenüber allem, was über die euklidische Geometrie und ihren Anschauungskreis hinausgeht, oder ihr zuwiderläuft, einen ablehnenden Standpunkt ein. Er glaubt, sich auf eine Kritik der grundlegenden Arbeiten von Helmholtz, Riemann und Beltrami beschränken zu dürfen, und gelangt auf Grund der in diesen Arbeiten von ihm entdeckten Mängel zu dem Resultate, dass es nur eine einzige selbständige, aus der Natur des Raumbegriffs selbst herzuleitende Geometrie gebe, nämlich die euklidische. — Dass an der Verbesserung solcher, einer neuen schwierigen Theorie naturgemäss anhaftenden Mängel zahlreiche bedeutende Mathematiker seit langer Zeit mit Erfolg beschäftigt gewesen sind und noch sind, dass keiner von allen denen, die gründlich auf diesem Gebiete gearbeitet haben, zu dem Verdict des Verfassers gelangt ist, dass im Gegenteil auch in den streitigen Fragen bereits Wesentliches für die Klärung geleistet ist, dass endlich die Kenntnis jener grundlegenden Arbeiten, wie derjenigen, welche sich unmittelbar auf dieselben

beziehen, gegenwärtig nicht entfernt ausreicht, um eine zu einem competenten Urteil befähigende Uebersicht über die ganze Theorie zu erlangen, das alles wird ignorirt, ein Umstand, der sich nur durch die im Vorwort eingestandene Unvollständigkeit der dem Verf. bekannten Fachlitteratur erklärt. Das Geheimnis des Erfolges der modernen Raumtheorien erklärt sich der Verf. in einer für seine mathematischen Zeitgenossen recht beschämenden, wenn auch einfachen Weise, indem er sagt, durch die Autorität so grosser Männer (wie die vorgenannten) sei die Herrschaft des Irrtums begünstigt worden. — Wie fern der Verfasser, bei aller anerkennenswerten Bemühung hinsichtlich des von ihm studirten Ausschnittes der Fachlitteratur, dem eigentlichen Wesen der von den Mathematikern auf diese Theorie verwendeten geistigen Arbeit steht, zeigt sich am besten an den seine Polemik durchsetzenden Missverständnissen, z. B. hinsichtlich der Tragweite und Bedeutung, welche der in Rede stehenden Theorie, wie den zu ihrer Versinnlichung dienenden Hülfsmitteln von den Autoren selbst beigelegt wird, sowie in der gelegentlichen Bekämpfung von Hypothesen, die entweder, wie die der vierten Dimension des Erfahrungsraumes, abgethan, oder, wie die der positiven Krümmung dieses Raumes, und der realen Existenz mehrdimensionaler Räume, als noch nicht spruchreif anerkannt sind. Diesen Hypothesen geht überhaupt ein rein mathematisches Interesse völlig ab, und verständiger Weise sollte kein Fachmann als solcher sich darüber aufregen. — Mathematiker, welche mit den modernen Raumtheorien vertraut sind, werden vielleicht in den Angriffen des Verfassers Anregungen zu Verbesserungen in der Darstellung finden, welche künftige Angriffe und Missdeutungen ausschliessen; in den Kreisen der übrigen aber ist die Schrift eher Verwirrung als Aufklärung zu verbreiten geeignet. Schg.

Max Simon. Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie. Pr. (Nr. 512) Lyceum Strassburg i. Els. 32 S. 4°. (1 Fig.-Taf.)

Die Arbeit enthält historische und kritische Bemerkungen

über Entwickelung und Stand der (im allgemeinsten Sinne verstandenen) nichteuklidischen Geometrie, wobei besonders die streitigen oder streitig gewesenen Fragen berücksichtigt werden. Es werden u. a. einige irrige Angaben bezw. Missverständnisse Erdmann's berichtigt und die Verdienste Bolzano's in das rechte Licht gestellt. Hinsichtlich des Zustandekommens der Raumvorstellungen entwickelt der Verf. seine eigene, im Grundgedanken nur mit Mach übereinstimmende Ansicht, wonach der Sitz der Seelenthätigkeit in das gesamte Protoplasma verlegt, eine stufenweise Entwickelung des Bewusstseins angenommen und, analog mit den in historischer Zeit beobachteten Verfeinerungen in den Sinneswahrnehmungen, die Möglichkeit aufgestellt wird, dass auch eine Aenderung unserer Raumvorstellungen eintreten könne, welche dieselben mit den Gesetzen eines nicht ebenen Raumes in Einklang bringe. Es folgen physiologische und psychologische Erörterungen über die geometrischen Grundgebilde und das Zustandekommen der Dimensions-Vorstellungen, wobei auch auf die inneren Gründe für die Richtung, welche die Raumforschung in neuerer Zeit genommen hat, interessante Streiflichter fallen. Den Arbeiten von Riemann und Helmholtz ist ein besonderer Abschnitt gewidmet, in welchem berechtigte und unberechtigte Angriffe gegen diese Arbeiten scharf gesondert und die Resultate, zu welchen die Kritik derselben geführt hat, mit grosser Klarheit dargelegt werden. Sodann werden die elementarsten Sätze der Geometrie des ebenen vierdimensionalen Raumes vorgeführt, die Versuche, die Möglichkeit eines solchen Raumes zu widerlegen, in ihrer Hinfälligkeit dargelegt, ebenso die bekanntesten Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, wobei die Gleichberechtigung der drei Geometrien betont, aber für die Geometrie des endlichen Raumes der Klein'schen Auffassung der Vorzug vor der Riemann'schen gegeben wird. Die Schrift im ganzen ist gründlich und bei aller Knappheit der Darstellung trefflich orientirend.

Schg.

M. Réthy. Endlich-gleiche Flächen. Math. Ann. XXXVIII. 405-428.

Zwei Flächenstücke sind nach Bolyai's Bezeichnung endlich-gleich, wenn sie durch additive Aneinanderreihung paarweise congruenter Flächenstücke entstehen. Hierüber hatte Bolyai folgende Sätze aufgestellt:

1) Zwei geradlinige Polygone von gleichem Flächeninhalt sind endlich-gleich.

2) Die nicht gemeinsamen Teile zweier sich teilweise deckenden congruenten Flächen sind endlich-gleich.

3) Schneidet man aus zwei congruenten Flächen beliebige gegenseitig congruente Stücke heraus, so sind die Reste endlich-gleich.

Herr R. beanstandet die Herleitung des zweiten Satzes und bemüht sich seinerseits, einen unanfechtbaren Beweis zu geben. Nachdem er in § 1 den Satz 1 nochmals erwiesen hat, stellt Herr R. den Satz auf: „Zur endlichen Gleichheit zweier flächengleicher ebener Systeme ist es notwendig und hinreichend, dass die krummlinigen Bogen ihrer Begrenzungen gegenseitig endlich-gleich und die Krümmungen congruenter Stücke (relativ zum Innern der Fläche) von gleichem Sinne seien, — von Stücken der Begrenzungen abgesehen, die auf demselben System ebenso oft vorkommen mit positivem als mit negativem Krümmungssinn.“ Zum Beweise soll für nach aussen convexe gleiche Bogen beider Figuren derselbe eingeschriebene, für gleiche nach innen convexe Bogen derselbe umgeschriebene Polygonzug substituirt werden. Ist dies geschehen, so bleiben allerdings zwei flächengleiche, und deshalb endlich-gleiche Polygone übrig. Allein man braucht nur den Fall zweier von innen einander berührenden Kreise zu betrachten, um einzusehen, dass solche Polygone von endlicher Seitenzahl keineswegs immer möglich sind.

Im § 2 giebt Herr R. eine Verbesserung des Bolyai'schen Verfahrens zur Zerlegung der Restgruppen zweier congruenten Figuren A und B mit dem gemeinsamen Flächenstück K in congruente Teile. Im gleichen Sinne congruente Flächen gehen durch Drehung um den Winkel φ um einen festen Punkt O in einander über; sind nun A, B und K einfach zusammenhängend, und liegt O ausserhalb beider, so unterwirft Herr R. das Flächenstück K

den Drehungen φ, 2φ, 3φ, ..., und $-\varphi$, -2φ, -3φ, ..., bei denen es noch zum Teil auf A oder B liegt, und verzeichnet in jeder Lage seine Konturen auf diesen Flächen. Dadurch zerfallen die Restflächen in dieselbe endliche Anzahl flächengleicher Stücke. Dieses Verfahren wird nun auf den Fall mehrfach zusammenhängender Flächen, innere Lage des Drehpunktes, etc., sowie auf entgegengesetzt congruente Figuren ausgedehnt. Die Zurückführung des dritten Satzes auf den zweiten wird gezeigt.

E. K.

H. Wiener. Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie. Naturf. Ges. Halle LXIV. 8-9.

O. Stolz. Ueber das Axiom des Archimedes. Math. Ann. XXXIX. 107-112.

Herr Stolz (Zur Geometrie der Alten, insbesondere über das Axiom des Archimedes, Math. Ann. XXII. 504-520; F. d. M. XV. 1883. 22) hat bewiesen, dass in jedem stetigen Grössensysteme das Archimedische Axiom erfüllt ist. Herr Veronese (Il continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede, Rom. Acc. L. Mem. (4) VI. 603-624; F. d. M. XXII. 1890. 541) hat dagegen eingewandt, dass man stetige Systeme bilden kann, welche dem Archimedischen Axiom nicht gehorchen, und dass dieses in dem von Hrn. Stolz betrachteten Systeme nur darum nicht geschieht, weil die Annahmen, auf welchen nach ihm die Stetigkeit beruht, das Archimedische Axiom in sich umfassen. Herr Stolz erkennt die Richtigkeit des Einwandes an, indem er beweist, dass eine der von ihm zu Grunde gelegten Annahmen mit dem Archimedischen Axiom gleichbedeutend ist. Es ist dies die folgende:

Findet in dem betrachteten Systeme eine Lücke (P_1, P_2) statt, so kann man zu jeder gegebenen Grösse D des Systems zwei Grössen P_1, P_2 derart bestimmen, dass $P_2 - P_1 < D$ ist.

Vi.

P. Mansion. Relation entre les distances de cinq points en géométrie non-euclidienne. Brux. S. sc. XV A. 8-11.

1) Die Ueberlegungen Legendre's in der zweiten Note seiner „Éléments de géométrie" führen zu der euklidischen und zu der nichteuklidischen Geometrie, wenn man sie streng macht. 2) Die euklidische Beziehung zwischen den Abständen von 5 Punkten und die entsprechende nichteuklidische, von Schering herrührende Beziehung, in die symbolische Form (12345) = 0 gebracht, besitzen die folgende Eigenschaft: Wenn man hat:

$$(12345) = 0, \quad (12346) = 0, \quad (12356) = 0,$$

so kann man daraus ableiten

$$(23456) = 0, \quad (13456) = 0, \quad (12456) = 0.$$

Beweis dieses Satzes, genannt „Theorem der sechs Punkte".

Mn. (Lp.)

P. Mansion. Notes sur la géométrie euclidienne et sur la géométrie non-euclidienne. Mathesis (2) I. Suppl. I. 32 S.

Abdruck aus Brux. S. sc. XIII A. 57-61 (F. d. M. XXI. 1889. 525), XIV B. 35-59 (F. d. M. XXII. 1890. 44), XV A. 8-11 (vgl. das vorangehende Referat). Mn. (Lp.)

M. Simon. Ueber das Parallelenaxiom. Naturf. Ges. Halle LXIV. 5.

W. Fr. Schüler. Der Satz von der Winkelsumme im Dreieck, oder das XI. Axiom des Euklid. München. Im Selbstverlage des Verf. (Autogr.) 30 S. 4°. (1893.)*)

Die vorliegende Schrift ist veranlasst durch das in F. d. M. XXII. 1890. 543 gegebene, vom Verf. als „unrichtig" bezeichnete Referat über seine Arbeit „Ueber das Axiom von der Winkelsumme im Dreieck". — Der Verf. sucht in den vier ersten Abschnitten dieses Axiom mit Hülfe eines Fundamentalsatzes zu beweisen, welchen er als ein Postulat unserer räumlichen An-

---

*) Wegen des Angriffes auf den Bericht im vorigen Jahrgange schon jetzt referirt. Red.

schauung bezeichnet. Derselbe lautet: „In jedem stumpf- oder rechtwinkligen Dreiecke sind die Ecktransversalen an die Seiten (d. h. an „eine“ der Seiten. Ref.), welche den stumpfen oder rechten Winkel einschliessen, sämtlich von einander verschieden“. Allein dieser Satz sagt nur mit anderen Worten dasselbe wie der Satz: „Von einem in einer Ebene ausserhalb einer Geraden liegenden Punkte können nur je zwei gleich lange Strecken nach Punkten der Geraden gezogen werden“, ein Satz, den die euklidische Geometrie mit Hülfe des Satzes von der Winkelsumme des rechtwinkligen Dreiecks beweist. Ein für allemal kann bemerkt werden, dass von derjenigen Gruppe von Sätzen, welche nur für die euklidische Geometrie gelten, jeder beliebige mit mehr oder weniger Grund als Postulat unserer räumlichen Anschauung aufgestellt, und jeder andere mit mehr oder weniger Mühe daraus abgeleitet werden kann. Jeder Versuch, von einem anderen Ausgangspunkte zu dieser Gruppe zu gelangen, man mag sich drehen und wenden, wie man will, muss scheitern, oder, wenn er gelungen scheint, einen Zirkelschluss in sich bergen. — Nicht besser steht es mit dem Versuche des Verfassers, die vom Ref. bemängelte Methode des Kreisbogendreiecks dadurch zu verbessern, dass der Punkt, in welchem die Summirung der Winkel vollzogen wird, aus dem ins Unendliche rückenden Punkte O (dem gemeinsamen Schnittpunkte der drei Kreise) in die Halbirungspunkte der Seiten des Kreisbogendreiecks verlegt wird, und dass der Punkt O innerhalb der Ebene dieses Dreiecks ins Unendliche rücken soll. Der Verf. sucht freilich „Begriff und Anschauung“ dadurch zu vereinigen, dass er verlangt, man solle bei diesem Uebergange sein Augenmerk nur auf diese Halbirungspunkte richten, während man dem Punkte O gegenüber ein Auge zudrückt. Dieser Uebergang selbst ist aber einfach unmöglich, da sonst die aus den Kreisen entstehenden Dreiecksseiten in diesem Punkte O einen gemeinsamen unendlich fernen Punkt besitzen, d. h. parallel sein müssten. Ref. muss daher in diesem seinem Schlusswort zur Sache die Beweisführung des Verf. auch diesmal für nicht überzeugend erklären. Schg.

E. v. SCHMIDT. Euklid's 11. Axiom durch eine neue Definition der geraden Linie bewiesen. Moskau. J. Deubner. 24 S. 8°.

Der Referent kann sich den Ausführungen des Verfassers keineswegs anschliessen. Selbst wenn man die Schlüsse desselben als richtig anerkennen würde, wäre doch nur bewiesen, dass zwei Linien, die gegen eine dritte gleich gerichtet sind, auch gegen einander gleich gerichtet sind und sich daher nicht begegnen. Zu beweisen wäre aber, dass zwei Linien, die nicht gleich gerichtet gegen eine dritte sind, sich wirklich begegnen.

E. K.

GASTON TARRY. Géométrie générale. Le cercle et la trigonométrie. Assoc. Franç. Marseille XX. 90-117.

In zwei Abhandlungen, über die wir ausführlich referirt haben (cf. F. d. M. XXI. 1889. 527, XXII. 1890. 544), hatte der Verfasser eine Theorie des Imaginären aufgestellt, bei der jeder Punkt durch zwei reelle Punkte (Componenten) dargestellt wurde. In diesem neuen Abschnitt geht Herr T. zur Kreislehre und Trigonometrie über. Da der Begriff der Entfernung zweier Punkte bereits eingeführt wurde, kann der Kreis auch in dem erweiterten Gebiet als Ort der Punkte definirt werden, die von einem Centrum dieselbe Entfernung haben. Es wird an zahlreichen Beispielen, z. B. an dem Satze vom Peripheriewinkel, dargethan, dass die im Reellen geltenden Eigenschaften erhalten bleiben. Von besonderer Wichtigkeit erscheint der Satz, dass der Kreis zwei Punkte mit jeder Geraden gemein hat, welche nicht eine Tangente desselben ist. Die Definition der trigonometrischen Functionen geschieht dem Reellen vollkommen analog mit Hülfe von Quotienten aus Strecken. E. K.

P. MOLENBROEK. Sur la représentation géométrique des points imaginaires dans l'espace. Nouv. Ann. (3) X. 434-453.

Bereits Laguerre hatte den Gedanken ausgesprochen, zur

Darstellung eines imaginären Punktes den reellen Kreis zu benutzen, der von ihm aus in den unendlich fernen Kugelkreis projicirt wird; zur Trennung zweier conjugirten Punkte kann man die beiden Umlaufssinne verwenden, die sich auf dem erwähnten reellen Kreise ergeben. Dieser Gedanke wird hier vom analytischen Gesichtspunkte aus durchgeführt. Genauere Behandlung erfahren die Kreis-Mannigfaltigkeiten, auf welche die imaginäre Ebene und das Ellipsoid führen. E. K.

E. K. Spaczinski. Postulata der Elementargeometrie. Spaczinski's Bote der Experimentalphysik u. elementaren Mathematik No. 121 u. 131. 1891. (Russisch.)

Felix Klein. Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes. Traduction de M. H. Padé. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VIII. 87-102, 173-199.

Französische Uebersetzung des Programms zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der Universität zu Erlangen. (Vergl. F. d. M. IV. 1872. 229-231, XXI. 1889. 529.) Lp.

J. G. Veronese. Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Padova. Tip. del Seminario. XLVIII + 628 S.

G. Peano. Lettera aperta al. Prof. G. Veronese.

Die Referate erfolgen im nächsten Jahrgange. E. K.

J. Limanowski. Neue Grundlagen der Geometrie. Warschau 1891. 181 S. 8°. (Polnisch.)

Die Vorstellungen des Verfassers sind nicht neu, sie sind nämlich mit denen des Indivisibilienwerkes von Cavalieri (1635) identisch, die Behandlung mangelhaft und mehrere Sätze darin ganz nutzlos. Dn.

J. J. Iselin. Die Grundlagen der Geometrie ohne specielle Grundbegriffe und Grundsätze mit Einschluss einer vollständigen Darstellung der reinen Sphärik einheitlich dargestellt. Bern. K. J. Wyss. 246 S. 4°.

Der Titel, den der Verf. seiner Schrift giebt, muss jeden Kundigen Wunder nehmen; denn eine Geometrie ohne Grundbegriffe und Grundsätze ist unmöglich. So zeigt sich denn auch, dass die wissenschaftlichen Arbeiten über die Axiome der Geometrie dem Verf. durchaus fremd geblieben sind. Eine Beziehung der euklidischen Geometrie zur sphärischen und pseudosphärischen Geometrie findet sich nirgends. Näher auf die Vorstellungen des Verf. einzugehen, erscheint deshalb mit der Aufgabe dieser Zeitschrift nicht vereinbar. Schn.

Capitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie).

E. Fedorow. Symmetrie auf der Ebene. St. Petersburg. 1891. 1-45. (Russisch.)

Diese Abhandlung, der ein Résumé in französischer Sprache folgt, bietet eine Ergänzung der Abhandlungen desselben Verfassers: „Symmetrie der endlichen Figuren“ und „Symmetrie der regulären Systeme von Figuren“ und enthält entsprechende Auseinandersetzungen bezüglich der Ebene. Im ersten der beiden sie bildenden Teile wird gezeigt, dass als Elemente der Symmetrie der ebenen Figuren nur Axen der Symmetrie bleiben (es giebt weder Symmetrie-Ebenen, noch zusammengesetzte Symmetrie). Alle Arten der Symmetrie gruppiren sich in eine unendliche Reihe von Systemen, deren Gleichungen in der Arbeit gegeben sind. Es wird bemerkt, dass einige der in der Arbeit des Herrn Goursat (Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. 159, F. d. M. XIX. 1887. 781)

gegebenen Gleichungen die von diesem Geometer ihnen zugeschriebene Allgemeinheit nicht besitzen. — Im zweiten Teile werden alle regulären Systeme der ebenen Figuren gegeben. Ihre Anzahl (17) ist von der Sohncke'schen Zahl 13 (J. für Math. LXXVII, F. d. M. V. 1873. 511) verschieden: Hr. Sohncke hat vier Systeme $1ps$, $2ps$, $3ps$ und $1pa$ übersehen. Dieselben Systeme sind, als besondere Fälle, in der bemerkenswerten Arbeit von Hrn. C. Jordan (Annali di Mat. (2) II) enthalten, der nur ein System übersehen hat. Si.

A. Boguslawski. Algebra der Ebene und des Raumes. Aus Mosk. Math. Samml. XIV-XVI. 1891. (Russisch.)

Das Referat über dies Buch, dessen IV. Capitel den Titel „Analysis situs“ trägt, findet sich später in Abschnitt IX, Cap. 1.

G. Lechalas. Quelques théorèmes de géométrie élémentaire. Nouv. Ann. (3) X. 527-545.

Die Arbeit steht im engsten Zusammenhang mit Entwickelungen von Calinon über die Grundlagen der Geometrie. Sie knüpft an einen Calinon'schen Beweis des Satzes an, dass eine in sich congruente Fläche entweder unbegrenzt ist, und dass dann zwei geodätische Linien sich nur in einem Punkte begegnen, während durch je zwei Punkte eine solche bestimmt wird, oder begrenzt ist, wo dann zwei geodätische Linien zwei Punkte mit einander gemein haben.

Im Anschluss daran beweist Herr L. auf Grund vorangestellter Hülfssätze, dass auf einer unbegrenzten sich selbst congruenten Oberfläche jede in sich zurückkehrende Curve ein Flächenstück (aire) einschliesst. Hierzu ist nach Herrn L.'s Ausführungen zweierlei erforderlich. Erstens müssen zwei Gebiete entstehen, aus deren einem man in das andere auf stetige Weise nur durch Ueberschreitung der Curve gelangen kann. Ausserdem aber muss eines der Gebiete durch stetige Veränderung einer Linie entstehen, die einen festen Punkt der Curve mit einem

beweglichen verbindet, der von ihm aus die Curve vollständig durchläuft. Für Anfangs- und Endlage muss sich die Hülfslinie auf einen Punkt reduciren. Der Beweis wird zuerst für Dreiecke und Polygone aus geodätischen Linien geführt. Eine Folge des Satzes ist, dass eine geodätische Linie, die keine Ecke eines Polygons enthält, dasselbe in einer geraden Anzahl von Punkten trifft. Zum Schluss wird auf die entsprechenden Sätze bei begrenzten, in sich congruenten Flächen hingewiesen.

E. K.

A. Cayley. On the partitions of a polygon. Lond. M. S. Proc. XXII. 237-262.

Es handelt sich um die Frage, auf wieviel verschiedene Arten ein r-Eck durch $k-1$ Diagonalen in k Teile zerlegt werden kann. Kirkman hatte für die bezügliche Zahl den Wert

$$\frac{r\,.\,r+1\ldots r+k-2\,.\,r-3\,.\,r-4\ldots r-k+1}{1\,.\,2\ldots k\,.\,1\,.\,2\ldots k-1}$$

gefunden, ohne jedoch einen vollständigen Beweis dafür zu geben.

Hr. Cayley giebt für $k=2, 3, 4, 5$ eine Verification der Formel durch wirkliche Abzählung, d. h. er bestimmt, auf wie viele Arten sich die Polygonseiten auf die einzelnen Teile, in die das Polygon zerfällt, verteilen lassen. Ein zweites Verfahren besteht darin, die mögliche Zahl der entstehenden Dreiecke, Vierecke u. s. w. durch Abzählung zu ermitteln. Man stösst dabei auf ein einfaches Recursionsverfahren vom r-Eck auf das $(r-1)$-Eck; nach dieser Methode werden die Zahlen für $r=3$ bis 10 bestimmt.

Den Hauptinhalt der Arbeit bildet ein analytischer Beweis der Kirkman'schen Formel. Ist X eine beliebige Function von x, so kann man die Identität beweisen:

$$(1)\qquad \frac{2}{1.2}X^2+\frac{4y}{3!}(X^3)'+\frac{6y^2}{4!}(X^4)''+\cdots$$
$$=\left\{X+\frac{y}{2}(X^2)'+\frac{y^2}{3!}(X^3)''+\cdots\right\}^2.$$

Setzt man nun

$$(2)\quad \begin{cases} U_1 = xX, & U_2 = \frac{x}{2!}(X^2)', \quad U_3 = \frac{x}{3!}(X^3)'', \ldots, \\ V_2 = \frac{2x^2}{2!}X^2, & V_3 = \frac{4x^3}{3!}(X^3)', \quad V_4 = \frac{6x^3}{4!}(X^4)'', \ldots, \end{cases}$$

so dass

$$U_2 = \tfrac{1}{2}x(x^{-2}V_2)', \quad U_3 = \tfrac{1}{4}x(x^{-2}V_3)', \quad \ldots,$$

so genügen die U_i und V_i der Gleichung

$$V_2 + yV_3 + y^2V_4 + \cdots = (U_1 + yU_2 + y^2U_3 + \cdots)^2,$$

und es folgen aus ihr die Relationen

$$(3)\qquad V_2 = U_1^2, \quad V_3 = 2U_1U_2, \quad V_4 = 2U_1U_3 + U_2^2, \quad \ldots.$$

Setzt man nun im besonderen

$$X = \frac{x^2}{1-x},$$

so sind, wie die Ausrechnung lehrt, die Coefficienten von x^r in U_1, U_2, U_3, ..., U_k genau die Kirkman'schen Zahlen.

Man bezeichne jetzt die Zahl der möglichen Teilungen des r-Ecks in resp. 1, 2, 3, ... Teile resp. mit A_r, B_r, C_r, ..., bilde die Functionen

$$\begin{aligned} u_1 &= A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + \cdots + A_rx^r, \\ u_2 &= \qquad\quad B_4x^4 + B_5x^5 + \cdots + B_rx^r, \\ u_3 &= \qquad\qquad\qquad C_5x^5 + \cdots + C_rx^r \end{aligned}$$

und bestimme dazu nach den Gleichungen (2) die Functionen v_2, v_3, v_4, ..., so bestehen, wie für den Fall $r = 6$ nach einer auf allgemeines r ausdehnbaren Methode nachgewiesen wird, zwischen den Coefficienten der u_i und v_i, resp. zwischen den Functionen selbst genau die Gleichungen (3); d. h. die Functionen, deren Coefficienten die gesuchten Teilungszahlen sind, ergeben sich nach den Gleichungen (3) aus derjenigen Function u_1, deren Coefficienten die Teilungszahlen für $k = 1$ sind. Alle A_r haben aber offenbar den Wert 1, d. h. es ist $u_1 \equiv U_1$, und damit ist auch $u_k \equiv U_k$.

Es folgen noch einige Bemerkungen über die Aufgabe, auf wieviele Arten ein r-Eck in gegebene p-Ecke zerlegt werden kann.

Sfs.

L. Heffter. Ueber das Problem der Nachbargebiete.
Math. Ann. XXXVIII. 477-508.

Die Arbeit knüpft an das kürzlich von Kempe und Heawood behandelte Vierfarbenproblem an (F. d. M. XXII. 1890. 562). Mit ihm wesentlich identisch ist das Problem der Nachbargebiete, d. h. solcher Gebiete auf einer Fläche, von denen jedes längs einer Linie an alle anderen grenzt. Die Fläche wird als Oberfläche von beliebigem Zusammenhang vorausgesetzt; es wird für sie der Minimalwert des Geschlechts bestimmt, wenn die Zahl der Nachbargebiete gegeben ist, resp. der Maximalwert der Nachbargebiete, wenn das Geschlecht gegeben ist.

Der Verfasser führt zu diesem Zwecke eine neue, für Oberflächen charakteristische Zahl ein, nämlich die grösste Zahl s der geschlossenen Curven, die man durch einen Punkt der Fläche so auf ihr ziehen kann, dass keine zwei noch einen weiteren Punkt gemein haben. Sie genügt den Relationen

$$s = z - r + 1 \quad \text{und} \quad s = 2p + 1,$$

in denen z die Zusammenhangszahl, r die Zahl der Randcurven und p das Geschlecht bedeutet. Es reicht aus, geschlossene Flächen der Betrachtung zu unterwerfen. Ist p_n das Geschlecht einer Fläche, die n Nachbargebiete gestattet, so ist stets

$$p_n \geqq \frac{(n-3)(n-4)+2\alpha_n}{12},$$

wo $2\alpha_n$ die kleinste positive ganze Zahl ist, die bewirkt, dass der Zähler durch 12 teilbar wird. Ist $n \leqq 12$, so gilt in dieser Formel ausschliesslich das Gleichheitszeichen; alsdann ist also der Zusammenhang von n und p durch die Gleichung

$$p_n = \frac{(n-3)(n-4)+2\alpha_n}{12}$$

bestimmt, womit p_n durch n und n_p durch p ausdrückbar wird.

Es wird dann noch im besonderen die Frage erörtert, wann auf einer Fläche eine specielle regelmässige Anordnung der Nachbargebiete vorkommen kann, die der Verfasser als cyklisch bezeichnet. Notwendige Bedingung hierfür ist, dass n die Form $12k+7$ hat. Für zwei specielle Werte von k wird die ent-

sprechende cyklische Einteilung der Fläche in Nachbargebie
wirklich ausgeführt.

Das Problem ist auch einer dualen Fassung fähig; dab
handelt es sich um diejenige Zahl von Punkten auf einer Fläch
deren jeder mit allen anderen durch zwei sich nicht schneiden
Linien verbunden werden kann. Sfs.

A. Gutzmer. Eine geometrische Frage. II. Natur
Wochenschr. VI. 143.

Ein strengerer Beweis des Satzes, den der Verfasser i
Bd. V, 40 veröffentlicht hatte. Sfs.

L. Lévy. Sur les pavages à l'aide de polygones régu
liers. Soc. Philom. Bull. (8) III. 46-50.

Einige Bemerkungen über regelmässige Teilung einer Eben
in reguläre Polygone verschiedener Art. Es wird ein elemen
tarer Beweis gegeben, dass eine Combination von Sternpoly
gonen und convexen Polygonen unzulässig ist; daran schliesse
sich einige Beispiele von Ebenenteilungen, in denen regulär
Sechsecke, Quadrate und Dreiecke auftreten. Dass das gruppen
theoretische Problem, das der Aufgabe zu Grunde liegt, bereit
erledigt ist, scheint dem Verfasser unbekannt zu sein.

Sfs.

V. Eberhard. Zur Morphologie der Polyeder. Leipzig
B. G. Teubner. IV+245 S. mit 2 Fig.-Taf. 8°.

Ein Werk von grundlegender Bedeutung, das die Lehre
von den Gestalten der Polyeder ein erhebliches Stück vorwärts
bringt; reich an neuen Gedanken, die sowohl in der Stellung
wie in der Behandlung der Probleme zu Tage treten.

Gegenstand der Untersuchung sind die allgemeinen con-
vexen Polyeder, d. h. diejenigen, bei denen in jeder Ecke drei
Grenzflächen zusammenstossen. Stossen auch nur in einer Ecke
mehr als drei Grenzflächen zusammen, so heisst das Polyeder

ngulär; die singulären Polyeder bleiben von der Betrachtung usgeschlossen.

Der erste Teil der Schrift giebt die Definitionen und lehrt ie Herstellung der Polyeder. Zwei n-flächige Polyeder heissen somorph, wenn die Ebenen des einen durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ und ie Ebenen des anderen in irgend einer Reihenfolge so durch $_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ bezeichnet werden können, dass jeder Ecke $_i\alpha_k\alpha_l)$ eine Ecke $(\beta_i\beta_k\beta_l)$ entspricht; sie stimmen also in der ahl der Ecken, in der Zahl und Lage der Kanten, sowie in er Zahl, der Art und der Reihenfolge der Flächen überein. on diesen Polyedern wird bewiesen, dass sie durch stetige Deformation, unter Erhaltung ihres morphologischen Charakters, n einander übergeführt werden können; sie stellen daher nur ine Polyederart vor, und jede Polyederart ist durch eines ihrer ndividuen charakterisirt.

Die erste Methode, alle convexen Polyeder aufzustellen, ist ine mechanische. Man kann ein ebenes n-Eck dadurch bilden, lass man von einem $(n-1)$-Eck eine Ecke durch eine n^{te} Seite bschneidet. Das Analoge gilt für die Polyeder. Enthält nämlich das Polyeder unter seinen Grenzflächen x_3 Dreiecke, x_4 Vierecke, ..., x_m m-Ecke, so kann man zeigen, dass $x_3+x_4+x_5$ mindestens den Wert 4 besitzt; unter den Grenzflächen sind daher mindestens vier vorhanden, die weniger als sechs Seiten besitzen. Hieraus schliesst man, dass jedes n-Flach aus einem $(n-1)$-Flach durch ebene Schnitte entsteht, die entweder eine Ecke, oder eine Kante, oder zwei sich in einer Ecke treffende Kanten abschneiden, und zwar ist die Schnittfigur resp. ein Dreieck, ein Viereck oder ein Fünfeck. Man kann daher jedes convexe Polyeder durch derartige Schnitte aus einem Tetraeder ableiten.

Diese Methode setzt voraus, dass man die $(n-1)$-Flache kennt, wenn man die n-Flache herstellen will; es wird daher noch eine zweite generelle Methode entwickelt. Es giebt nämlich für jedes Polyeder ein System gestaltlich unabhängiger Grenzflächen, die das Polyeder unzweideutig bestimmen. Ein solches System heisst ein Stammsystem; es ist bestimmt, wenn

man die Zahl, die Form und den Zusammenhang der bezüglichen Grenzflächen kennt, und zwar betrifft der Zusammenhang die Art, auf die die Ecken der Grenzflächen mit einander verbunden sind. Der Verfasser leitet die Kriterien dafür ab, wann ein Flächensystem ein Stammsystem ist, und zeigt, dass man durch eine endliche Zahl von Processen alle Flächencombinationen aufstellen kann, die das Stammsystem eines n-Flachs bilden können. Als Beispiel wird die Aufstellung aller Heptaeder durchgeführt.

Hieran schliesst sich eine Untersuchung, die lehrt, wie sich die Polyeder nach der Art des Flächenzusammenhangs unterscheiden. Nennt man zwei Flächen Scheitelflächen, wenn es Kanten giebt, die je eine Ecke der einen mit je einer Ecke der andern verbinden, und bestimmt zu irgend drei in einer Ecke zusammenstossenden Flächen die Scheitelflächen, zu diesen wieder die Scheitelflächen, und so fort, so können drei Fälle eintreten. Entweder fallen alle drei Scheitelflächensysteme in ein einziges zusammen (z. B. Tetraeder), oder es coincidiren nur zwei Systeme (z. B. Pentaeder), oder es verlaufen alle drei Systeme getrennt (z. B. Würfel).

Der zweite Teil ist der gehaltvollste; er beschäftigt sich mit dem organischen Zusammenhang der verschiedenen Polyederformen und ihrer Einteilung in Familien, Stämme und Bereiche.

Zwischen den oben genannten Zahlen x_3, x_4, ... besteht die leicht zu erweisende Hauptgleichung

$$(1)\qquad 3x_3+2x_4+x_5-x_7-2x_8-3x_9-\cdots-(n-7)x_{n-1}=12;$$

die linke Seite ist also für alle Polyeder eine numerische Invariante. Diese Gleichung lässt sich zerfällen in

$$(2)\qquad \begin{cases} 3x_3+2x_4+x_5-12=m \quad \text{und} \\ x_7+2x_8+3x_9+\cdots=m, \end{cases}$$

wo m notwendig eine positive ganze Zahl ist. In allen diesen Gleichungen tritt die Zahl x_6, d. h. die Zahl der Grenzsechsecke des Polyeders nicht auf. Rechnet man nun alle Polyeder, die zu demselben Werte von m gehören, in einen Bereich, und teilt man die Polyeder eines Bereiches nach den Werten von x_3, x_4, x_5, ... in Polyederstämme, so ergeben sich sofort folgende

Fragen: 1) Gehört zu jeder ganzen positiven Zahl m ein Polyederbereich? 2) Definirt jedes ganzzahlige Lösungssystem $x_3, x_4, x_5, \ldots$ der obigen Hauptgleichung einen Polyederstamm? Und: 3) In welcher Abhängigkeit steht die Zahl x_6 der Grenzsechsecke von den anderen Grenzflächen? Dies sind die drei Hauptprobleme, die in dem Buche ihre Erledigung finden.

Zunächst wird das dritte behandelt. Da die Zahl x_6 auf die Zugehörigkeit eines Polyeders zu einem Polyederstamm ohne Einfluss ist, so liegt es nahe, zu vermuten, dass sich die Polyeder mit Sechsecken aus anderen Polyedern desselben Stammes durch Einfügung der bezüglichen Sechsecke geometrisch ableiten lassen. Dies wird folgendermassen untersucht. Ein aus Polyederkanten gebildetes Polygon, welches das Polyeder in zwei einfach berandete Flächenstücke zerteilt, soll ein einfaches oder einteiliges Kantenpolygon heissen. Von zwei isomorphen Kantenpolygonen lässt sich wieder zeigen, dass sie unter Erhaltung ihres morphologischen Charakters stetig in einander deformirt werden können, und daraus folgt nun, dass sich zwei einfach berandete polyedrische Flächen, deren Randpolygone isomorph sind, durch stetige Deformation und unter Wahrung ihrer Gestalt zu einem einzigen Polyeder vereinigen lassen. Hierauf beruht der wichtige Begriff der reduciblen und irreduciblen Polyeder. Ein Polyeder S heisst reducibel, wenn man aus ihm einen oder mehrere Flächengürtel oder Flächenstreifen so ausschalten kann, dass die restirenden Stücke S_1, S_2, S_3, ... mittels stetiger Deformation wieder zu einem Polyeder S' vereinigt werden können. Bedingung hierfür ist natürlich, dass S_1, S_2, ... paarweise isomorphe Randpolygone besitzen. Das Polyeder S wird das enthaltende, S' das enthaltene genannt. Polyeder, die derartige Ausschaltungen nicht zulassen, heissen irreducibel oder Stammpolyeder; solche sind z. B. das Tetraeder, das Pentaeder, das Hexaeder, überhaupt alle, deren Grenzflächen nur Dreiecke, Vierecke und Fünfecke sind. Der Verfasser zeigt andererseits, dass man auf jedem Polyeder Kantenpolygone angeben kann, längs deren sich Flächengürtel in unbegrenzter Zahl einschalten lassen. Jedes auf dem Polyeder verlaufende Netz von Kantenpolygonen, das hierzu geeignet ist,

heisst ein Erweiterungsnetz. Ist y_k die Zahl der k-seitigen Grenzflächen des Einschaltungssystems, so besteht die Gleichung

$$3y_3 + 2y_4 + y_5 - y_7 - 2y_8 - \cdots = 0.$$

Das einfachste Lösungssystem dieser Gleichung wird durch

$$y_3 = y_4 = y_5 = y_7 = y_8 = \cdots = 0$$

gegeben; ihm entspricht ein Einschaltungssystem, das aus lauter Sechsecken besteht. Eine derartige Erweiterung des Polyeders wird eine Elementarerweiterung genannt, und das bezügliche Erweiterungsnetz ein Netz von Elementarpolygonen oder ein Elementarnetz. Die einfachste Elementarerweiterung eines Polyeders besteht in der Spaltung längs eines einzigen Polygons und in der Einschaltung eines aus einer einfachen Reihe von Sechsecken bestehenden Elementarstreifens. Polygone, die eine solche Erweiterung zulassen, werden Normalpolygone genannt. Von ihnen wird gezeigt, dass sie auf jedem Polyeder existiren; es gilt nämlich der Satz, dass es zu jeder Polyederkante ein linksseitiges und ein rechtsseitiges Normalpolygon giebt, längs dessen sich je ein Elementarstreifen in die Oberfläche des Polyeders einschalten lässt.

Durch das Vorstehende gewinnen die aus lauter Sechsecken bestehenden polyedrischen Flächen eine besondere Bedeutung. Der Verfasser nennt sie Hexagonoide und widmet ihnen eine eingehende Untersuchung. Ein auf einem Hexagonoid H verlaufendes Kantenpolygon hat höchstens fünf auf einander folgende Kanten, die in einer Ebene liegen. Zerschneidet man das Hexagonoid längs des Kantenpolygons P in zwei Teile A und B, so ist das Kantenpolygon Randpolygon von A und B. In erster Hinsicht möge die Zahl seiner h-kantigen ebenen Züge mit a_h bezeichnet werden, ebenso sei b_h die entsprechende Zahl, wenn wir P als Randpolygon von B betrachten. Alsdann soll der absolute Wert C der Differenz $a_3 + 2a_4 + 3a_5 - (b_3 + 2b_4 + 3b_5)$ die Charakteristik des Polygons heissen; sie dient dazu, geometrische Kriterien dafür zu schaffen, wann ein Kantenpolygon ein Elementarpolygon ist. Dies wird folgendermassen ausgeführt.

Denkt man sich in einem Kantenpolygon diejenigen Kanten, die einer Grenzfläche angehören, durch den complementären

Kantenzug der nämlichen Grenzfläche ersetzt, so entsteht ein neues Kantenpolygon, das der Verfasser ein Nachbarpolygon des ersten nennt. Zwei Nachbarpolygone eines Hexagonoides haben die nämliche Charakteristik, die Charakteristik hat daher auch für die beiden Randpolygone eines Hexagonoides denselben Wert. Dies giebt Anlass, diejenigen Hexagonoide H_c zu studiren, deren eines Randpolygon ein ebenes c-kantiges Polygon ist. Die auf ihm verlaufenden Kantenpolygone haben die Charakteristik c oder 6, je nachdem sie mit der Grundfläche einen Gürtel beranden oder nicht; für $c = 6$ existirt unter ihnen mindestens eins, das einem beliebig gegebenen Polygon der Charakteristik 6 isomorph ist; allerdings muss es überdies „irreducibel“ sein. Ist nämlich im besonderen $c = 6c'$, so kann von zwei auf dem Hexagonoid H_c verlaufenden Kantenpolygonen der Charakteristik $6c'$ keines einen Kantenzug enthalten, der dem gesamten anderen Kantenpolygon isomorph ist. Ein Kantenpolygon dieser Art, von dem also nicht bereits ein Teil isomorph auf ein geschlossenes Kantenpolygon eines Hexagonoides mit ebener Grundfläche von der gleichen Charakteristik $c = 6c'$ abgebildet werden kann, wird irreducibel genannt.

Die einfachsten Hexagonoide sind diejenigen, deren Charakteristik Null ist, die sich also z. B. durch beiderseitige Elementarerweiterung eines Polygons von der Charakteristik Null ergeben. Sie werden als Elementarhexagonoide H_c bezeichnet. Jedes irreducible Kantenpolygon der Charakteristik $6c'$ ist mindestens einem Polygon eines Hexagonoides $H_{6c'}$ isomorph; im besonderen sind die Elementarpolygone stets den Polygonen eines gewissen Elementarhexagonoides isomorph. Es folgt daraus, dass jedes Elementarpolygon die Charakteristik Null hat. Umgekehrt ist auch jedes irreducible Kantenpolygon, das die Charakteristik Null hat, ein Elementarpolygon. Im Anschluss an diese Sätze kann die Aufgabe, die Elementarpolygone eines Polyeders zu bestimmen, erledigt werden. Auf jedem convexen Polyeder giebt es mindestens ein derartiges Polygon; für das Tetraeder, Hexaeder und Pentagondodekaeder werden sie vollständig bestimmt.

Für die Beziehung der enthaltenden und enthaltenen Poly-

eder zu einander erübrigt noch die Frage, welches die Elementarerweiterungen sind, die längs eines Elementarpolygons oder eines Elementarnetzes in ein Polyeder eingeschaltet werden können. Man hat wieder reducible und irreducible Erweiterungen zu unterscheiden, und zwar sind diejenigen reducibel, aus denen sich, ebenso wie bei den Polyedern, elementare Flächengürtel oder Flächenstreifen ausschalten lassen. Nur die irreduciblen bedürfen der Untersuchung. Es zeigt sich, dass zu jedem Elementarpolygon oder Elementarnetz eines Polyeders nur eine endliche Zahl von irreduciblen Einschaltungsflächen existirt; sie lassen sich durch eine endliche Zahl von Processen bestimmen. Zwei Arten der Elementarerweiterung sind besonders einfach; sie sind für alle Polyeder zulässig. Bei der einen werden alle Ecken, bei der anderen alle Kanten abgeschnitten, und die Polyeder so deformirt, bis die neuen Grenzflächen, d. h. die Dreiseite resp. Vierseite, in Sechsecke übergehen. Dem ersten Process entspricht eine irreducible, dem zweiten eine reducible Einschaltungsfläche.

Der Schluss des Buches beschäftigt sich mit den Polyederstämmen und Polyederbereichen. Zu jeder Zahl m der obigen Gleichung (2) gehört ein Polyederbereich. Es handelt sich im wesentlichen darum, die Existenz des Bereiches B_0 für $m = 0$ zu zeigen; die Existenz der Polyederbereiche B_m folgt daraus, dass man aus einem irreduciblen Polyeder des Bereiches B_0 durch geeignete Umformungsprocesse irreducible Polyeder jedes Bereiches B_m ableiten kann. Ferner definirt jedes ganzzahlige Lösungssystem der Gleichung (1) wirklich einen und nur einen Polyederstamm. Die Zahl der Stämme des Bereiches B_m ist daher gleich dem Producte der ganzzahligen positiven Lösungen der beiden Gleichungen (2); sie können bekanntlich durch ein einfaches Recursionsverfahren gefunden werden. Zu jedem Polyederstamm gehören im allgemeinen verschiedene irreducible Polyeder; es wird gelehrt, wie man sie aus der gegebenen Zahl der Grenzflächen, zu denen noch beliebig viele Sechsecke kommen können, zu construiren hat. Uebersteigt die Zahl dieser Sechsecke eine gewisse Grenze, so wird das Polyeder reducibel; die Zahl der irreduciblen Polyeder eines Stammes ist daher endlich.

Rechnet man noch alle Polyeder, die aus einem Stammpolyeder durch Elementarerweiterungen entstehen, in eine Polyederfamilie und beachtet, dass bei Elementarerweiterungen Bereich und Stamm unverändert bleiben, so resultirt schliesslich folgende Einteilung aller Polyeder: Zu jedem *m* gehört ein Bereich, in ihm giebt es eine endliche Zahl von Stämmen, in jedem Stamm eine endliche Zahl von Familien und in jeder Familie eine unendliche Zahl von allomorphen Individuen.

Einige der vorstehenden Resultate werden auch auf singuläre Polyeder ausgedehnt. Sfs.

E. Cesàro. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polyèdre soit superposable à son image vue dans un miroir plan, etc. Belg. Bull. (3) XII. 226-247.

De Tilly. Rapport. Ibid. 195-197.

Der Verf. löst die Frage vollständig. Ausser den Polyedern, welche eine Symmetrieebene oder ein Symmetriecentrum haben, findet er eine dritte Lösung, nämlich die Polyeder, welche eine Symmetrieaxe gerader Ordnung haben, sobald die zu derselben senkrechten Schnitte paarweise gleich und gegen einander um ein gerades Submultiplum von zwei Rechten gedreht sind.

Mn. (Lp.)

N. Sokolow. Theorie der symmetrischen Polyeder. Kiew. Nachr. 1891. XI. 1-22. (Russisch.)

Eine ganz elementare Auseinandersetzung der Grundlagen der Theorie, nach der Absicht des Verfassers bestimmt, als Einleitung zur Substitutionentheorie zu dienen. Si.

E. Ciani. Sul pentaedro completo. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII_1. 209-216.

Fasst man von den fünf Ebenen des Fünfflachs die Ebenen 1, 2, 3 als Seitenflächen einer dreiseitigen Ecke auf und betrachtet die Ebenen 4 und 5 als Schnittebenen, so entstehen in

ihnen zwei perspectivische Dreiecke. Verbindet man je zwei Paare entsprechender Dreiecksecken über Kreuz, so erhält man drei Punkte *A*, *B*, *C*, von denen bekanntlich der Satz gilt, dass sie in einer durch den Schnitt von 4 und 5 gehenden Ebene liegen, die zu den Ebenen 4 und 5 und zur Ecke 123 harmonisch ist. Dieser Satz ist die Grundlage der vom Verfasser abgeleiteten Resultate. Sie knüpfen sich an die Diagonalelemente des vollständigen Fünfflachs. Eine jede Ebene des Fünfflachs wird von den vier anderen Ebenen in einem vollständigen Vierseit geschnitten; seine Diagonalen sind die Geraden, die als Diagonalgeraden erster Art bezeichnet werden, und deren Schnittpunkte geben wieder die Diagonalpunkte erster Art. Als Diagonalebenen werden die Verbindungsebenen der Ecken mit den gegenüber liegenden Kanten eingeführt. Eine solche ist z. B. die Ebene, welche die Ecke 123 mit der Schnittgeraden 45 verbindet, während schliesslich die oben genannte Ebene, die zur Diagonalebene und den Ebenen 4 und 5 harmonisch liegt, harmonische Ebene des Fünfflachs genannt wird.

Es gilt nun der Satz, dass das von den zehn Diagonalebenen gebildete vollständige Zehnflach 45 verschiedene Kanten besitzt, durch welche je zwei der zehn Ebenen hindurchgehen; 15 von ihnen sind die Diagonalgeraden erster Art; die übrigen 30 werden als Diagonalgeraden zweiter Art bezeichnet. Die letzteren treffen sich zu je vier in den 15 Diagonalpunkten erster Art, zu je drei in den zehn Ecken des Fünfflachs und zu je zwei in 20 weiteren Punkten, die Diagonalpunkte zweiter Art genannt werden. Diese 20 Diagonalpunkte zweiter Art sind identisch mit den Ecken *A*, *B*, *C* der oben erwähnten Dreiecke, und die Seiten dieser Dreiecke sind wieder die Diagonalgeraden zweiter Art. Hieraus folgt schliesslich das interessante Resultat, dass die 10 harmonischen Ebenen sich zu je dreien in 10 Geraden schneiden und zu je sechs in 5 Punkten zusammentreffen; sie bilden also die 10 Flächen eines vollständigen räumlichen Fünfecks, dessen Eigenschaften denen des ursprünglichen durchaus reciprok zur Seite stehen.

Zum Schluss wird noch gezeigt, dass in jeder Diagonalebene

die sechs Diagonalpunkte erster Art und die sechs Diagonalen zweiter Art, die in ihr liegen, eine Figur bilden, die zugleich ein Pascal'sches und ein Brianchon'sches Sechseck ist, und dass die 15 Diagonalpunkte erster Art sämtlich auf einer Fläche zweiter Ordnung enthalten sind. Sfs.

V. Schlegel. Ueber die verschiedenen Formen von Gruppen, welche r beliebige Punkte im n-dimensionalen Raum bilden können. Hoppe Arch. (2) X. 283-299.

Im n-dimensionalen Raum haben $n+1$ beliebige Punkte, die nicht etwa in einem Raum niederer Dimension liegen, stets die gleiche Lage zu einander; so bestimmen z. B. vier solche Punkte des gewöhnlichen Raumes immer ein Tetraeder. Für $n+2$ Punkte sind bereits mehrere Lagen möglich; ihre Zahl beträgt $\frac{n+1}{2}$ oder $\frac{n+2}{2}$, je nachdem n ungerade oder gerade ist. So bilden vier Punkte einer Ebene (von speciellen Fällen abgesehen) entweder ein convexes Viereck, oder ein Dreieck, das den vierten Punkt umschliesst, und fünf Punkte des Raumes sind entweder die Ecken eines aus zwei Tetraedern bestehenden Hexaeders, oder der fünfte Punkt wird von dem Tetraeder der vier andern umschlossen. Den allgemeinen Satz für r Punkte des n-dimensionalen Raumes in allgemeiner Lage gewinnt der Verfasser nach einer Methode, die sich für die Ebene folgendermassen darstellt. Man wähle zunächst zwei Punkte A_1 und A_2 so aus, dass alle übrigen Punkte auf derselben Seite der Geraden A_1A_2 liegen. Alsdann kann man von A_2 nur eine Gerade ziehen, die noch einen weiteren Punkt enthält, während alle übrigen Punkte innerhalb des von beiden Geraden gebildeten concaven Winkels liegen. Auf diese Weise gelangt man schliesslich zu einem convexen Polygon, das alle übrigen Punkte umschliesst. Mit ihnen verfährt man analog und gelangt so zu folgendem Satz: Man zerlege die Zahlen r, $r-1$, $r-2$ auf alle Arten in Summanden, deren jeder ≥ 3 ist, und permutire die Summanden auf alle möglichen Arten, so giebt die Zahl der Permutationen

die gesuchte Anzahl. Analog lautet der Satz für den n-dimensionalen Raum.

Uebrigens ist zu bemerken, dass der für $n+2$ und der für r Punkte abgeleitete Satz formal nicht im Einklang stehen, weil das Kriterium dafür, wann zwei Punktgruppen als identisch zu betrachten sind, nicht in beiden Fällen das gleiche ist.

Sfs.

V. Schlegel. Ueber congruente Raumteilungen. Hoppe Arch. (2) X. 154-168.

Die Aufgabe, den Raum durch Flächen constanter Krümmung in congruente Teile zu zerlegen, die für Räume positiver Krümmung bereits von Hrn. Hossfeld (F. d. M. XVIII. 1886. 456), für Räume negativer Krümmung von Hrn. Dyck eine Lösung gefunden hat (F. d. M. XV. 1883. 110), wird hier nach anderer Methode noch einmal behandelt. Der Verfasser benutzt hierzu die früher von ihm abgeleiteten regelmässigen Zellkörper des vierdimensionalen Raumes und construirt mit ihrer Hülfe die gesuchten Teilungen auf dieselbe Weise, auf die man die gewöhnliche Kugelteilung mittels der dreidimensionalen regulären Körper bestimmen kann. Den Ausgangspunkt bildet stets die Teilung in solche Fundamentalbereiche, in welche die einzelnen Körper durch alle ihnen eigentümlichen Symmetrieebenen u. s. w. zerfallen (Hauptteilung); aus ihnen werden die andern durch Zusammenfassung einzelner Fundamentalbereiche abgeleitet. Für die Räume negativer Krümmung werden jedoch nicht alle Gebietsteilungen angegeben. Sfs.

A. Schönflies. Krystallsysteme und Krystallstructur. Leipzig. Teubner. XII + 638 S. gr. 8°.

Die krystallisirte Materie unterscheidet sich bekanntlich dadurch von den übrigen festen Körpern, dass ihr physikalisches Verhalten längs verschiedener Richtungen im allgemeinen verschieden ist. Nennt man alle Richtungen, in denen sich ein Krystall in jeder Beziehung gleichartig verhält, gleichwertige

Richtungen, und denkt man sich von irgend einem Punkte O des Krystalles aus eine Gerade g und alle mit ihr gleichwertigen Geraden g_1, g_2, ... gezogen, so ist die Lage dieser N Geraden, wie die Erfahrung lehrt, durch bestimmte Symmetrieeigenschaften, wie Symmetrieaxen, Symmetrieebenen u. s. w., ausgezeichnet. Die Symmetrieeigenschaften der N Geraden g, g_1, g_2, ... sind davon unabhängig, wie die Ausgangsrichtung g innerhalb der Krystallmasse angenommen wird; sie erhalten sich überdies während der wechselnden physikalischen Zustände, in denen sich der Krystall befinden kann. Diese Thatsache kann als das „definirende Grundgesetz der krystallisirten Materie“ betrachtet werden und wird vom Verfasser zweckmässig als „Symmetriegesetz“ bezeichnet.

Die Thatsache, dass die Zahl der einzelnen Symmetrieeigenschaften, welche in den Krystallen vorkommen, nur eine geringe ist, und dass sie in wechselnder Verbindung die Gesamtsymmetrie eines jeden Krystalles constituiren, hat schon in früher Zeit zu Versuchen angeregt, selbständig solche Verbindungen der genannten Symmetrieelemente auszudenken, welche, wenn auch noch nicht beobachtet, so doch theoretisch möglich sind. Man kann aber die Symmetrieeigenschaften eines Krystalles nicht beliebig vorschreiben; vielmehr sind sie durch bestimmte geometrische Gesetze mit einander verbunden. Hier ist der Punkt, wo die mathematische Untersuchung einsetzt. Augenscheinlich handelt es sich darum, alle überhaupt möglichen Verbindungen von Symmetrieeigenschaften zu ermitteln, welche in den Krystallen auftreten können. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Zahl dieser Symmetrieeigenschaften für jeden Krystall nur eine begrenzte ist, und dass von Symmetrieaxen nur zwei-, drei-, vier- oder sechszählige auftreten.

Wie der Marburger Krystallograph Hessel zuerst gezeigt hat, beträgt die Gesamtheit aller krystallographischen Symmetrieklassen 32. Ihrer Ableitung ist der erste Teil des Werkes gewidmet. Es werden zunächst diejenigen Krystallabteilungen ermittelt, welche nur Symmetrieaxen besitzen, und dann für jede von ihnen die ausserdem noch mit Symmetrieebenen u. s. w. be-

hafteten Klassen abgeleitet. Von hier aus ist es sodann leicht, diejenige Anordnung aller 32 Krystallklassen zu treffen, welche der gewöhnlichen Systematik entspricht.

Lässt man, wie es der rein geometrischen Fragestellung entsprechen würde, beliebige n-zählige Symmetrieaxen zu, so ist die Zahl aller möglichen Symmetrieklassen unbegrenzt gross. Von ihnen stellen die 32 Krystallklassen diejenigen dar, deren Axen nur zwei-, drei-, vier- oder sechszählig sind. Die Beschränkung auf derartige Axen kann als eine Folge des Gesetzes von den rationalen Indices betrachtet werden. Die deductive Ableitung der 32 möglichen Krystallklassen ist daher nur auf Grund „zweier empirisch gewonnenen Gesetze“ möglich; das eine ist das fundamentale Symmetriegesetz, das andere ist das Gesetz der rationalen Indices. Die „Structurtheorien“ sind hierin glücklicher; sie vermögen die Gesetze, welche die Symmetrie der Krystalle betreffen, einzig und allein aus einer allgemeinen molecularen Hypothese zu begründen, ohne dass es nötig wäre, auf eines jener beiden Gesetze zu recurriren.

Die Structurtheorien knüpfen bekanntlich an die fundamentale Hypothese an, dass die moleculare Eigenart der Krystalle ihren Ausdruck in der regelmässigen Anordnung der Krystallbausteine findet, und zwar prägt sich die Regelmässigkeit darin aus, dass alle diese Bausteine von gleicher Art sind, und dass jeder von ihnen von den benachbarten Bausteinen auf gleiche Weise umgeben ist. Diese Vorstellung ist, seitdem ihr Haüy, wenn auch in unvollkommener Weise, zuerst Ausdruck gegeben, ununterbrochen in Geltung geblieben. Der Verfasser beweist, dass sie in ungezwungener Weise das moleculare Verständnis der fundamentalen Gesetze der Krystallsubstanz vermittelt; er zeigt, dass das oberste Grundgesetz der krystallisirten Materie, nämlich das Symmetriegesetz, als eine an der Spitze der Theorie stehende Consequenz von principieller Bedeutung erscheint, dass sich auch die speciellen Gesetze, welche die Einteilung nach der Symmetrie betreffen, als natürliche Folgerungen der Ausgangshypothese ergeben, und dass sie endlich auch eine einfache Deutung des Gesetzes der rationalen Indices gestattet. Die auf

keine andere Weise erklärbare Beschränkung auf die zwei-, drei-, vier- und sechszähligen Symmetrieaxen, sowie die Einteilung in die 32 Klassen wird auf Grund dieser Hypothese überhaupt erst begreiflich.

Die vorstehenden Bemerkungen lassen erkennen, welches die Aufgaben sind, die in der oben genannten Schrift zu lösen waren. Zunächst handelt es sich darum, die Natur eines regelmässigen Molekelhaufens genauer zu studiren und zu zeigen, dass ihm in dem nämlichen Sinn ein bestimmter Symmetriecharakter beizulegen ist, wie dem Krystall, welchen er darstellen soll. Die Einteilung aller Molekelhaufen nach der Symmetrie, sowie die Ableitung aller überhaupt existirenden regelmässigen Molekelhaufen ist die zweite Aufgabe, die zu behandeln war. Die Untersuchung gipfelt in dem Resultat, dass im ganzen 230 krystallographisch verwendbare regelmässige Molekelhaufen vorhanden sind, und dass sie rücksichtlich der Symmetrie in die nämlichen 32 Klassen zerfallen, zu welchen die von dem Symmetriegesetz und dem Gesetz der rationalen Indices ausgehende Deduction hinführt. Für jede dieser 32 Klassen sind sämtliche Molekelhaufen gleicher Symmetrie genau angegeben worden; die Aufgabe, einen Krystall von bestimmter Symmetrie durch einen geeigneten Molekelhaufen darzustellen, kann daher an der Hand der genannten Schrift unmittelbar erledigt werden. Die grösste Zahl von Molekelhaufen verschiedener Art, welche einer einzelnen Krystallklasse entsprechen, beträgt 30; die bezügliche Krystallklasse ist die Holoedrie des rhombischen Systems. Hingegen tritt auch eine Krystallklasse auf, deren Symmetrie nur in einer einzigen Art von Molekelhaufen verkörpert ist, nämlich die mit dreizähliger Axe versehene Tetartoedrie des hexagonalen Systems. Es ist mithin die Möglichkeit gegeben, innerhalb jeder der 32 Krystallklassen wieder eine grössere oder geringere Zahl von Unterabteilungen zu statuiren, je nach der Art des Molekelhaufens, durch welchen die Krystallsubstanz zu ersetzen ist.

Der specifische Symmetriecharakter eines regelmässigen Molekelhaufens hängt augenscheinlich von zwei Factoren ab, nämlich von der räumlichen Anordnung der Molekeln und von ihrer Qua-

lität, d. h. von ihrer Form, ihrer physikalischen Wirkungsweise, ihrer chemischen Beschaffenheit u. s. w. Hierüber sind die verschiedensten Annahmen möglich, und dementsprechend kann die Symmetrie eines Molekelhaufens auf mannigfaltige Weise begründet werden. Die Gesetze, welche hierfür massgebend sind, sind in der genannten Schrift in ausführlicher Weise abgeleitet worden. Im besondern wird erörtert, wie viele verschiedene Structurauffassungen auf Grund der Hypothese von der regelmässigen Anordnung der Molekeln überhaupt möglich sind, und in welchem Verhältnis die einzelnen Structurauffassungen zu einander stehen.

Unter allen Structurauffassungen giebt es zwei, welche als die beiden Extreme betrachtet werden können. Die eine drückt sich in der Bravais'schen Gittertheorie aus, die andere knüpft an Wiener und Sohncke an. Bravais nimmt bekanntlich an, dass die Schwerpunkte aller Molekeln ein Raumgitter bilden. Setzt man in jeden dieser Eckpunkte je eine gleichartige Molekel so ein, dass alle Molekeln parallel zu einander stehen, so erhält man einen Bravais'schen Molekelhaufen. Durch geeignete Wahl des Raumgitters und der Molekel kann man bewirken, dass die Symmetrie des zugehörigen Molekelhaufens mit der Symmetrie irgend einer der 32 Krystallklassen übereinstimmt. Die Raumgitter zerfallen nämlich rücksichtlich der Symmetrie in sieben Klassen, welche genau den sieben Krystallsystemen entsprechen. Soll nun für einen Krystall, der irgend einer Abteilung eines Krystallsystems angehört, die ihm entsprechende Structur hergestellt werden, so benutzt man ein Raumgitter, welches die Symmetrie des Krystallsystems besitzt, und stellt in jeden Gitterpunkt eine Molekel, deren Symmetrie genau mit derjenigen der bezüglichen Unterabteilung übereinstimmt. Die Bravais'sche Structurauffassung läuft daher darauf hinaus, den Molekeln dieselbe Symmetrie beizulegen, welche der Krystall besitzt; er stattet die kleinsten Teilchen genau mit denjenigen Eigenschaften aus, deren Vorkommen erklärt werden soll; ein Verfahren, das oftmals den ersten Versuch darstellt, um die physikalischen Eigenschaften unserem Verständnis näher zu bringen. Dem gegenüber sind Wiener und Sohncke davon ausgegangen, für die Erklärung der

Symmetrie allein die Anordnung der individuellen Bausteine ins Auge zu fassen. Dieser Forderung kann, wie der Verfasser nachweist, im vollsten Umfange genügt werden; für jede der 32 Krystallklassen giebt es Molekelhaufen, welche, wie auch immer die Molekel beschaffen sein mag, die Symmetrie der bezüglichen Krystallklasse besitzen. Diese Molekelhaufen sind gerade diejenigen 230, deren Existenz oben bereits angeführt wurde. Für die Structurauffassung, welche von ihnen ausgeht, unterliegt die Molekel weder nach Form noch Wirkungsweise irgend einer positiven Bestimmung.

Die Möglichkeit, zwischen die beiden vorstehend genannten Structurtheorien noch eine Reihe anderer Structurauffassungen einzuordnen, beruht darauf, dass sich die Gesamtsymmetrie eines Krystalles im allgemeinen so in zwei Teile zerlegen lässt, dass einer von beiden der Molekel aufgeprägt wird, während sich der andere in der Anordnung, d. h. in der Art des Aufbaues darstellt. Jeder derartigen Zweiteilung der Krystallsymmetrie entspricht eine andere Structurvorstellung; je höher die Symmetrie eines Krystalles ist, um so mannigfaltiger ist daher im allgemeinen die Art, auf welche die Zweiteilung ausgeführt werden kann. Welche Structurauffassung in jedem speciellen Fall am zweckmässigsten zu Grunde gelegt wird, ist eine Frage, deren Entscheidung dem Krystallographen überlassen bleiben muss. Von mathematischer Seite könne es sich, wie der Verfasser bemerkt, nur darum handeln, die Gesamtheit aller überhaupt möglichen Structurauffassungen anzugeben und zu kennzeichnen. Sfs.

V. Martinetti. Sopra un gruppo di configurazioni regolari contenute nell'esagrammo di Pascal. Atti dell'Acc. Gioenia di Sc. nat. in Catania. (4) III. 20 S.

Betrachtet man unter allen Pascal'schen Sechsecken, die sich aus sechs Punkten einer C_2 ableiten lassen, vier solche, welche dieselben Paare von Punkten zu Gegenecken haben, so bilden die Sechseckseiten mit den vier Pascal'schen Geraden eine Configuration, von der man zeigen kann, dass sie regelmässig ist,

und dass sie mit der von Hrn. de Vries betrachteten Configuration $(12_4, 16_3)B$ identisch ist; d. h. ihre 12 Punkte liegen auf einer C_3 und sind conjugirte Punktepaare zu den sechs Punkten eines der C_3 einbeschriebenen vollständigen Vierseits. Diese sechs Punkte sind bekanntlich ihrerseits conjugirte Punktepaare zu den drei Punkten einer Geraden, welche die zweite Begleiterin einer jeden der 16 Configurationsgeraden ist. Geht man umgekehrt von einer solchen Geraden aus, so lassen sich zu ihr 96 verschiedene Configurationen $(12_4, 16_3)B$ auf der C_3 angeben.

Herr de Vries hatte gezeigt, dass die Configuration 12 Steiner'sche Achtecke enthält, deren Seiten abwechselnd durch zwei feste Punkte laufen. Der Verfasser fügt hinzu, dass in ihr noch 12 andere Steiner'sche Achtecke mit vier festen Punkten und 96 Sechsecke mit drei festen Punkten existiren; andere Steiner'sche Polygone sind in ihr nicht vorhanden.

Unter den 12 Configurationspunkten giebt es vier verschiedene Gruppen von sechs Punkten, die, wie die sechs Ausgangspunkte, auf einem Kegelschnitte liegen und die im Eingang angegebene Erzeugung zulassen.

Verbindet man endlich noch diejenigen Punkte mit einander, die als Configurationspunkte von einander getrennt sind, so schneiden die Verbindungsgeraden die C_3 in 12 neuen Punkten, von denen der interessante Satz gilt, dass sie ebenfalls eine Configuration $(12_4, 16_3)B$ bilden. Sfs.

J. de Vries. Sur les configurations planes dont chaque point supporte deux droites. Palermo Rend. V. 221-226.

Die bezüglichen Configurationen lassen sich dadurch herstellen, dass man von den sämtlichen Schnittpunkten eines vollständigen m-Seits auf jeder der m Geraden je p Punkte beibehält. Jedes vollständige m-Seit zerfällt dadurch in zwei Configurationen der betrachteten Art, die der Verfasser complementäre Configurationen nennt. Durch jeden Punkt einer solchen Configuration gehen nur zwei Gerade, während die Zahl der Punkte, die auf einer Geraden liegen, unbegrenzt wachsen kann.

Der Verfasser beschäftigt sich im wesentlichen mit den Configurationen $(3n_2, 2n_3)$ und weist nach, dass man sie aus den Configurationen $(3(n-1)_2, 2(n-1)_3)$, resp. $(3(n-2)_2, 2(n-2)_3)$ durch Hinzufügung gewisser Punkte und Geraden ableiten kann. Solcher Processe giebt es drei. Die Configuration mit kleinster Punktezahl ist das vollständige Vierseit $(6_2, 4_3)$. Von Configurationen $(9_2, 6_3)$ giebt es bereits zwei verschiedene; aus ihnen erhält man fünf Configurationen $(12_2, 8_3)$, 19 Configurationen $(15_2, 10_3)$ u. s. w.

Analog können die Configurationen $(2n_2, n_4)$ aus den Configurationen $(2(n-1)_2, (n-1)_4)$ und $(2(n-5)_2, (n-5)_4)$ durch Erweiterungsprocesse abgeleitet werden. Den Ausgangspunkt bildet hier das vollständige Fünfseit als Configuration $(10_2, 5_4)$. Man gelangt zu einer Configuration $(12_2, 6_4)$, zwei Configurationen $(14_2, 7_4)$ u. s. w. Sfs.

J. de Vries. Ueber räumliche Configurationen, welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen. Wien. Ber. C. 822-842.

Jeder der einfachen regelmässigen Körper bildet in seinen Ecken, Kanten und Ebenen eine regelmässige räumliche Configuration. Dies bleibt bestehen, wenn man hierzu die Diagonalen, die Kantenmitten, sowie die sie verbindenden Geraden und Ebenen fügt. Dies sind die Configurationen, von denen der Verfasser ausgeht, und aus denen er durch Weglassen einzelner Gruppen von Punkten, Linien und Ebenen eine grosse Zahl weiterer Configurationen ableitet. Die meisten von ihnen waren bisher nicht bekannt. Von bekannten Configurationen treten ausser den vierfach perspectiven (desmischen) Tetraedern, die schon Hr. Reye am Würfel und Oktaeder aufgefunden hat, die Kummer'sche Configuration auf, sowie die zuerst von Möbius entdeckte Figur der beiden einander zugleich ein- und umgeschriebenen Tetraeder. Diese bilden bekanntlich eine Configuration $(8^4, 8_4)$, d. h. acht Punkte und acht Ebenen von der Art, dass jede Ebene vier Punkte enthält, und durch jeden Punkt vier Ebenen gehen.

Uebrigens zeigt der Verfasser, dass es noch eine zweite Configuration dieser Art giebt. Von Einzelresultaten sei noch erwähnt, dass nicht weniger als neun geometrisch verschiedene Configurationen (12^4, 12_4) auftreten, d. h. 12 Punkte und 12 Ebenen, so dass jeder Punkt in vier Ebenen liegt, und jede Ebene vier Punkte enthält. Sfs.

Jan de Vries. Sur une groupe de configurations planes régulières et quelques configurations planes connexes, de points et de courbes. Arch. Néerl. XXV. 33-56.

Uebersetzung der Abhandlung: Amst. Versl. en Meded. (3) VII. 75-96 (F. d. M. XXII. 1890. 560). Mo.

Jan de Vries. Sur une configuration plane de vingt-quatre points et de dix-huit droites. Arch. Néerl. XXV. 57-69.

Fast ganz eine Uebersetzung der Abhandlung: Amst. Versl. en Meded. (3) VII. 177-191 (F. d. M. XXII. 1890. 560).

Mo.

H. Schroeter. Die Hesse'sche Configuration (12_4, 16_3). J. für Math. CVIII. 269-312.

Die Hesse'sche Configuration (12_4, 16_3) ist die Configuration solcher 12 Punkte einer Curve dritter Ordnung C_3, die als Tangentialquadrupel zu den drei Schnittpunkten der C_3 mit einer Geraden gehören. Diese Configuration ist kürzlich von Herrn de Vries eingehend untersucht worden (vgl. F. d. M. XX. 1889. 589 u. 591); die von ihm gefundenen Eigenschaften werden hier in elementarer Form nochmals abgeleitet.

Schröter erzeugt die Configuration, indem er von zwei perspectiven Dreiecken ausgeht und deren Ecken wechselweise über Kreuz verbindet; dadurch entsteht ein drittes Dreieck, und diese drei Dreiecke bilden mit den drei Punkten der gemeinsamen Perspectivitätsaxe eine Figur, die — was übrigens bereits Bri-

schon bekannt war — eine Configuration $(12_4, 16_3)$ darstellt. Aus dieser Erzeugung lassen sich die weiteren Eigenschaften einfach ableiten. Zunächst wird die Existenz der „associirten“ Configuration $(12_4, 16_3)$ bewiesen; es folgt die Auflösung der Configuration in zwei einander ein- und umbeschriebene Sechsecke und ihre Zerlegung in drei Vierecke, von denen je zwei vierfach perspectivisch liegen; sodann werden die Eigenschaften der den beiden associirten Configurationen gemeinsamen neun Diagonalpunkte erörtert, d. h. der dreimal drei Diagonalpunkte, die in den eben genannten Vierecken auftreten, u. s. w. Neu sind die Sätze, dass diese neun Diagonalpunkte in drei perspectivische Dreiecke zerfallen, die mit den drei Punkten ihrer gemeinsamen Perspectivitätsaxe selbst eine $(12_4, 16_3)$ bilden, und dass vier Seiten des einen Vierecks mit vier Seiten eines zweiten Vierecks acht Tangenten eines Kegelschnitts bilden; solcher Achtecke, resp. solcher Kegelschnitte giebt es neun. Zum Schluss wird gezeigt, dass jede der beiden associirten Configurationen auf je einer C_3 liegt, dass diese beiden C_3 sich überdies in den neun gemeinsamen Diagonalpunkten schneiden, und dass die 12 Configurationspunkte die drei Tangentenquadrupel von den drei Schnittpunkten einer C_3 mit einer Geraden sind, womit die Identität der Configuration mit der Hesse'schen Configuration erwiesen ist.

Herr de Vries hatte gezeigt, dass es noch eine zweite Configuration $(12_4, 16_3)$ giebt, die ebenfalls mit den C_3 zusammenhängt. Sie besteht aus sechs Paaren conjugirter Punkte, und die sechs Tangentialpunkte, die zu jedem Punktepaar gehören, sind die sechs Punkte eines der C_3 einbeschriebenen vollständigen Vierseits. Auch diese Configuration erzeugt Schröter aus zwei perspectivischen Dreiecken und leitet hieraus die eben genannte Beziehung zu den C_3 ab. Ersetzt man die beiden Dreiecke im besonderen durch die Schnittpunkte zweier Geraden mit der C_3, so entsteht diejenige specielle Configuration $(12_4, 16_3)$, auf die Hr. Hurwitz bei Gelegenheit eines Schliessungsproblems aufmerksam gemacht hat (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 657). Sfs.

P. Serret. Sur une propriété d'involution, commune à un groupe plan de cinq droites et à un système de neuf plans. C. R. CXIII. 326-328, 347-349.

Der Verfasser beweist die folgenden zwei Sätze: 1) Sind p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 die fünf Seiten eines beliebigen ebenen Fünfecks, und ist d_1 der Durchmesser, der allen dem Viereck p_2, p_3, p_4, p_5 eingeschriebenen Kegelschnitten gemeinsam ist, u. s. w., so sind die fünf Paare von Richtungen d_i, p_i conjugirte Richtungen derselben Involution. Es giebt also einen Kegelschnitt, bezüglich dessen jede Gerade d_i den Sehnen von der Richtung p_i conjugirt ist, nämlich den aus den fünf Geraden p_i kubisch ableitbaren Kegelschnitt.

2) Sind p_1, p_2, ..., p_9 neun Ebenen, die den neun gemeinsamen Tangentenebenen von zwei Kegeln dritter Klasse parallel sind, und ist d_1 derjenige Durchmesser, der allen den acht Ebenen p_2, p_3, ..., p_9 einbeschriebenen Flächen zweiter Ordnung gemeinsam ist u. s. w., so sind die neun Durchmesser d_i wiederum bezüglich einer und derselben Fläche zweiter Ordnung den Ebenen von der Richtung p_i conjugirt. Diese Fläche ist die aus den Ebenen p_i kubisch ableitbare Fläche. Sfs.

K. A. Andrejew. Zur Frage über die Configurationen. Charkow Ges. Mitt. (2) II. 94-107. (Russisch.)

Es wird hier auf einen Specialfall der von Hrn. Th. Reye (Geom. d. Lage, II. Aufl. 1877 S. 4, J. für Math. LXXXIV. 209-213, Acta Math. I. 93-96) zuerst betrachteten und von einigen anderen, besonders von Hrn. S. Kantor untersuchten geometrischen Gebilde hingewiesen. Da die einfachste dieser Configurationen schon Möbius bekannt war (Werke B. I. S. 439-446), so nennt der Verfasser sie Möbius'sche Configurationen. Sie sind vom Typus $Cf(n, n)[2^{n-1}, 2^{n-1}]$. Jeder Fläche zweiter Ordnung kann man eine Möbius'sche Configuration beliebiger Ordnung ein- und umschreiben. Si.

A. SCHÖNFLIES. Ueber Configurationen, welche sich aus gegebenen Raumelementen durch blosses Schneiden und Verbinden ableiten lassen. Naturf. Ges. Halle. LXIV. 12-13.

P. A. MACMAHON. Yoke-chains and multipartite compositions in connexion with the analytical forms called trees. Lond. M. S. Proc. XXII. 330-346.

Bericht auf S. 132 dieses Bandes.

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

H. SCHOTTEN. Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. Leipzig. Teubner. Bd. I: IV + 370 S., Bd. II: IV + 410 S. 8°. (1890-93.)

Wer als junger Lehrer nach abgelegter Oberlehrerprüfung zum ersten Male den geometrischen Unterricht übernehmen musste, war bisher für seinen Beruf sehr wenig vorbereitet. Das Studium der Mathematik auf der Universität setzt die auf der Schule gelehrten Kenntnisse voraus, geht aber auf den Inhalt der Elementar-Mathematik höchstens mit einigen Streifblicken ein. Ob durch die Einrichtung des Seminarjahrs hierin Wandel geschaffen wird, muss abgewartet werden. Meistens stellte sich bisher die Sache so, dass der Candidat die Erinnerungen an seine Schulzeit auffrischte, wenn er zu unterrichten anfing, dass er sich ferner an das von ihm zu benutzende Lehrbuch eng anschloss und erst allmählich von weiteren Anschauungen und Methoden Kenntnis erhielt, falls er nämlich seinem Unterrichtsgegenstande wirklich Interesse entgegenbrachte und sich deshalb um

die Bestrebungen anderer kümmerte. Mancher aber auch blieb an dem ihm vorliegenden Lehrbuche haften und erfuhr nichts von entgegenstehenden Auffassungen. Es ist eben unbequem, die betreffende Litteratur zusammen zu suchen, und es erfordert viele eigene Arbeit, unter den sich bekämpfenden Ansichten die für richtig zu haltende auszuwählen.

Daher ist es nun ein glücklicher Gedanke des Hrn. H. Schotten gewesen, diese Arbeit seinen Collegen zu erleichtern und die Ergebnisse seiner mühevollen Thätigkeit in einem mehrbändigen Werke zu veröffentlichen. Das Buch „soll dazu dienen, rasch und sicher über die einschlägige Litteratur sich zu orientiren und nach den ausführlich gegebenen Citaten aus den verschiedenartigsten Werken über einen bestimmten Gegenstand ein Urteil sich bilden zu können".

Dem ersten Bande, welcher die geometrischen Grundbegriffe erörtert, ist ein einleitender Abschnitt über die Reformbestrebungen auf dem Gebiete des planimetrischen Unterrichtes vorausgeschickt. Danach werden in den einzelnen Capiteln behandelt: I. Der Raum. II. Die Geometrie. III. Die Raumbegriffe (Körper, Fläche, Linie, Punkt). IV. Die Gerade. V. Die Ebene. — Nach einer Kennzeichnung der Fragen, um welche es sich handelt, führt der Verfasser die Stellen wörtlich vor, in denen die einzelnen Schriftsteller ihre Gedanken über den Gegenstand aussprechen, und giebt, meistens in Noten unter dem Texte, eine kritische Beleuchtung dieser Ansichten.

Im zweiten Bande werden in eben derselben Weise Richtung und Abstand als Grundlage der einleitenden Betrachtungen erledigt, und zwar: I, § 1. Richtung. § 2. Abstand. § 3. Lagen- und Massuntersuchungen. II. Der Winkel. III. Die Lehre vom Parallelismus. IV. Anwendungen zur Winkel- und Parallelenlehre. — An Stelle der im ersten Bande gewählten alphabetischen Reihenfolge der Autoren der Citate ist im zweiten die chronologische eingeführt. Weil der Umfang des Materials stärker geworden ist, als erwartet war, so sind von den ursprünglich beabsichtigten Abschnitten nur drei veröffentlicht worden; die am Schlusse des ersten Bandes angekündigten beiden Capitel

über Hülfsbegriffe und die Methode bleiben einem weiteren Bande vorbehalten.

Es ist erstaunlich, wie viele wissenschaftlichen Werke, Lehrbücher und Programm-Abhandlungen vom Verfasser zu Rate gezogen worden sind. Dass trotzdem manche Lücken vorhanden sind, wird im Vorworte selbst zugegeben und durch die Schwierigkeit der Beschaffung dieser Schriften in einer Provinzialstadt (Schmalkalden) ohne öffentliche Bibliothek entschuldigt. Wünschenswert wäre es gewesen, dass nicht bloss die deutsche Litteratur Berücksichtigung gefunden hätte. Die französischen Lehrbücher haben ja vielfach den deutschen als Vorbild gedient, und in Italien ist die Neugestaltung des geometrischen Unterrichts seit einem Jahrzehnt nicht von der Tagesordnung abgesetzt worden. Unter den hervorragenden deutschen Lehrbüchern vermisst Ref. ungern die Gallenkamp'schen, welche durch Originalität der Anordnung, durch Schärfe im Ausdruck und in der Beweisführung, sowie durch Ausbau der heuristischen Methode ausgezeichnet sind. — Obwohl Ref. mit den kritischen Ausführungen des Verfassers nicht immer übereinstimmt, einige (z. B. Bd. I; S. 186) für irrig hält, so werden dieselben doch dem Leser vielfache Anregungen bieten.

Die Benutzung der vorliegenden Bände ist dadurch erschwert, dass kein Sachverzeichnis beigegeben ist. Das am Schlusse jedes Bandes für die einzelnen Capitel gegebene alphabetische Register der Autoren, denen die Citate entnommen sind, oder deren Ideen einer kritischen Darstellung unterliegen, ersetzt zwar teilweise ein Sachverzeichnis, genügt aber nicht immer, wie Ref. sich überzeugt hat, wenn er eine Stelle wieder aufsuchen wollte, die gelesen zu haben er sich erinnerte.

Wenn der Verf. in der Vorrede zum zweiten Bande darüber klagt, dass das Interesse der Fachgenossen sich seinem Buche nur in verschwindendem Masse zugewendet zu haben scheine, sodass der ideale Zweck, dem die Arbeit gewidmet ist, eine Umschau des Geleisteten zu geben und die Fachgenossen über neuesten Stand wie Entwickelung der Planimetrie nach Inhalt und Methode zu orientiren, bisher nur in sehr bescheidenen

Grenzen sich verwirklicht habe, so muss Ref. den Wunsch aussprechen, dass das verdienstliche Werk des Hrn. Schotten, ebenso wie Reidt's Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen (F. d. M. XVIII. 1886. 44), in jeder Bibliothek einer höheren Lehranstalt zu finden sein möge. Dann wird auch die vis inertiae, welche in jener beklagten Erscheinung bekundet ist, allmählich überwunden werden. Lp.

J. Blaikie and W. Thomson. A textbook of geometrical deductions. Book I, corresponding to Euclid, Book I. London. Longmans, Green, and Co. VIII + 138 S. [Nature XLIII. 487.]

R. C. J. Nixon. Supplement to „Euclid Revised", being an introduction (within the limits of Euclidian geometry) to the Lemoine and Brocard points, lines, and circles. Oxford. Clarendon Press. S. 378-426.

W. J. Macdonald. Higher geometry, containing an introduction to modern geometry and elementary geometrical conics. Edinburgh. James Thin. 184 S.

Das erste dieser Bücher enthält einen recht ausgiebigen Vorrat von Ableitungen, die sich auf das Buch I des Euklid stützen. Die Methoden, welche man einzuschlagen hat, wenn man Beweisführungen aufsucht, werden systematisirt, soweit dies möglich scheint, und Schüler, die trotz der Einübung der Vorschriften dieses Buches dennoch ratlos sind, wenn sie eine beliebige innerhalb seines Bereiches liegende Aufgabe lösen sollen, können unbedenklich als hoffnungslos aufgegeben werden. Es ist indessen kaum verständlich, dass ein Lehrer Zeit genug zur Verfügung haben sollte, um das Werk durchzugehen, es sei denn, dass er eine geschickte Auslese zu halten im Stande ist.

Der Hauptgegenstand der zweiten Schrift ist durch ihren Titel genügend angedeutet (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 459); die Behandlung ist sorgfältig und hält sich streng an die Methoden der Euklidischen Elemente.

Das dritte Buch ist eine kurze Einleitung in die neuere

Geometrie; es erledigt bündig und klar die Lehre der Transversalen, harmonischen Gebilde, Doppelverhältnisse, Inversion, Linien gleicher Tangenten und der elementaren Eigenschaften der Kegelschnitte. Obgleich es ein Register enthält, besitzt es seltsamer Weise kein Inhaltsverzeichnis, eine recht verkehrte Massregel. Gbs. (Lp.)

A. Sannia ed E. d'Ovidio. Elementi di Geometria. 8ª edizione riveduta e corretta. Napoli. Pellerano. XV+654 S.

Diese Auflage unterscheidet sich von der vorigen, über die wir (F. d. M. XX. 1888. 525-26) schon berichtet haben, durch einige Verbesserungen, deren Angabe wir für überflüssig halten. Doch wollen wir ausdrücklich bemerken, dass das historische Versehen verschwunden ist, auf welches wir am o. a. O. aufmerksam machten. Wir hoffen, dass die Verfasser in einer nächsten Auflage alle historischen Nachrichten einer eingehenden Revision unterziehen werden, weil sie dem gegenwärtigen Standpunkte der Geschichte der Mathematik nicht mehr entsprechen. La.

J. Petersen. Lehrbuch der elementaren Planimetrie. Deutsch von R. von Fischer-Benzon. Zweite Auflage. Kopenhagen. A. F. Höst & Sön. 108 S. 8°.

Die neue Auflage dieses kurzen und eigenartigen Lehrbuches (F. d. M. XIII. 1881. 433) unterscheidet sich von der ersten hauptsächlich nur durch den kurzen Anhang, in welchem der Verfasser durch eine genauere Definition der Ebene den Satz 16 des Lehrbuches von der Summe der Aussenwinkel eines Polygons exact zu führen sucht. Lg.

J. Both. Einführung in die Planimetrie. Pr. Gymn. Jever. 19 S. 4°. (1 Fig.-Taf.)

Im Vorwort erklärt der Verfasser, dass für den Unterricht nicht der abstract logische, sondern der psychologische Gesichtspunkt massgebend sein muss. Darum soll der Schüler möglichst

früh zur Selbstthätigkeit geführt werden; dies ist aber beim gewöhnlichen Lehrgange schwierig, da eine Reihe von Lehrsätzen unvermeidlich ist, ehe die Lösung von Constructionsaufgaben vorgenommen werden kann. In gegenwärtiger Arbeit wird nun, abweichend von der gewöhnlichen Darstellung, eine Einführung in die Elemente der Planimetrie gegeben, bei der die Lehrsätze, insbesondere die Congruenzsätze, als Ergebnisse von Constructionen auftreten. Mz.

E. Glinzer. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Erster Teil: Planimetrie. 4. Aufl. Dresden. G. Kühtmann. 122 S. 8°.

Ueber die früheren Auflagen dieses für Gewerbeschulen bestimmten, vielleicht aber auch für Realschulen recht geeigneten Lehrbuchs ist in den F. d. M. XII. 1880. 417, XVI. 1884. 476, XIX. 1887. 524 referirt. Durch Vermehrung der Aufgaben zur Construction von Dreiecken, sowie der praktischen Berechnungs-Aufgaben hat das Buch in dieser vierten Auflage an Brauchbarkeit wesentlich gewonnen. Scht.

J. H. Kühl. Grundriss der Geometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht. I Planimetrie. II Stereometrie. III Trigonometrie. Dresden. G. Kühtmann. IV + 94 S., IV + 135 S., 149 S. 8°.

Diese drei Bücher enthalten dasjenige, was im allgemeinen den Inhalt des geometrischen Unterrichts auf höheren Schulen bildet. Die Darstellung ist klar und fasslich, entbehrt auch nicht der nötigen Gründlichkeit. Zahlreiche Aufgaben und eingestreute Fragen regen zu weiterer Ausführung des Gebotenen an. Die Planimetrie ist bis zur Kreisberechnung einschliesslich geführt; die Trigonometrie enthält zuletzt auch die Berechnung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke, die Stereometrie endet mit einigen Sätzen von den Kegelschnitten am Kegel und am Cylinder. Der Druck ist sehr gut und die Figuren in grosser Zahl (besonders auch in der Stereometrie) sehr deutlich und vortrefflich ausgeführt. Mz.

G. Recknagel. Ebene Geometrie; Lehrbuch mit systematisch geordneter Aufgabensammlung für Schulen und zum Selbststudium. 4. Aufl. München. Th. Ackermann. VIII + 214 S. 8°.

Der Inhalt dieses Buches ist im wesentlichen derselbe wie in andern Büchern, die dem gleichen, im Titel angegebenen Zwecke dienen. Deutlichkeit, Ausführlichkeit und Vollständigkeit im Dargebotenen sind anzuerkennen. Das für den Unterricht Wichtigere ist vor dem Uebrigen durch den Druck hervorgehoben; auch ist eine grosse Zahl von Constructionsaufgaben, unter andern das Problem des Apollonius, erledigt. Ferner sind isoperimetrische Sätze und Einiges aus der neueren Geometrie gegeben. Mit Sorgfalt ist auch die Berechnung des Kreises behandelt. (Vergl. die Anzeige der dritten Auflage in F. d. M. XVII. 1885. 528.) Mz.

H. Seeger. Leitfaden für den ersten Unterricht in der Geometrie. 5. Aufl. Wismar. Hinstorff. 24 S. mit 1 Fig.-Taf. 8°.

In diesem Büchelchen sind die Anfangsgründe der Geometrie gegeben: Punkt, gerade Linie; Strecke, Kreis, Kreisbogen, Winkel; Centriwinkel, Lehre von den Parallelen, Polygon, Dreieck, congruente Systeme; symmetrische Systeme, Parallelogramm. Die Beweise sind nicht angegeben, sondern nur die Thatsachen erwähnt. Immerhin bietet der Leitfaden in knapper Form sehr reichhaltiges Material für den Unterricht. Nur scheint dem Referenten die Betrachtung ganzer Punktsysteme für den ersten Unterricht etwas weit zu gehen. Mz.

Weitere Lehrbücher.

Ch. Ernst und L. Stolte. Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an Gymnasien, Realschulen und anderen höheren Lehranstalten. 1. Teil. Planimetrie, nebst einer Sammlung von Aufgaben. 2. Auflage. Strassburg. Druckerei u. Verlagsanst. 109 S. 8°.

H. Fenkner. Lehrbuch der Geometrie für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. 1. Teil: Ebene Geometrie. 2. Aufl. Braunschweig. Salle. XII + 178 S. gr. 8°.

E. Fischer. Systematischer Grundriss der Elementar-Mathematik. 2. Abteilung: Die Geometrie (Raumlehre). Für den Gebrauch an höheren Lehranstalten bearbeitet. Berlin. C. Duncker. V + 266 S. gr. 8°.

M. Focke und M. Krass. Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien und anderen höheren Lehranstalten. 1. Teil: Planimetrie, nebst einer Sammlung von Aufgaben und einer systematischen Anleitung zur Lösung derselben. 10. Aufl. Münster. Coppenrath. VIII + 131 S. 8°.

M. Focke und M. Krass. Lehrbuch der Geometrie. 2. Teil: Stereometrie. 5. Aufl. Münster. Coppenrath. IV + 92 S. 8°.

C. Gusserow und L. Levy. Abriss der Trigonometrie. Geometrisch bearbeitet. 2. Aufl. Berlin. Polytechn. Buchh. 61 S. 8°.

J. Henrici und P. Treutlein. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 1. Teil: Gleichheit der Gebilde in einer Ebene. Abänderung ohne Massänderung. 2. Aufl. Leipzig. Teubner. VIII + 146 S. gr. 8°.

F. Hočevar. Manuale di geometria pel ginnasio inferiore. Traduzione de F. Postet. Leipzig. Freitag. VI + 129 S. 8°.

W. Jahn und B. Stiehler. Schule der Geometrie. 7. Heft. 2. Aufl. Leipzig. Klinkhardt. 28 S. 8°.

L. Kambly. Die Elementar-Mathematik, für den Schulunterricht bearbeitet. 1. Teil: Arithmetik und Algebra. 33. Aufl. III + 122 S. 2. Teil: Planimetrie. 90. bis 92. Aufl. IV + 112 S. 4. Teil: Stereometrie. Nebst Uebungsaufgaben. 21. Aufl. IV + 71 S. mit 4 Taf. Breslau. Ferd. Hirt. 8°.

J. MENGER. Grundlehren der Geometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie und im geometrischen Zeichnen an Realschulen. 4. Aufl. Wien. Hölder. VI + 140 S. 8°.

C. MEYER. Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und andere Lehranstalten. Herausgegeben von H. C. E. Martus. I. Teil: Planimetrie. 15. Aufl. Leipzig. C. A. Koch. VIII + 188 S. 8°.

J. SACHS. Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). 4. Teil: Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Oerter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. J. Maier. VIII + 264 S. gr. 8°.

L. SCHEMANN. Die wichtigsten Formeln aus der Stereometrie und Planimetrie. Alzey. Medicus. 8 S. 8°.

L. SCHEMANN. Die wichtigsten Formeln aus der Goniometrie und ebenen Trigonometrie. Alzey. Medicus. 14 S. gr. 16°.

O. SCHLÖMILCH. Elementi di geometria metrica. Prima versione italiana dei professori D. Gambioli e V. Bernardi. Torino. G. B. Paravia e Comp. [Periodico di Mat. VI. 110.]

WIEGAND's Lehrbuch der Planimetrie. 2. Cursus. 11. Aufl. Bearbeitet von Frdr. Meyer. Halle. H. W. Schmidt. V + 100 S. 8°.

Dasselbe, 1. u. 2. Cursus. 22. Aufl. Ausgabe in österreichischer Orthographie. Ebenda. VI + 200 S. 8°.

TH. WITTSTEIN. Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. Band. 2. Abt.: Planimetrie. 15. Aufl. Hannover. Hahn'sche Buchh. VII + 211 S. 8°.

TH. WITTSTEIN. Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 2. Band. 2. Abt.: Stereometrie. 8. Aufl. Hannover. Hahn'sche Buchh. VIII + 191 S. 8°.

R. DEAKIN. Rider papers on Euclid. Books I-II. London. Macmillan and Co. [Nature XLIV. 76.]

H. Deighton. The elements of Euclid. Books I and II. New edition, revised. Cambridge. Deighton, Bell, and Co. (1891). [Nature XLIII. 127.]

J. M. Eustace. Notes on trigonometry and logarithms. Longmans, Green, and Co. (1890). [Nature XLIII. 55.]

A. G. Layng. Euclid's elements of geometry. London. Blackie and Son. (1890). [Nature XLIII. 343, XLV. 149.]

R. H. Pinkerton. Elementary text-book of trigonometry. New edition. London. Blackie and Son. (1890). [Nature XLIII. 7-8.]

H. M. Taylor. Euclid's elements of geometry. Books III and IV. Cambridge. University Press. [Nature XLIII. 607.]

J. Todhunter. Plane trigonometry for the use of colleges and schools. Revised by R. W. Hogg. London. Macmillan and Co. [Nature XLIV. 342.]

L. Bernardi. Euclide. Libro primo con numerosi esercizi e relativi indirizzi alle soluzioni dei medesimi. Appendice sui metodi di dimostrazione e soluzione dei teoremi e problemi. Udine. Tip. Bardusco.

A. Carrozzini. Sette lezioni di trigonometria dal punto di vista delle coordinate cartesiane. Lecce. Tip. Salentina.

F. Giudice. Geometria piana ad uso dei ginnasi e licei. Palermo. R. Sandron. (1890.)

F. Giudice. Geometria solida ad uso dei ginnasi e licei. Palermo. R. Sandron. (1891.)

G. Lazzeri e A. Bassani. Elementi di geometria. Libro di testo per la R. Accad. Navale. Livorno. R. Giusti. [Periodico di Mat. VI. 155; Rivista di Mat. I. 160.]

Mucchi. Geometria elementare per le Scuole Tecniche. Torino. Paravia.

Nannei. Elementi di geometria. Parte 1ª: Planimetria. Milano. F. Vallardi.

E. Sandri. Elementi di geometria ad uso della 5ª elementare e delle preparatorie alla normale. Parte II. Parma. Battei.

G. M. TESTI. Elementi di geometria, con una raccolta di 510 esercizi e problemi, ad uso delle Scuole tecniche e normali, secondo gli ultimi programmi governativi. II ediz. Livorno. R. Giusti.

G. HOFFMANN. Anleitung zur Lösung planimetrischer Aufgaben mit Uebungsbeispielen für Schulen höherer Lehranstalten. 3. Aufl. Leipzig. Reisland. XV + 210 S. 8°.

E. R. MÜLLER. Lehrbuch der planimetrischen Constructionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. 2. Teil: Aufgaben, gelöst mit Anwendung der Proportionenlehre. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. J. Maier. VI + 160 S. gr. 8°.

G. PASTORE. Avviamento alla risoluzione delle questioni geometriche, ad uso degli aspiranti all'Accademia militare, navale ed alla Scuola di guerra. Modena. Sarasino.

G. PASTORE. Avviamento alla risoluzione delle questioni geometriche. Bologna. G. Civelli.

THIEME. Raccolta di problemi e teoremi di stereometria. Versione italiana dei professori D. Gambioli e V. Bernardi.

TODHUNTER. Esercizi di geometria colle loro soluzioni tratti dagli Elementi di Euclide. Versione dei professori D. Gambioli e V. Bernardi.

K. SCHWERING. 100 Aufgaben aus der niederen Geometrie nebst vollständigen Lösungen. Freiburg i. Br. Herder. IX + 154 S. 8°.

Dieses Buch ist, wie der Verfasser im Vorwort bemerkt, für die drei oberen Klassen höherer Lehranstalten bestimmt und soll bei einer vollständigen Wiederholung des ganzen Lehrstoffs als Führer dienen, indem es eine grössere Zahl von Aufgaben

mit ihren vollständigen Lösungen als Musterbeispiele enthält. Es zerfällt in zwei Teile: der erste mit 60 Aufgaben ist der Planimetrie gewidmet. Einige der Aufgaben mögen genannt werden: Die Malfatti'sche Aufgabe, die des Apollonius, ferner Constructionen von Kreisen und Dreiecken unter gegebenen Bedingungen; allerlei Maximal- und Minimal-Aufgaben, z. B.: In einem Dreieck den Punkt D zu finden, dessen Abstände von den Ecken eine möglichst kleine Quadratsumme haben. Es findet sich hierbei auch manches, was vom Verfasser selbst herrührt.

In dem zweiten Teile befinden sich 40 der Stereometrie angehörige Aufgaben, z. B.: Man bestimme für eine durch ihre sechs Kanten gegebene dreiseitige Pyramide die Winkel der Gegenkanten. Wann sind diese Winkel rechte? Oder eine andere Aufgabe: Man bestimme eine Kugel, welche durch drei gegebene Punkte geht und eine gegebene Ebene berührt. Ferner auch Maximalaufgaben, z. B.: Welcher ist der grösste einer Kugel eingeschriebene Kegel? Auch die Pappus-Guldin'sche Regel findet Anwendung, und manches Sonstige ist hier noch erwähnt.

Das Buch ist jedenfalls für Lehrer und Schüler ein überaus nützliches, da es mancherlei Anregungen und sehr beachtenswerte, sowohl wissenschaftliche wie pädagogische Winke giebt, und ist aus diesem Grunde sehr zu empfehlen. Als Anhang hat der Verfasser noch eine kurze Darstellung der imaginären Grössen, und einiger Reihen, z. B. e^x u. s. w., beigefügt. Ein alphabetisches Sachregister erleichtert ferner das Auffinden irgend welcher vorkommenden Gegenstände. Druck, Figuren und Ausstattung sind lobenswert. **Mz.**

A. Grévy. Compositions données depuis 1872 aux examens de Saint-Cyr. Algèbre et Géométrie (Énoncés et Solutions). Paris. Gauthier-Villars et Fils. 94 S. gr. 8°.

Aus jedem der 19 Jahre von 1872—90 liegen die beiden Prüfungsaufgaben vor. Sie sind dem Gebiete der Elementarmathematik entnommen und erfordern zu ihrer Bearbeitung etwa die mathematischen Kenntnisse unserer Gymnasialabiturienten. Doch wer-

den keine Zahlenrechnungen verlangt, wohl aber sehr genaue Erörterungen der Bedingungen der Lösungen. Nach dieser Richtung hin ist die Sammlung auch unseren Lehrern zu empfehlen. Bei näherer Durchsicht fand Ref. u. a., dass in der geometrischen Aufgabe von 1882 (S. 45) die abgedruckte Figur nicht zu der gegebenen Lösung passt. Lp.

R. Bettazzi. Sull'insegnamento della geometria dei Licei. Periodico di Mat. VI. 113-116.

Bemerkungen und Vorschläge, welche die Verteilung des Stoffs bei dem Unterrichte der Mathematik in den drei Klassen der italienischen Lyceen betreffen; die Vorschläge verfolgen den Zweck, die Verschmelzung der Planimetrie mit der Stereometrie möglich zu machen. La.

S. Schatunovsky. Ueber Auflösungen der Aufgaben ohne Hülfe des Lineals. Spaczinski's Bote No. 125. (Russisch.)

Es wird gezeigt, dass jede Aufgabe der Elementargeometrie, welche mit Hülfe des Lineals und des Zirkels aufgelöst werden kann, allein mit dem Zirkel lösbar ist. Dies folgt daraus, dass man die Schnittpunkte einer durch zwei ihrer Punkte gegebenen Geraden mit einem gegebenen Kreise und zweier gegebenen Geraden unter einander ohne Hülfe des Lineals construiren kann. (Seit Mascheroni's „Gebrauch des Zirkels“ bekannt. Vergl. Steiner, Gesammelte Werke I. 463. Lp.) Si.

H. Simon. Geometrische Constructionen ohne Zirkel. Hoffmann Z. XXII. 81-90.

Anschliessend an die Gedanken Mascheroni's und Steiner's über die Vermeidung des Lineals, bezw. Vermeidung des Zirkels, sobald ein Kreis gezeichnet vorliegt, stellt sich der Verfasser die Frage, ob es gelingt, alle mit Zirkel und Lineal ausführbaren Constructionen mit alleiniger Benutzung des „Mess-Lineals“ vorzunehmen, auch wenn kein Kreis gezeichnet vorliegt. Unter

Mess-Lineal versteht der Verfasser ein Lineal, das durch eine grosse, theoretisch unendlich grosse Menge von Teilstrichen gestattet, nicht allein, zwei Punkte durch eine gerade Linie zu verbinden, sondern auch eine Strecke zu messen und auf einen anderswo gelegenen Strahl zu übertragen. Wiederholt hat Ref. darauf aufmerksam gemacht, dass es didaktisch besser sei, nicht zwei, sondern fünf Postulate anzunehmen, nämlich: „1) Auffindung des Strahls, der durch zwei gegebene Punkte geht, 2) Auffindung des Kreises um ein gegebenes Centrum mit gegebenem Radius, 3) Auffindung des Schnittpunktes zweier Strahlen, 4) Auffindung der Schnittpunkte von Strahl und Kreis, 5) Auffindung der Schnittpunkte von Kreis und Kreis.“ Von diesen Postulaten sollen also 1), 3) und eine Verquickung von 1) und 2), das Postulat des Mess-Lineals, allein als ausführbar betrachtet werden; 2) wird als gelöst betrachtet, wenn das Centrum und ein Punkt der Peripherie des Kreises construirt ist. Es handelt sich also darum, ob bei den erlaubten Hülfsmitteln 4) und 5) lösbar sei. Der Verfasser führt aber in der vorliegenden Abhandlung nur 5) auf 4) zurück und fragt an, wer 5) auf 1), 3) und das Mess-Lineal zurückführen kann. Scht.

O. Herweg. Kleinigkeiten aus dem mathematischen Unterricht. II. Teil, 2. Hälfte. Pr. (No. 38) Gymn. Neustadt i. Westpr. 12 S. 4°. (1 Fig.-Taf.)

In dieser Arbeit werden Constructionsaufgaben vom didaktischen Standpunkte aus besprochen; es werden die Momente erwähnt, auf die beim Unterricht zu achten ist, also: Analysis, Construction, Beweis, Determination. Als Muster werden dann ein paar Aufgaben eingehend behandelt. Am Schluss wird noch auf die Construction von Figuren mit Hülfe ähnlicher Figuren und auf algebraische Lösungen eingegangen. Mz.

Friedr. Meyer. Mitteilungen aus dem mathematischen Lehrplane des Gymnasiums. Pr. (No. 230) Stadtgymn. Halle a. S. 35 S. 4°. (1 Fig.-Taf.)

Nach einer Einleitung, die allgemeine Gesichtspunkte des Unterrichts enthält, geht der Verfasser zur Darlegung des mathematischen Unterrichts über. Er bespricht eingehend die wichtigsten mathematischen Begriffe, ihre Behandlungsweise im Unterricht, hierauf den weiteren Lehrgang; am Schlusse giebt er mehrere recht brauchbare Beweise von Sätzen, so unter anderen: Das arithmetische Mittel zwischen n positiven Zahlen ist grösser als das geometrische. Unter allen isoperimetrischen Dreiecken hat das gleichseitige den grössten Inhalt. Etwas schärfer als sonst wird auch der Satz bewiesen, dass von allen einem Dreieck eingeschriebenen Dreiecken dasjenige, dessen Ecken die Höhenfusspunkte des ersten sind, den kleinsten Umfang hat. Zum Schluss wird noch der bekannte Satz bewiesen, dass der durch die Seitenmitten eines Dreiecks gehende Kreis die vier Berührungskreise dieses Dreiecks berührt. Der Verfasser giebt zuerst einen eigenen Beweis und dann den von Schröter, den er für den Schulunterricht etwas modificirt hat. Mz.

A. Frhr. von Mantey-Dittmer. Angewandte Aufgaben zum Unterricht in der Mathematik. Pr. Gymn. Kempten (Bayern). 44 S. 8⁰.

Eine grosse Zahl von Aufgaben (140), von welchen jede auf eine ganz bestimmte praktische Frage (aus der Astronomie, mathematischen Geographie, Topographie oder aus der Maschinentechnik) hinauskommt. Bei einer jeden sind schliesslich Zahlenresultate zu ermitteln. Diese sind auch angegeben, dagegen ist die Lösung dem Leser überlassen. Wenn dem Schüler hierbei die nötige Anleitung gegeben wird, so können allerdings derartige Aufgaben wesentlich dazu beitragen, sein Interesse an der Mathematik zu steigern. Mz.

Solutions de questions. Nouv. Ann. (3) X. 2*-51*.

Eine grosse Zahl von Aufgaben und Sätzen aus der Geometrie ist hier unter 28 Nummern von verschiedenen Geometern behandelt. Einige der Fragen, elementaren Inhalts, lassen sich

recht gut beim Unterricht verwerten; andere, weniger elementar, aber doch nicht allzu schwer zugänglich, sind teils wegen ihres Inhalts, teils wegen ihrer gefälligen und kurzen Lösung interessant, so dass die Lectüre dieser kleinen Arbeiten unbedingt empfohlen werden kann.

Einiges von dem hier Dargebotenen möge erwähnt werden: Ein Dreieck abc sei gegeben; durch a gehe ein Kreis, der ac in b' und ab in c' trifft; dann lege man durch b und c' einen Kreis, der bc in a' trifft; dieser zweite Kreis treffe den ersten ausser in c' noch in i; dann liegen die Punkte i, a', c, b' auf demselben Kreise. Man nehme nun in der Ebene von abc den Punkt O beliebig; die Gerade Oa treffe den durch a gehenden Kreis in α, Ob treffe den durch b gehenden Kreis in β, Oc treffe den durch c gehenden Kreis in γ; dann liegen O, α, β, γ, i auf demselben Kreise.

Der Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die eine Berührung dritter Ordnung in einem festen Punkte eines gegebenen Kegelschnitts mit diesem Kegelschnitt haben, ist eine gerade Linie (älterer Satz, Beweis von Brocard). Ferner: Die Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 in den Endpunkten A und B einer Sehne eines Kegelschnitts verhalten sich wie die Kuben der Abstände CA, CB dieser Punkte A und B vom Pole C der Sehne AB (Beweis von de Crès mittels der Formel $\varrho = r\frac{dr}{dp}$; auch von anderen bewiesen).

Gegeben ein fester Kreis um A mit dem Radius b und eine Gerade, die durch den festen Punkt O geht; ein veränderlicher Kreis mit festem Radius c berührt den Kreis und die Gerade; man soll den Ort des Berührungspunktes finden, den der veränderliche Kreis mit der veränderlichen Geraden hat. M sei ein Punkt des Ortes; $OM = \varrho$, $< MOA = \omega$, $a = OA$; dann eliminire man θ aus den beiden Gleichungen:

$$\varrho^2 + c^2 = a^2 + (b+c)^2 + 2a(b+c)\cos\theta;$$
$$a = \varrho\cos\omega + c\sin\omega - (b+c)\cos\theta.$$

Nimmt man X auf der Verlängerung von OA über A, und ist C Mitte des veränderlichen Kreises mit dem Radius c, so ist

$< CAX = \theta$. Weiterhin ist folgender Satz gegeben: Es sei ABC ein grösstes Dreieck, das einer Ellipse E eingeschrieben ist; dann haben die Krümmungskreise in den Ecken dieses Dreiecks, ferner der dem Dreieck ABC umgeschriebene Kreis und die Ellipse E einen Punkt P gemein. Ist nun P' der Gegenpunkt von P für die Ellipse, so umhüllen $P'A$, $P'B$, $P'C$ eine Ellipsenevolute.

Der Ort der Punkte, von denen Tangenten an eine Ellipse gehen, die einen gegebenen Winkel einschliessen, ist bekanntlich eine Curve vierten Grades; man soll nun beweisen: Wenn man von einem Punkte dieser Curven die 4 Normalen an die Ellipse zieht, und N_1, N_2, N_3, N_4 die Längen dieser bis zu ihren resp. Fusspunkten gerechneten Normalen sind, ferner ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 die Krümmungsradien in diesen Fusspunkten, so ist

$$\frac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4}{N_1N_2N_3N_4} = \text{Const.}$$

Der Beweis wird analytisch geführt, indem für die Strecken $N_1, N_2, \ldots, \varrho_1, \varrho_2 \ldots$ ihre Projectionen auf OX substituirt werden.

Der Krümmungsradius in einem Punkte M der Bernoulli'schen Lemniskate $r^2 = a^2\cos 2\theta$ ist gleich dem Drittel der Normale in M, welche durch das auf OM in M errichtete Lot begrenzt ist.

Die orthogonalen Trajectorien einer Kugel von constantem Radius zu finden, deren Centrum eine Gerade durchläuft. Ist OX diese Gerade, und $(x-\alpha)^2+y^2+z^2 = R^2$ die Gleichung der beweglichen Kugel, so sind

$$\frac{dx}{x-\alpha} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

die Differentialgleichungen der orthogonalen Trajectorien.

Man soll den Ort der Fusspunkte der Normalen finden, die von einem gegebenen Punkte P an die Kegelschnitte eines Büschels sich construiren lassen. Lösung: Eine Curve vierten Grades durch die 4 Basispunkte des Büschels, den Punkt P, die drei Centra der Geradenpaare, die im Büschel enthalten sind, welche ferner die unendlich entfernte Gerade in den Kreispunk-

ten und den beiden Parabelpunkten trifft (analytisch und synthetisch nachgewiesen).

In Betreff noch mancher anderen Dinge, die hier nicht erwähnt worden sind, aber sehr wohl Berücksichtigung verdienen, möge auf die Zusammenstellung selbst verwiesen werden.

Mz.

Z. G. DE GALDEANO. Las equivalencias y sustituciones en los teoremas y en los problemas geométricos. Progreso mat. I. 36-39, 70-72.

H. GERLACH. Zur Definition des Winkels. Hoffmann Z. XXII. 1-9.

SCHMITZ. Zur Definition des Winkels. Hoffmann Z. XXII. 13.

„Die gebrochene Linie als Träger für die Vorstellung der Form eines Sectors heisst Winkel. Der Winkel kann als (intensive) Grösse gedacht werden.“ Kürzer: „Der Zweistrahl als lineare Grösse heisst gebrochene Linie, als intensive Grösse heisst er ein Winkel.“

Die zweite Notiz hält den Winkel für undefinirbar. Lp.

G. RAZZOLINO. Somma degli angoli di un poligono piano. Periodico di Mat. VI. 64-67.

Der Verf. erläutert und verbessert die Methode, welche Kurze (Elemente der Geometrie der Ebene) für die Berechnung der Summe der Winkel eines ebenen Polygons gelehrt hat, und macht auf einige damit zusammenhängende Fragen aufmerksam.

La.

A. BINZ. Die einfachste Construction zur Errichtung einer Senkrechten auf einer geraden Linie. Hoffmann Z. XXII. 91-92, 341-342.

Sehr bekannt. Lp.

HILDA HUDSON. Simple proof of Euclid II, 9 and 10. Nature XLV. 189.

Aus London Math. Soc. Lp.

P. A. LARSEN. En geometrisk Satning. Nyt Tidss. for Math. II A. 113.

Beweis für den Satz:

ABCD ist ein Viereck. Von den Mittelpunkten von *AB*, *AD*, *AC* sind Senkrechte auf die Geraden *CD*, *CB* und *BD* gezogen. Diese drei Senkrechten schneiden sich in einem Punkte. V.

A. TAFELMACHER. Eine alte, aber, wie es scheint, noch recht unbekannte Construction der Seiten des regulären Fünf- und Zehnecks. Hoffmann Z. XXII. 95, 341-342.

Wie eine Zuschrift von Hrn. Haassengier angiebt, schon in einem Werke von 1685 angegeben. Lp.

B. F. FINKEL, J. J. BARNIVILLE, J. BEYENS. Inscribe a regular 17-gon in a circle. Ed. Times LIV. 28.

A. LUGLI. Problemi relativi alla divisione di un poligono convesso in parti proporzionali a più segmenti dati, da far parte di un corso di disegno geometrico. Periodico di Mat. VI. 93-97.

Die Hauptaufgaben, welche Herr L. auflöst, können, wie folgt, zusammengefasst werden: Man soll ein gegebenes convexes ebenes Polygon in Teile zerlegen, welche zu gegebenen Strecken proportional sind; die Querlinien sollen Gerade sein, welche durch einen gegebenen Punkt gehen oder eine gegebene Richtung haben. Die Auflösungen sind einfach und klar. La.

J. J. Barniville, D. Biddle. Solution of question 10715. Ed. Times LV. 73-74.

Die Aufgabe, eine Gerade zu finden, welche zwei der Lage nach gegebene, im übrigen beliebige Dreiecke hälftet, führt auf eine ungefügige biquadratische Gleichung. Hr. Biddle führt ihre Lösung auf eine ziemlich einfache Weise rein constructiv durch, indem er ein „nicht im Euklid zu findendes Postulat“ zu Hülfe nimmt. Lp.

A. Poulain. Sur les centres de similitude. J. de Math. spéc. (3) V. 193-197.

Bemerkungen über die beiden Arten der Lage, welche Steiner durch die Namen des inneren und äusseren Aehnlichkeitspunktes gekennzeichnet hat, und die als „direct“ und „symmetrisch“ ähnlich unterschieden werden. Lp.

Atanasio Lasala. Un teorema geometrico. Progreso mat. I. 254-256, 285-290.

Der Verf. erörtert die Folgerungen aus dem Satze: Wenn drei Gerade PA, PB, PC, die durch den Punkt P gehen, die Transversalen abc, $a'b'c'$ in den Punkten a, b, c und a', b', c' schneiden, so ist

$$\frac{ba}{bc}:\frac{Pa}{Pc}=\frac{b'a'}{b'c'}:\frac{Pa'}{Pc'} \quad \text{u. s. w.}$$

Tx. (Lp.)

J. Euler. Aus der Theorie der harmonischen Büschel. Spaczinski's Bote No. 124. (Russisch.)

Wenn in zwei harmonischen Strahlenbüscheln zwei Paare entsprechender Strahlen parallel sind und ein Paar sich schneidet, so schneidet sich auch das dem letzteren conjugirte Strahlenpaar. Si.

Démonstration élémentaire du théorème de Frégier. J. de Math. élém. (3) V. 50-51.

Mit Benutzung der Inversion wird der Satz bewiesen:

Schneidet ein Kreis durch den Scheitel S eines involutorischen Büschels die Strahlenpaare aa', bb', cc', ... zum zweiten Mal in AA', BB', CC', ..., dann gehen die Geraden AA', BB', CC', ... alle durch einen festen Punkt P. Lg.

R. E. ALLARDICE. Some geometrical theorems. Edinb. M. S. Proc. IX. 11-13.

R. E. ALLARDICE. On some properties of a triangle of given shape inscribed in a given triangle. Edinb. M. S. Proc. IX. 39-48.

Dieser Aufsatz enthält Beweise von Eigenschaften eines Dreiecks von gegebener Gestalt, das einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben ist; einige derselben sind bekannt, andere anscheinend neu. Die Methode der Behandlung ist in mancher Hinsicht frisch und interessant. Gbs. (Lp.)

K. TSURUTA. On an extension of a problem of Pappus's.
J. MIZUHARA. Note on a geometrical problem.
R. FUJISAWA. Note on the preceding paper of Mr. Mizuhara. Tokio Math. Ges. IV. 183, 346-348, 349-350.

Gegeben zwei Gerade und ein Punkt in derselben Ebene; durch den Punkt einen Strahl zu ziehen, sodass die gegebenen Geraden auf ihm ein Stück von gegebener Länge abschneiden. Von den drei obigen Mitteilungen begnügen sich 1) und 3) mit analytischen Lösungen, 2) zeigt auf elementarem Wege, dass bei den im allgemeinen vorhandenen vier Lösungen die Mittelpunkte der ausgeschnittenen Stücke auf einem Kreise liegen.
R. M.

ANDR. MÜLLER. Ueber die einem Dreiecke ein- und angeschriebenen Kreise und Kegelschnitte. Hoppe Arch. (2) X. 300-309.

Fortsetzung und Erweiterung der Abhandlungen in dieser

Zeitschrift (2) VIII. 337ff. und IX. 113ff. (cf. F. d. M. XXII. 1890. 719). Bestimmt man drei Gerade durch die Gleichungen

$$B'C' \equiv r.BC + s.CA + t.AB, \quad C'A' \equiv s.BC + t.CA + r.AB,$$
$$A'B' \equiv t.BC + r.CA + s.AB,$$

in welchen r, s, t die Entfernungsverhältnisse der Ecken des Dreiecks ABC von den Geraden $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ bedeuten, ferner die Ecktransversalen AL, BM, CN, welche die Gegenseiten nach dem Verhältnis $p:q$ teilen, dann liegen die Schnittpunkte von AL mit $B'C'$, BM mit $C'A'$, CN mit $A'B'$ in einer Geraden; dieselbe umhüllt einen dem Dreieck $A'B'C'$ eingeschriebenen Kegelschnitt, im Specialfalle den ein- oder die angeschriebenen Kreise. Die Construction dieser Kegelschnitte wird angegeben. Lg.

F. W. Frankenbach. Die dem Dreieck einbeschriebenen Kreise. Pr. (No. 220) Höhere Bürgerschule Liegnitz. 28 S. 8°.

Unter einbeschriebenen Kreisen werden hier diejenigen verstanden, welche man erhält, wenn man an den Inkreis die Tangente $B'C'$ parallel zu BC legt, in $AB'C'$ wieder den Inkreis zeichnet u. s. f. Die Summen der Radien, Durchmesser und Flächen werden auf verschiedene Weisen ausgedrückt und einige die Bestimmungsstücke des Dreiecks betreffende Folgerungen gezogen. Lg.

W. J. Barton, E. Lampe. Solution of question 9406. Ed. Times LIV. 46-47.

Hr. Barton hatte einen möglichst elementaren Beweis des Satzes verlangt, dass ein Dreieck gleichseitig ist, wenn der Radius des Umkreises doppelt so gross wie der des Inkreises ist. Ref. giebt zwei solche Beweise. Lp.

E. Lemoine, Anderson, Chakrivarti. Solution of question 10469. Ed. Times LIV. 53.

Sind I, I_a, I_b, I_c die Mittelpunkte des Inkreises und der Ankreise eines Dreiecks ABC, ferner T, T_a, T_b, T_c die Treff-

punkte der Verbindungslinien von A, B, C mit den Berührungspunkten dieser Kreise und der Gegenseiten, so gehen IT, $I_a T_a$, $I_b T_b$, $I_c T_c$ durch einen und denselben Punkt, dessen Dreieckscoordinaten gefunden werden. Lp.

G. de Longchamps. Sur les points et les droites de Feuerbach. J. de Math. élém. (3) V. 106-108, 134-135.

Es werden die Schwerpunktscoordinaten der Berührungspunkte des Feuerbach'schen Kreises mit den Berührungskreisen, sowie die Gleichungen der Tangenten in diesen Punkten angegeben. — Zuschriften der Herren Lemoine und Boutin veranlassen später einen Rückblick auf frühere Arbeiten. Lg.

Oscher Ber. Some theorems in elementary geometry. London M. S. Proc. XXII. 34-37.

I. Ein aus drei Quadraten bestehendes Rechteck wird in zwei congruente Trapeze und zweimal zwei congruente Dreiecke zerschnitten, so dass sich aus den Stücken wieder ein Quadrat zusammensetzen lässt. II. Der Kreissector, welcher von den beiden gleichen Diagonalen einer Ecke des regulären Sechsecks begrenzt wird, ist gleich der Hälfte des umgeschriebenen Kreises. III. Das ausserhalb dieses Sectors über dem Bogen liegende Stück des Sechsecks ist gleich dem krummlinig begrenzten Dreiecke, welches man erhält, wenn man durch die Ecken eines Bestimmungsdreiecks mit der Seite als Radius nach innen Kreisbogen zeichnet. Lg.

É. Collignon. Sur certaines séries de triangles et de quadrilatères. Assoc. Franç. Marseille XX. 38-66.

Ueber den Seiten eines gegebenen Dreieks $A_0B_0C_0$ construire man nach aussen die Quadrate; deren Mittelpunkte A_1, B_1, C_1 bilden ein neues Dreieck $A_1B_1C_1$, dessen Höhen die Linien A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 sind, und für welches die Beziehungen $A_0A_1 = B_1C_1$, $B_0B_1 = C_1A_1$, $C_0C_1 = A_1B_1$ gelten. Beide haben den Schwer-

punkt gemeinsam. Man wiederhole für das Dreieck $A_1B_1C_1$ dieselbe Construction und setze diese Operation n-mal fort. Sind a_n, b_n, c_n die Seiten des n^{ten} Dreiecks $A_nB_nC_n$, S_n sein Inhalt, $T_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2$, so findet man, wenn S_0 der Inhalt des gegebenen Dreiecks mit den Seiten a_0, b_0, c_0 ist, und wenn zur Abkürzung

$$P = (\tfrac{1}{2}S_0 + \tfrac{1}{24}T_0\sqrt{3})(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3})^n,$$
$$Q = (\tfrac{1}{2}S_0 - \tfrac{1}{24}T_0\sqrt{3})(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3})^n$$

gesetzt wird:

$$S_n = P + Q, \quad T_n = 4\sqrt{3}(P - Q),$$
$$a_n^2 = \tfrac{1}{3}\{T_n - (-\tfrac{1}{2})^n(b_0^2 + c_0^2 - a_0^2)\},$$

nebst den entsprechenden Formeln für b_n^2, c_n^2. Das Dreieck $A_nB_nC_n$ nähert sich mit wachsendem n stetig dem gleichseitigen Dreiecke.

Macht man dieselben Constructionen an einem gegebenen Vierecke, so erhält man neue Vierecke von folgenden Eigenschaften: 1) Der Schwerpunkt gleicher Massen in den vier Ecken eines beliebigen dieser Vierecke ist ein und derselbe Punkt (gültig für beliebige Vielecke). 2) Die Diagonalen A_nC_n, B_nD_n sind gleich und schneiden sich rechtwinklig. 3) Die Ecken A_n und C_n, B_n und D_n liegen für ungerade Werte von n auf zwei festen, zu einander senkrechten Geraden, für gerade n auf den Winkelhalbirenden jener beiden Geraden. 4) Dem Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ entspricht eine unendliche Schar von Vierecken $A_0B_0C_0D_0$; aber alle diese Vierecke besitzen dieselbe „Excentricität", d. h. denselben Abstand zwischen den Mitten der Diagonalen A_nC_n, B_nD_n; diese Mitten liegen auf einem und demselben Kreise, der den Schwerpunkt G zum Mittelpunkte hat und durch den Schnittpunkt der rechtwinkligen Diagonalen geht. Die sich folgenden Vierecke nähern sich einem Quadrate ($A_1B_1C_1D_1$ ist schon ein Quadrat, wenn $A_0B_0C_0D_0$ ein Parallelogramm ist). Ist S_n der Inhalt, T_n die Summe der Quadrate der Seiten für das n^{te} Viereck, so ist

$$S_n = S_1 . 2^{n-1}, \quad T_n = 4f^2 + S_1 . 2^{n+1} = 4f^2 + S_{n+2},$$

wenn f die allen Vierecken der Reihe gemeinsame „Excentricität" ist. Lp.

P. Aubert. Sur un lieu géométrique. Edinb. M. S. Proc. IX. 25-27.

A. J. Pressland. Note on the preceding locus. Edinb. M. S. Proc. IX. 28.

Das folgende Problem wird behandelt: Durch einen festen Punkt A einer gegebenen Kreislinie zieht man zwei Sehnen AB und AC, deren Product den constanten Wert m^2 hat, und verbindet B mit C. 1) Den Ort des Schnittes D der Winkelhälftenden AD des Winkels A mit BC zu finden. 2) Den Ort des Mittelpunktes für den Inkreis und Umkreis des Dreiecks ABC zu finden. Gbs. (Lp.)

W. Poltavzew. Zur Theorie der ein- und umgeschriebenen Vierecke. Spaczinski's Bote No. 106. (Russisch.)

Es handelt sich um den Beweis der folgenden bekannten Sätze: In einem Tangentenvierecke eines Kreises treffen sich die beiden Verbindungslinien der Berührungspunkte des Kreises mit den Gegenseiten und die beiden Diagonalen in einem und demselben Punkte. Der Mittelpunkt des Kreises ist der Höhenschnitt des durch die drei Diagonalen gebildeten Dreiecks. Der Mittelpunkt des Kreises und die Halbirungspunkte der Diagonalen liegen auf einer Geraden.

Aus diesen Sätzen leitet der Verfasser die Auflösung der Aufgabe her: Aus den gegebenen Halbmessern der ein- und umgeschriebenen Kreise eines Vierecks die Entfernungen der Mittelpunkte dieser Kreise zu bestimmen. Si.

P. Sweschnikow u. S. Kritschevsky. Ueber Brennpunkte des Fünfseits. Spaczinski's Bote No. 111 u. 112. (Russisch.)

Brennpunkt eines Vielseits ist ein solcher Punkt, von welchem die auf die Seiten gefällten Lote ihre Fusspunkte auf einem Kreise haben. Ein Fünfseit hat einen oder zwei solcher Punkte. Vielseite mit mehr als fünf Seiten haben nicht immer Brennpunkte.

Es werden die Eigenschaften dieser Punkte elementar-geometrisch untersucht und Methoden zu ihrer Construction gegeben.

Si.

J. A. Kleiber. Verdichtung bei der Verteilung der Kreise verschiedener Halbmesser in Reihen. Spaczinski's Bote No. 103, 104 u. 106. (Russisch.)

Werden m Kreise vom Halbmesser a und n Kreise vom Halbmesser $b\left(a > b > \frac{a}{4}\right)$ so eingerichtet, dass zuerst alle a-Kreise und dann alle b-Kreise der Reihe nach auf einander folgen und eine und dieselbe Gerade berühren, so wird die gemeinschaftliche Ausdehnung gleich

$$[2(m-1)a] + [a + 2\sqrt{ab} + b] + [2(n-1)b].$$

Jede Permutation zweier verschiedenen Kreise giebt die elementare Verdichtung $= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$.

Es werden dann die Fälle betrachtet, wo $\frac{a}{b} \geqq (\sqrt{k}+1)^2$, und k eine ganze Zahl ist. Die grösste Verdichtung findet bei den einfachen Verhältnissen der Anzahlen der gemischten Kreise statt.

Si.

H. Cranz. Das Apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben. Sammlung von 163 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und 200 Figuren. Stuttgart. J. Maier. 232 S.

Auch wer sich nicht mit dem hier befolgten System Kleyer befreunden kann, wird doch sein Vergnügen haben an dieser Sammlung, in welcher die Berührungsaufgaben möglichst vollständig gelöst und die Constructionen an musterhaften Figuren durchgeführt werden sowohl nach der alten Vieta'schen Methode als auch nach derjenigen der neueren Geometrie. Der Verfasser „hat sich nicht auf die Lösung der bekannten 10 Hauptaufgaben des Berührungsproblems beschränkt, welche in den Geometrielehrbüchern vorzugsweise behandelt werden, sondern nach unten

und oben über diesen engen Rahmen hinausgegriffen. Im Interesse desjenigen, welcher nur zu Zwecken des praktischen Zeichnens mit Kreisberührungsaufgaben zu thun hat, wurden auch die elementaren Aufgaben, namentlich diejenigen, bei welchen der Halbmesser des gesuchten Kreises gegeben ist, ausführlich dargestellt und dann in einem besonderen Abschnitt gezeigt, wie man durch methodisches Probiren Kreise zeichnen kann, welche gegebene Bedingungen erfüllen. Sodann wurden auch diejenigen Aufgaben in den Kreis der Betrachtung gezogen, welche sich mit dem Schnitt von Kreisen nach Sehnen von gegebener Länge, unter rechtem Winkel oder unter dem Durchmesser befassen. Die beiden Schlusscapitel enthalten im wesentlichen eine Reproduction der beiden schönen Abhandlungen Steiner's im I. Band von Crelle's Journal. Durch den eleganten Schröter'schen Beweis für die Steiner'sche Lösung des Malfatti'schen Problems (J. für Math. LXXVII, F. d. M. VI. 1874. 325) ist das letztere neuerdings mehr in den Vordergrund getreten. Möge das vorliegende Büchlein dazu beitragen, das Interesse nicht nur für dieses Problem, sondern auch für die übrigen reizvollen Beziehungen zwischen Berührungskreisen, welche Steiner in der erwähnten Abhandlung nachgewiesen hat, in weitere Kreise zu tragen." Referent glaubte das Werk nicht besser als mit diesen eigenen Worten des Verfassers anzeigen zu können. Lg.

A. Masdea. Nota sulla costruzione di un cerchio tangente a tre altri. (Ohne Datum und Verlagsort.)

Vereinfachung der bekannten Gergonne'schen Construction eines Kreises, welcher drei andere berührt, durch Benutzung des folgenden vom Verf. analytisch bewiesenen Satzes: Sind C_1, C_2, C_3 drei Aehnlichkeitscentra der Kreise O_1, O_2, O_3, welche auf derselben Aehnlichkeitsaxe liegen, ferner c_2', c_3' die Polaren von C_1 in Bezug auf die Kreise O_2 und O_3, u. s. w., so gehen die Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechsseits $c_2' c_3' c_1'' c_3'' c_1''' c_2'''$ verbinden, durch das Radicalcentrum der drei gegebenen Kreise. La.

V. Hioux. Cercle tangent à trois cercles donnés. Nouv. Ann. (3) X. 399-406.

Das Berührungsproblem wird hier zurückgeführt auf die Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei andere aus den gegebenen herzuleitende Kreise rechtwinklig schneidet und einen der gegebenen berührt. Lg.

W. S. Das Theorem von Stewart. Spaczinski's Bote No. 128. (Russisch.)

Es werden einige Folgerungen dieses Satzes gegeben, wie z. B. der Beweis des Satzes von Ptolemaeus u. a. Si.

K. Kotelnikow. Verallgemeinerung der Aufgabe von Apollonius. Spaczinsky's Bote No. 107. (Russisch.)

Es handelt sich um die von Miquel gegebene Verallgemeinerung der bekannten Aufgabe. Si.

Chr. Wolff. Das Princip der reciproken Radien. Pr. Gymn. Erlangen. 39 S. 8°. (2 Fig.-Taf.)

Die kleine Schrift ergänzt den grössten Teil der Planimetrie-Schulbücher dadurch, dass sie das im Titel genannte Princip für die Auffindung von Eigenschaften von Kreisen und Kreis-Systemen und für die Lösung von Kreis-Aufgaben in elementarster Weise verwendet. Beispielsweise werden so die Eigenschaften der drei Kreise abgeleitet, welche die Oerter der Punkte sind, die von B und C, von C und A, von A und B beziehungsweise die Entfernungs-Verhältnisse $q:r$, $r:p$, $p:q$ haben. Scht.

R. Curtis, W. J. Greenstreet, G. B. M. Zerr. Solution of question 10957. Ed. Times LV. 111.

Die Bedingung dafür, dass vier Kreise S_1, S_2, S_3, S_4 von einem fünften berührt werden, lässt sich in der Form angeben:

$$12.34 \pm 23.14 \pm 31.24 = 0,$$

wo 12 die Länge der gemeinschaftlichen Tangenten von S_1 und S_2 ist. Ueberführung in einzelne besondere Fälle. Lp.

E. Grossetête. Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1889). Solution de la question de mathématiques élémentaires. Nouv. Ann. (3) X. 201-203.

Lösung der Aufgaben:

Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden OA und OB und ein Punkt P in ihrer Ebene;

1) auf OA einen Punkt M so zu finden, dass die beiden Kreise, welche durch P und M gehen und OB berühren, sich unter einem gegebenen Winkel schneiden;

2) zu untersuchen, in welcher Weise der Schnittwinkel beider Kreise sich ändert, wenn M die Gerade OA durchläuft;

3) wenn Q und Q' die beiden anderen Schnittpunkte der beiden Kreise mit der Geraden OA sind, zu beweisen, dass der dem Dreieck PQQ' umbeschriebene Kreis eine Gerade berührt, welche von der Lage des Punktes M auf OA unabhängig ist.

F.

Diederichs. Die Rectification des Kreises in der Schule. Pr. (No. 228) Domgymn. Halberstadt. 8 S. 4°.

In der Einleitung hebt der Verfasser die Schwierigkeiten hervor, die das im Titel genannte Problem beim Unterrichte bietet, und legt dann sein beobachtetes Verfahren dar. Er geht von dem Grundsatze aus, dass der Bogen grösser als die zugehörige Sehne, aber kleiner als die Summe der beiden durch seine Endpunkte gezogenen Tangenten ist, und beweist nach einigen Folgerungen hieraus den Satz, dass der Unterschied zwischen den Umfängen gleichvielseitiger regelmässiger um- und eingeschriebener Vielecke von doppelter Seitenzahl kleiner ist, als die Hälfte des Unterschieds zwischen den Umfängen der betreffenden Vielecke von einfacher Seitenzahl. Daraus ergiebt sich dann leicht, dass die Peripherie des Kreises gleich dem Umfange eines (um- oder eingeschriebenen) regelmässigen Vielecks von unend-

licher Seitenzahl ist. Zum Schluss wird noch die Quadratur des Kreises in Kürze besprochen. Mz.

F. Chicouras. Étude sur la solution du problème de la quadrature du cercle. Montpellier. 39 S. 8°.

A. H. Russell. Mechanical trisection of any angle. Nature XLIII. 547-548.

Um einen Punkt O eines festen Lineals $OA_1 = 2a$ drehe sich ein bewegliches Lineal $OA = 2a$. Im Halbirungspunkte H von OA sei an OA unter rechtem Winkel ein neues Lineal HI nach der Drehungsrichtung hin befestigt. Ist auf dem festen Lineale noch $OA_2 = OA_1$ gemacht, so trifft eine zwischen A_2 und A gezogene Gerade (im Instrumente ein zwischen A_2 und A gespannter Gummifaden) den Ansatz HI in einem Punkte P, so dass $\angle POA = \frac{1}{3}POA_1$. Der Ort des Punktes P hat zur Polargleichung $r\cos\frac{1}{3}\varphi = a$ oder in Cartesischen Coordinaten

$$y^2(x+3a) = (2a+x)^2(a-x),$$

hat also in A_2 einen Doppelpunkt. Lp.

Hermes. Wissenschaftlich-praktische Lösung der Winkeldrittelung (Trisection) auf Grund der Kreislehre. Hoffmann Z. XXII. 401-409.

Zwei congruente Kreise liegen so, dass die Peripherie des einen durch den Mittelpunkt des anderen geht. Nimmt man auf der gemeinschaftlichen Secante beider Kreise einen Punkt M als Mittelpunkt eines neuen Kreises an, der durch die beiden Mittelpunkte M_1 und M_2 der gegebenen Kreise geht, und den ersten Kreis in A_1, den zweiten in A_2 schneidet, so ist

$$\angle A_1MM_1 = M_1MM_2 = M_2MA_2,$$

d. h. der Winkel A_1MA_2 ist gedrittelt. Die ganze Figur wird nun durch einen passenden Mechanismus ersetzt. Lp.

A. Pegrassi. Della trisezione dell'angolo quale operazione grafica. (Autographirt.) Ref. in Schlömilch Z. XXXVIII. Hist lit. Abt., S. 37.

A. Emmerich. Die Brocard'schen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Berlin. G. Reimer. XIV + 153 S. mit 1 Fig-Taf. 8°.

Schon in der Programmarbeit vom Jahre 1889 hat der Verfasser als einer der emsigsten Mitarbeiter auf dem Gebiete der neueren Dreiecksgeometrie ein specielles Capitel derselben historisch-didaktisch bearbeitet und damit Vorarbeiten zu dem vorliegenden ausführlicheren Werke geliefert. Dasselbe behandelt von denselben Gesichtspunkten aus das ganze Capitel der Brocard'schen Gebilde, soweit es sich wenigstens mit den elementaren Sätzen der Planimetrie und Stereometrie beherrschen lässt. Auch ohne die Beziehungen zu den Kegelschnitten ist der Inhalt des Buches ein so reicher, dass er sowohl jüngeren Mathematikern beim Eintritt in das Studium der immer mehr anschwellenden Litteratur ein sicherer Führer, als auch den Fachcollegen im Schulamt eine Fundgrube für ihren Unterricht in den oberen Klassen sein wird. Mit besonderem Vergnügen hat Referent die jedem Capitel vorangeschickten Einleitungen gelesen, in welchen der Verfasser mit der ihm eigentümlichen Klarheit das zu behandelnde Thema umschreibt, den Zusammenhang mit dem vorhergehenden angiebt und Ausblicke auf später zu Erörterndes eröffnet; hierdurch wird dem Leser das Verständnis erleichtert und sein Interesse wach erhalten. Die einzelnen Capitel behandeln: I. die Brocard'schen Winkel, II. die Brocard'schen Punkte, III. die Lemoine'schen Kreise, IV. die Tucker'schen Kreise und den Taylor'schen Kreis, V. die Beikreise, VI. den Brocard'schen Kreis, VII. gleichbrocardische Dreiecke, VIII. die Neuberg'schen und die McCay'schen Kreise. Auf eine weitere Erörterung des Inhalts muss hier verzichtet werden; bemerkt sei nur noch, dass dem Buche eine Uebersicht der benutzten Quellen vorgedruckt

und ausserdem die Urheberschaft für die wichtigeren Sätze und Formeln an den betreffenden Stellen kenntlich gemacht ist. Durch Druck, Papier und Ausstattung hat auch die bekannte Verlagsfirma das ihre gethan, dem Leser das Buch angenehm zu machen. Lg.

E. Lemoine. Trois théorèmes sur la géométrie du triangle. Revue de Mathém. spéc. 6 S.

Sind r, ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, s, Δ die Radien des Umkreises und der Berührungskreise, der halbe Umfang und der Inhalt eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c, so lauten die drei hier bewiesenen Sätze:

I. Die beiden Ausdrücke

$$\Delta^2\{4r^2+20r\varrho-2\varrho^2-s^2\}-\varrho^2(4r+\varrho)^2$$

und

$$\Delta^2\{4r^2-20r\varrho_a-2\varrho_a^2-(s-a)^2\}+\varrho_a^2(4r-\varrho_a)^2$$

sind jeder gleich Null oder gleich einem vollständigen Quadrat.

II. $\Sigma a^2(a-b)(a-c)(a+b-2c)(a+c-2b) = 16\Delta^2(r-2\varrho)^2$,
$\Sigma a^2(a+b)(a+c)(a-b+2c)(a-c+2b) = 16\Delta^2(r+2\varrho_a)^2$.

III. Ist D der Berührungspunkt des Feuerbach'schen und des Inkreises, D' der Punkt, in welchem die Tangente in D an den Inkreis die Steiner'sche Ellipse berührt, so ist

$$DD' = -\tfrac{1}{2}\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}.$$

Lg.

E. Lemoine. Sur une transformation relative à la géométrie du triangle. S. M. F. Bull. XIX. 133-135.

Es werden die Sätze bewiesen: Wenn von einem Dreiecke der Umkreis und der Inkreis festliegen, so ist der geometrische Ort für den Grebe'schen Punkt eine Ellipse, der Ort für die Punkte von Gergonne und Nagel je ein Kreis. Lg.

E. Lemoine. Sur la transformation continue. S. M. F. Bull. XIX. 136-141.

Durch Drehung gewinnt der Verfasser folgendes naheliegende Princip: „Aus jeder allgemeinen, auf ein Dreieck bezüglichen Formel gewinnt man immer eine neue Formel, wenn man a, b, c, s, $s-a$, $s-b$, $s-c$, J, r, ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, α, β, γ beziehungsweise ersetzt durch: a, $-b$, $-c$, $-(s-a)$, $-s$, $s-c$, $s-b$, $-J$, $-r$, ϱ_a, ϱ, $-\varrho_c$, $-\varrho_b$, $-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$, wo a, b, c die Seiten, s den halben Umfang, J den Inhalt, r den Radius des Umkreises, ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c die Radien der vier Berührungskreise, α, β, γ die Winkel bedeuten" (vgl. das folgende Referat). Scht.

E. Lemoine. I. Sur les transformations systématiques des formules relatives au triangle. Transformation continue. II. Divers résultats concernant la géométrie du triangle. Assoc. Franç. Marseille XX. 118-130, 130-159.

I. Die Analogie zwischen vielen Dreiecksformeln legt die Frage nahe, wie man streng und gesetzmässig aus einer gegebenen Formel die übrigen ableiten kann. Herr L. teilt folgende ihm von Hrn. Laisant gegebene Lösung mit: Man bezeichne mit $BC = a$ Grösse und Richtung einer Seite, mit β und γ die Winkel, welche die anderen Seiten mit der positiven Richtung von BC bilden, dann sind die Dreieckswinkel $A = \gamma-\beta$, $B = \beta$, $C = \pi-\gamma$ und die Seiten $b = \frac{a\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)}$, $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\gamma-\beta)}$. Mit diesen Werten wird jede Dreiecksformel zu einer Identität $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, welche für alle Werte von α, β, γ gilt. Ersetzt man hierin, ohne α zu ändern, β durch $\pi-\beta$ und γ durch $\pi-\gamma$, so folgt, dass man in den entsprechenden Formeln a, b, c, A, B, C durch a, $-b$, $-c$, $-A$, $\pi-B$, $\pi-C$ zu ersetzen hat. Dadurch verwandeln sich z. B. s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ in $-(s-a)$, $-s$, $s-b$, $s-c$, ferner r in $-r$, $\varDelta = \frac{ab}{2}\sin C$ in $-\varDelta$ etc. Diese „transformation continue en A" liefert in den meisten Fällen neue For-

meln; z. B.:

$$a(s-a)+b(s-b)+c(s-c) = 2\varrho(4r+\varrho)$$

giebt

$$as+b(s-c)+c(s-b) = 2\varrho_a(4r-\varrho_a),$$

und kann daher mit Vorteil sowohl zur Abkürzung bei Beweisen als auch zur Auffindung neuer Sätze dienen, wie an Beispielen gezeigt wird (vgl. das vorangehende Referat).

II. Es werden für die wichtigsten merkwürdigen Punkte die Abstände zusammengestellt und für einige die Construction gegeben, z. B. die folgende für den Berührungspunkt des Feuerbach'schen Kreises mit dem Inkreis: Man schneide die Linie, welche den Schwerpunkt und das Inkreiscentrum verbindet, mit den Seiten des Mittendreiecks in A_1, B_1, C_1, ebenso BC mit AA_1 in A_0, CA mit BB_1 in B_0, dann trifft das Lot vom Inkreiscentrum auf A_0B_0 diese Linie im gesuchten Berührungspunkte. — Andere Bemerkungen betreffen verschiedene schon bekannte Punkte des Dreiecks, geometrische Oerter derselben u. s. w. Lg.

A. Lugli. Alcuni teoremi della recente geometria del triangolo. Periodico di Mat. VI. 23-34.

Elementare Darstellung der wichtigsten Sätze über die neuere Dreiecksgeometrie; als Quellen benutzte der Verf.: Casey, „A sequel to Euclid“, ferner „Syllabus of modern plane geometry issued by the Association for the improvement of geometrical teaching“ und die Programm-Abhandlung von Emmerich: „Der Brocard'sche Winkel des Dreiecks“. La.

D. Jefremow. Ueber reciproke Punkte des Dreiecks. Spaczinski's Bote No. 116. (Russisch.)

Construirt man denjenigen dem gegebenen Dreiecke eingeschriebenen Kegelschnitt, welcher einen gegebenen Punkt als Brennpunkt hat, so wird sein zweiter Brennpunkt der dem gegebenen reciproke Punkt genannt. Es werden hier elementare, von den Eigenschaften der Kegelschnitte unabhängige Construc-

tionen des dem gegebenen Punkte reciproken Punktes und eine Untersuchung ihrer Eigenschaften gegeben. Si.

P. SWESCHNIKOW. Ueber Brocard'sche Punkte. Spaczinski's Bote No. 107. (Russisch.)

Es wird das Theorem bewiesen: „In jedem Dreiecke sind die beiden Brocard'schen Winkel einander gleich", ohne die Aehnlichkeit der Figuren zu benutzen, was dem Verfasser einfacher und elementarer scheint als der gewöhnliche Beweis.

Si.

J. J. PLAMENEVSKY. Charakteristische Eigenschaft der Transversale durch einen merkwürdigen Punkt des Dreiecks. Arbeiten der VIII. Vers. russ. Naturf. u. Aerzte, Abt. I. 55-58. (Russisch.)

Sind x, y, z die Abstände des Punktes M von den Seiten des Dreiecks; ferner u, v, w Entfernungen, gemessen parallel der Secante, und a, b, c die Längen der Seiten, so haben wir

$$\frac{ax}{u}+\frac{by}{v}+\frac{cz}{w}=0$$

als fundamentale Gleichung des Punktes M. Sie ermöglicht dem Verfasser, eine Tabelle der Gleichungen aller bis jetzt betrachteten merkwürdigen Punkte des Dreiecks aufzustellen.

Si.

CL. THIRY. Distances des points remarquables du triangle. Belg. Bull. (3) XXI. 471-482, Mathesis (2) I. Suppl. III. 8 S.

E. CATALAN et C. LE PAIGE. Rapport. Ibid. 411-416.

Der Verfasser findet eine allgemeine Formel für den Abstand eines beliebigen Punktes von dem Schnittpunkte der von den Ecken eines Dreiecks ausgehenden Strahlen, welche die Gegenseiten in dem Verhältnisse der n^{ten} Potenzen der anliegenden Seiten teilen, und leitet daraus eine Menge Resultate bezüglich der neueren Dreiecksgeometrie her. Mn. (Lp.)

BERNÈS. Transformation par inversion symétrique. J. de Math. élém. (3) V. 121-127, 145-148, 175-181, 197-207, 217-224, 244-252, 265-273.

Ein über der Seite *BC* eines Dreiecks *ABC* als Sehne beschriebener Kreis treffe eine durch die Ecke *A* gezogene beliebige Transversale in *M* und *N*, so heissen *M* und *N* „isocyklisch“ in Bezug auf *BC* und *A*. Wenn ferner zwei Punkte *P* und *P'* in der Dreiecksebene so liegen, dass die Geraden *PA*, *PB*, *PC* bezw. mit den Seiten *AC*, *BA*, *CB* ebenso grosse Winkel bilden wie *P'A*, *P'B*, *P'C* bezw. mit *AB*, *BC*, *CA*, so heissen *P* und *P'* „isogonal“. Unter den Winkelcoordinaten eines Punktes *P* in in Bezug auf das Dreieck *ABC* werden die Winkel verstanden, unter welchen die Seiten *BC*, *CA*, *AB* von *P* aus erscheinen, aber zugleich mit Berücksichtigung des Drehungssinnes, sodass ihre Summe immer gleich Null ist, gerade wie die Summe der Winkel eines Dreiecks. Zwei Punkte, welche in Bezug auf ein Dreieck Winkelcoordinaten haben, die bei dem einen die entgegengesetzten Vorzeichen wie bei dem anderen haben, werden „isoptisch“ genannt.

Ist nun *m* der Isoptische des Isogonalen eines Punktes *M*, so beweist man leicht, dass $Am \,.\, AM = bc$ $(b = CA,\ c = AB)$; d. h. nimmt man *A* als Pol und *bc* als positive Potenz für eine Verwandlung durch reciproke Radien (Inversion), so ist der Punkt *m*, der Isocyklische des Isogonalen von *M*, symmetrisch bezüglich der Winkelhalbirenden von *A* zu dem inversen Punkte von *M*. Nähme man ebenso den Isocyklischen des Isogonalen von *m*, so käme man zu *M*. Diese beiden Punkte werden deshalb „symmetrisch invers“ zu einander in Bezug auf den Pol *A* genannt, einfacher „Transformirte“ von einander. Zwei Figuren heissen „symmetrisch invers“ oder „transformirt“ von einander, wenn jedem Pnnkte der einen ein Punkt der anderen so entspricht wie *m* dem Punkte *M*.

Bei genauerem Zusehen erkennt man, dass es sich um eine Verwandlung durch reciproke Radien mit *A* als Pol und *bc* als Potenz handelt, und dass die verwandelte Figur danach an der Winkelhalbirenden von *A* gespiegelt wird. Um jedoch die Be-

handlungsart zu kennzeichnen, hat Ref. die Darstellungsform des Verf. vorangestellt.

Es ist unnötig, auf die weiteren einzelnen Ergebnisse genauer einzugehen, da ja die Gesetze der gekennzeichneten „symmetrisch inversen" Transformation bekannt sind. Der Verf. gewinnt viele hübsche Einblicke in den Zusammenhang der Sätze der neueren Dreiecksgeometrie und liefert somit zu ihr einen beachtenswerten Beitrag. Die Titel der in dem vorliegenden Jahrgange behandelten Abschnitte sind: Einleitendes. Transformationsmethode. Beispiele invers symmetrischer Punkte und erste Anwendungen der Methode. Fortsetzung der Anwendungen. Anwendung auf die Eigenschaften zweier conjugirten Punkte. Allgemeine Sätze über die conjugirten Punkte, über das geradlinige Transformirte eines Dreiecks und den Transformirten eines Kreises. Winkelbeziehungen zwischen einem Dreiecke und seinem geradlinigen Transformirten. Andere Eigenschaften zweier symmetrisch inversen Kreise. Anwendung der Methode auf die isogonalen Punkte. Fortsetzung der isogonalen Punkte. Ueber die Transformirten der Fusspunkte zweier isogonalen Punkte und Beziehungen, welche sich daran knüpfen. Die Betrachtungen werden in den folgenden Jahrgängen des Journals fortgesetzt. Analytisch lässt sich diese Transformation in Bezug auf die Winkelhalbirende von A als Polaraxe und A als Pol so darstellen, dass eine Function der beiden Polarcoordinaten r und φ in dieselbe Function von $\frac{bc}{r}$ und $-\varphi$ übergeführt wird. Lp.

R. Tucker. Two notes on isoscelians. Lond. M. S. Proc. XXII. 178-179.

Ein mit dem Inkreis concentrischer Kreis treffe die Seiten des Dreiecks, und zwar BC in D, D'; CA in E, E'; AB in F, F'; DE', EF', FD' bilden das Dreieck $\alpha\beta\gamma$; DF', FE', ED' das Dreieck $A'B'C'$, dann sind $\alpha\beta\gamma$ und $A'B'C'$ ähnlich, $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ schneiden sich im Grebe'schen Punkte von ABC, der Kreis $DD'EE'FF'$ ist der Tucker'sche für $\alpha\beta\gamma$ und $A'B'C'$. Die zweite Note betrifft

zwei andere aus ABC abgeleitete ähnliche Dreiecke, bezüglich deren Bezeichnung und Entstehung auf Proc. XVI. 185 verwiesen wird, so dass ein genaueres Referat hier nicht möglich ist.

Lg.

R. Tucker. A property of the circumcircle. Lond. M. S. Proc. XXII. 470-472.

Sind Ω, Ω' die Brocard'schen Punkte des Dreiecks ABC, und nimmt man α, β, γ und α', β', γ' auf den Seiten so an, dass $\Omega\alpha A = \Omega\beta B = \Omega\gamma C = \omega$ und $\Omega'\alpha' A = \Omega'\beta' B = \Omega'\gamma' C = \omega$ wird, dann sind die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ congruent, sie haben denselben Umkreis; die Umkreise von $\alpha\beta\gamma$ und ABC haben $\Omega\Omega'$ zur Potenzlinie, und ihre Mittelpunkte liegen symmetrisch zu $\Omega\Omega'$. Einige andere Beziehungen ergeben sich mit Zuhülfenahme der zweiten Brocard'schen Punkte Ω_1 und Ω_2 von $\alpha\beta\gamma$, resp. $\alpha'\beta'\gamma'$.

Lg.

A. H. Anglin. On some applications of the pedal line of a triangle. Edinb. M. S. Proc. IX. 49-50.

G. A. Gibson. The pedal line of a triangle and theorems connected with it. Edinb. M. S. Proc. IX. 50-55.

Die meisten Sätze stehen mehr oder weniger unter selbständiger Gestalt in den Lehrbüchern über die Geometrie der Parabel; sie werden hier jedoch (wie bei Geiser, Einleitung in die synthetische Geometrie, F. d. M. II. 1869/70. 370. Lp.) unabhängig von der Parabel entwickelt als Erläuterung der Art, wie man sie für Schüler bei dem Lehrgange nach den Elementen des Euklid einführen kann.

Gbs. (Lp.)

S. Catania. Un teorema sul triangolo. Periodico di Mat. VI. 138-142.

O sei der Treffpunkt der Höhen eines Dreiecks ABC. Eine endliche Zahl von Dreiecken besitzt O als Treffpunkt der Höhen,

eine Ecke in einem gegebenen Punkte und die anderen beiden auf zwei gegebenen Geraden. Herr C. hat sich diese Aufgabe gestellt für den Fall, dass der gegebene Punkt ein Höhenfusspunkt ist und die gegebenen Geraden die beiden anderen Seiten des Dreiecks sind. Die Bestimmung der genannten Dreiecke hängt von einer quadratischen Gleichung ab; die Discussion derselben beweist, dass man zwei reelle und verschiedene Dreiecke erhält, falls *ABC* spitzwinklig ist, keins, wenn es rechtwinklig, endlich 0, 1, 2, wenn es stumpfwinklig ist. La.

A. Gob. Sur une série de quadrangles. Assoc. Franç. Marseille XX. 232-241.

Der Aufsatz schliesst sich eng an die früheren Arbeiten des Verfassers an, über welche in F. d. M. XXI. 1889. 567 und XXII. 1890. 585 berichtet ist. „Metaharmonisch" heisst ein Polygon $A'B'C'\dots$ zu einem anderen $ABC\dots$ in Bezug auf einen Punkt P, wenn seine Ecken A', B', C', ... den Ecken A, B, C, ... bei einer Transformation mittels reciproker Radien aus dem Pole P entsprechen. Die untersuchte Schar von Vierecken ist diejenige, welche man erhält, wenn man die metaharmonischen Vierecke eines festen Vierecks $ABCD$ in Bezug auf einen veränderlichen Punkt aufstellt. Besonders wenn $ABCD$ ein „harmonisches" Viereck ist (vergl. F. d. M. XVII. 1885. 549ff.), findet der Verf. interessante Beziehungen zu den von Hrn. Neuberg entdeckten Sätzen über dasselbe. Lp.

J. Neuberg. Sur les quadrangles complets. Mathesis (2) I. 33-35, 67-70, 81-82, 189-195.

Beweis zahlreicher, auf die neuere Dreiecksgeometrie bezüglicher Eigenschaften des Kreises und der Kegelschnitte in ihrem Zusammenhange mit den vollständigen Vierseiten.

Mn. (Lp.)

V. Jeřábek. Ueber einige geometrische Punkte. Časop. XX. 141. (Böhmisch.)

Zählt 84 Arten von speciell hervorzuhebenden Punkten in der Geometrie auf, unter Beigabe von kurzgefassten Erklärungen derselben, darunter auch die von französischen Geometern so genannten „points de Jérabek" ($J_\delta J_\varrho$) des Autors. Std.

E. Vigarié. Las generalizaciones de la geometría del triangulo. Progreso mat. I. 241-247, 274-279.

Zusammenstellung der neueren Ergebnisse in der Dreiecksgeometrie. Lp.

A. J. Pressland. Some relations between the orthic and the median triangle. Edinb. M. S. Proc. IX. 36-39.

Gbs.

E. W. Hobson. A treatise on plane trigonometry. Cambridge. University Press. XV + 356 S.

R. Levett and C. Davison. The elements of plane trigonometry. London. Macmillan and Co. XVI + 520 S.

Diese beiden Lehrbücher der ebenen Trigonometrie können rückhaltlos als vortreffliche Darstellungen der in ihnen behandelten Gegenstände bezeichnet werden, indem sie Gründlichkeit bei der lichtvollen Darstellung der Principien mit der speciell englischen Eigenart zahlreicher und gut gewählter erläuternder Beispiele vereinigen. Wie der Titel es andeutet, wendet sich das erste Werk an eine schon etwas vorgeschrittenere Klasse von Schülern. Der Zug, in dem sich beide von den landläufigen englischen Lehrbüchern unterscheiden, ist die gründlichere Behandlung der complexen Grössen sowie der unendlichen Producte und Reihen. In dem ersten Buche sind die Abschnitte von S. 221 an diesem Stoffe gewidmet und bringen eine so gute Untersuchung darüber, wie wir sie besser nicht kennen gelernt haben. Die einzige von uns bemerkte, nicht ganz befriedigende Stelle des Buches ist der Beweis in § 11, dass der Umfang eines Kreises dem Durchmesser proportional ist; es fehlt nämlich der Nach-

weis, dass die Grenze des Umfangs des Polygons von der Art nicht abhängt, wie seine Seiten sich der Grenze Null nähern. Sonst aber ist das Buch durchaus gut und wird zweifelsohne sofort seinen Platz unter den ständigen englischen Lehrbüchern erhalten.

In dem zweiten Werke sind die höheren Partien nicht ganz mit derselben Allgemeinheit behandelt, indem wegen gewisser Sätze bezüglich der Reihen auf Lehrbücher der Algebra verwiesen ist. Es ist vielleicht fraglich, ob die Capitel, welche für die Trigonometrie der spitzen Winkel aufgewandt sind, nicht besser hätten fortbleiben können; möglich, dass die praktischen Bedürfnisse der Schule ihre Anwesenheit erheischt haben. Vielleicht dürfte es nicht unstatthaft sein, die Aufmerksamkeit auf den Umstand zu lenken, dass das recht passende Wort „Radian" jetzt in England ganz allgemein für die Einheit des Kreisbogenmasses in Gebrauch gekommen ist. Das Wort stammt, wie wir glauben, von dem verstorbenen Professor James Thomson her und scheint der allgemeinen Annahme wert zu sein.

Gbs. (Lp.)

A. Czajewicz. Ebene und sphärische Trigonometrie. Warschau 1891. Math. phys. Bibliothek. (3) VI. XXX + 392 S. 8°. (Polnisch.)

Ein für Mittelschulen und den Selbstunterricht bestimmtes, klar und elementar geschriebenes, mit einem guten Abrisse der Geschichte der Trigonometrie und vielseitiger Heranziehung von Aufgaben und Beispielen verfasstes Lehrbuch. Dn.

Jentzen. Elemente der Trigonometrie zum praktischen Gebrauch für Unterrichtszwecke an mittleren technischen Lehranstalten. Dresden. G. Kühtmann. 52 S. 8°.

Bei Abfassung dieses Buches ist ausschliesslich das praktische Bedürfnis des Technikers massgebend gewesen; alles theoretische Beiwerk ist vermieden. Nur die unentbehrlichen Begriffe und die einfachsten Formeln mit ihrer Begründung sind

gegeben; dagegen findet man diese Dinge sofort an praktischen Beispielen, wie sie beim Techniker vorkommen, beleuchtet. Es wird die Auflösung der Dreiecke, regulären Polygone und die trigonometrische Flächenberechnung gegeben. In einem Anhange findet man den Tangentensatz, die Gleichungen von Mollweide, die Pothenot'sche Aufgabe und zum Schluss eine Tabelle der trigonometrischen Zahlen. Mz.

Th. Walter. Schultrigonometrie. Halle a. S. Waisenhaus-Buchhdlg. 80 S. 8°.

In diesem Buche ist von der Goniometrie, weil sie mehr der Analysis angehört, nur das Notwendige vorgetragen; dagegen sind die Fundamentalaufgaben der Dreiecksberechnung in breiterer Form als sonst üblich, behandelt worden. Zu diesen Fundamentalaufgaben sind Zahlenbeispiele fünf- und vierstellig durchgerechnet worden, um dem Schüler den Vergleich beider Rechnungen zu geben. Am Schluss findet man noch die Grundformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck und eine besondere Fassung der Neper'schen Regel. Einige Aufgaben über Horizontal- und Höhenmessung sind beigegeben; ferner die vierstelligen Logarithmen der Zahlen bis 1000 und die trigonometrischen Zahlen für die Winkelgrade. Mz.

Th. Häbler. Die Ableitung der ebenen Trigonometrie aus drei Grundgleichungen. Festschr. d. Fürsten- u. Landessch. Grimma. 61-69. 4°.

Es handelt sich um die vier Systeme:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 180^\circ, \\ \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}. \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \alpha+\beta+\gamma = 180^\circ;\ b\sin\alpha = a\sin\beta;\ c = b\cos\alpha + a\cos\beta.$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} a = b\cos\gamma + c\cos\beta;\ b = c\cos\alpha + a\cos\gamma; \\ c = a\cos\beta + b\cos\alpha. \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha;\ b^2 = c^2+a^2-2ac\cos\beta; \\ c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma. \end{cases}$$

Die Vorzüge und Nachteile derselben werden besprochen.

Wz.

M. AZZARELLI. Alcuni teoremi sul triangulo rettilineo. Rom. Acc. P. d. N. L. XLIV. 49-88.

Eine durchweg elementar gehaltene Arbeit über das geradlinige Dreieck. Mit Hülfe der einfachsten trigonometrischen Definitionen und Sätze werden mancherlei Stücke berechnet, die am Dreieck auftreten, wenn man die Höhen bis zum umgeschriebenen Kreise verlängert, ferner die Durchmesser dieses Kreises construirt, die durch die Ecken des Dreiecks gehen. Auch noch andere Linien werden an der Dreiecksfigur gezeichnet und berechnet, sowie einige symmetrische Relationen zwischen Linien und Winkeln abgeleitet. Viele davon sind wohlbekannt.

Mz.

AUG. PÁNEK. Planimetrische Ableitung der Heron'schen Formel, den Dreiecksflächeninhalt betreffend. Casop. XX. 310. (Böhmisch.)

Der Verfasser legt seiner Ableitung die einfach zu erhaltende Formel

$$\sqrt{a^2-\frac{4\varDelta^2}{c^2}}+\sqrt{b^2-\frac{4\varDelta^2}{c^2}}=c,$$

wo a, b, c die Seitenlängen des Dreiecks $\varDelta$ bedeuten, zu Grunde und gelangt bequem zur oben genannten Formel. Std.

E. CATALAN. Quelques formules relatives aux triangles rectilignes. Belg. Mém. C in 8° XLIV.

Metrische Beiträge zur neueren Geometrie. Abstände der merkwürdigen Punkte; Beziehungen zwischen diesen Abständen; Brocard'sche Winkel und Punkte, u. s. w. Mn. (Lp.)

E. GELIN. Formules relatives aux polygones réguliers. Mathesis (2) I. 160-164.

Flächeninhalt dieser Vielecke von 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 Seiten; Volumen und Oberfläche der Umdrehungskörper dieser Poly-

gone bei einer Rotation um eine Symmetrieaxe, um eine Seite, u. s. w. Mn. (Lp.)

G. Bernardi. Cinque teoremi di poligonometria rettilinea e due teoremi di poligonometria sferica. Batt. G. XXIX. 63-67.

G. Bernardi. Alcuni teoremi di poligonometria rettilinea sferica. Batt. G. XXIX. 173-194.

In der ersten Note sind nur die Lehrsätze angegeben, in der zweiten Arbeit werden die Beweise mitgeteilt. Der erste Satz lautet:

„Wenn man alle Ecken eines beliebigen, ebenen oder windschiefen Polygons (unter der Voraussetzung, dass keine drei von ihnen in gerader Linie liegen) von einer beliebigen Geraden aus, die weder eine Seite noch eine Diagonale des Polygons schneidet, durch Ebenen projicirt, so hat jedes der vier folgenden Producte den Wert $+1$ oder -1, je nachdem die Zahl der Polygonseiten gerade oder ungerade ist:

1) das Product der Verhältnisse je zweier Abschnitte, in welche die Polygonseiten von den projicirenden Ebenen geteilt werden;

2) das Product der Verhältnisse der Abstände der projicirenden Ebenen von den benachbarten Ecken;

3) das Product der Verhältnisse der Sinus derjenigen Winkel, in welche die Polygonwinkel von den zugehörigen projicirenden Ebenen geteilt werden;

4) das Product der Verhältnisse der Sinus derjenigen Winkel, welche die projicirenden Ebenen mit den anstossenden Polygonseiten bilden.“

Der erste Teil wird zunächst für das Dreieck (mit Hülfe des Ceva'schen Satzes) und dann allgemein durch den Schluss von n auf $n+1$ bewiesen; die Richtigkeit der übrigen Behauptungen ergiebt sich durch Benutzung dieses ersten Teils.

Einen zweiten, entsprechenden Satz erhält man durch Projection der Seiten des Polygons von einem beliebigen Punkte aus.

Die übrigen Sätze sind Folgen oder specielle Fälle der beiden angeführten mit Ausnahme des letzten, welcher sich nur auf windschiefe Polygone bezieht, und bei welchem die durch zwei anstossende Seiten bestimmten Ebenen dieselbe Rolle spielen, wie in den ersten Sätzen die projicirenden Ebenen. F.

F. Schilling. Ueber die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente. Math. Ann. XXXIX. 598-600.

Der Verf. gelangt zu der gewünschten Interpretation, indem er die drei Kanten der zum sphärischen Dreieck gehörigen dreiseitigen Ecke durch drei windschiefe Geraden ersetzt (vergl. das Referat über die ausführliche, gleich betitelte Arbeit des Verf. in Abschnitt IX, Cap. 1). R. M.

R. Baldwin Hayward. The elements of solid geometry. London. Macmillan and Co. XII + 130 S.

Die Elemente der räumlichen Geometrie werden hier in einer Ordnung vorgetragen, die von der euklidischen abweicht; dagegen wird gleichzeitig ungemein viel mehr Stoff geboten, als man gewöhnlich in elementaren Werken von demselben allgemeinen Gepräge findet. Zur Einführung dient eine Erörterung der Postulate der Geometrie, eine Abweichung vom herkömmlichen Gebrauche, die sehr empfehlenswert ist. Der Hauptpunkt jedoch, welcher Erwähnung verdient, ist die Methode der Behandlung der Senkrechten zu einer Ebene. Diese Methode beruht auf dem sogenannten allgemeinen, auf alle Arten von Grössen anwendbaren Axiome des Verfassers, das er so ausspricht: „Wenn eine Grösse so beschaffen ist, dass sie nicht zum Verschwinden gebracht werden kann, so giebt es einen endlichen Wert oder eine Anzahl gleicher endlicher Werte jener Grösse, die kleiner sind als alle anderen Werte". Giebt man die Wahrheit dieses Axioms zu, so wird die Behandlung der Normalen sehr einfach; es ist jedoch, um gelinde zu reden, zweifelhaft, ob dieser Satz

überhaupt ein Axiom heissen darf. Gewöhnlich erachtet man es für nötig, den Beweis zu erbringen, dass eine stetige Function wirklich einen grössten oder einen kleinsten Wert erlangt, so dass es unstatthaft scheint, diesem Theoreme den Rang eines Axioms zu geben. In anderer Hinsicht scheint das Buch sehr gut zu sein und nichts zu enthalten, als was in ähnlichen Lehrbüchern sehr wohl eine Stelle finden könnte. Der Verfasser schlägt das Wort „Kuboid" als Ersatz für die Umschreibung „rechtwinkliges Parallelepipedum" vor; der Vorschlag scheint beachtenswert. (In Deutschland wird neuerdings sehr hübsch „Quader" dafür gebraucht und „Spat" für Parallelepipedum. Lp.)

Gbs. (Lp.)

H. SERVUS. Ausführliches Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie zum Gebrauch an höheren Lehranstalten und zum Selbststudium. Leipzig. B. G. Teubner. II Teile. V + 48 u. IV + 144 S. 8°.

Der Verfasser begründet die Herausgabe seines Werkes damit, dass ihm „kein Lehrbuch der Stereometrie bekannt sei, welches dieselbe in so ausführlicher Weise behandelt, wie es hier geschehen ist". Dem gegenüber weist Referent nur auf das bewährte, bereits in der 7. Auflage erschienene Buch von Hauck-Kommerell hin, mit welchem das vorliegende weder dem Inhalt noch der Ausführung nach in Vergleich gestellt werden kann. Der erste Teil behandelt die gewöhnlichen Sätze von der Lage der geraden Linien und Ebenen im Raum und die körperlichen Ecken stellenweise in recht ermüdender Breite; so wird der einfache Satz: „Gleichen Seiten eines Dreikants liegen gleiche Winkel gegenüber, der grösseren Seite liegt der grössere Winkel gegenüber", auf 9½ Seiten mit einem Apparat von 13 Figuren bewiesen, während das ganze Buch nur 47½ Seiten und 55 Figuren enthält. Im zweiten Teil wird man sehr gern die auf Seite 102-114 entwickelte Theorie der Maxima und Minima entbehren; denn was soll jemand „ohne Lehrer" und „ohne Kenntnis der Differentialrechnung zu besitzen", damit anfangen, wenn ihm an

dem Beispiel $f(x)=rx^2-x^3$ gezeigt wird, wie die Ableitungen dieser Function und daraus die Reihe

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)$$

gebildet werden, und wenn dann hinzugefügt wird: Diese Reihe heisst die Taylor'sche, in dieselbe lässt sich jede Function $f(x+h)$ entwickeln? Gemeint ist die ganze algebraische Function; aber die Verwirrung wird gesteigert durch die (natürlich ohne Beweis) gegebene Vorschrift zum Differentiiren irrationaler algebraischer und trigonometrischer Functionen. Gegen eine Herleitung der Formeln von Gauss und Neper, wie die hier auf 7 Seiten gegebene, richten sich mit Recht die Verordnungen der neuen preussischen Lehrpläne. Unklarheiten und Nachlässigkeiten des sprachlichen und mathematischen Ausdrucks finden sich vielfach. Lg.

Scholim. Stereometrische Oerter und Constructions-Aufgaben. II. Pr. (No. 188) Gymn. Kreuzburg O.-Schl. 10 S. 4°.

Fortsetzung und Schluss der Arbeit, über welche im vorigen Bande der F. d. M. (S. 595) referirt ist. Die hier zusammengestellten Aufgaben beziehen sich auf den Rotationskegel und die ihm einschreibbaren Kugeln. Das Erscheinen der ganzen Arbeit, umgearbeitet und vermehrt, in Buchform wird angekündigt. Scht.

R. Heger. Versuch einer Beseitigung des Axioms der Ebene. Hoffmann Z. XXII. 321-329.

Als Ausgangspunkt dient die Drehung eines starren Körpers um zwei feste Punkte; hierdurch werden die Begriffe der Geraden und des Kreises gewonnen. Zwei starr verbundene Gerade bilden einen Winkel. Es folgt der Begriff der Kugel und die Erzeugung einer Ebene durch Rotation eines rechten Winkels um einen Schenkel. Zuletzt wird der Beweis geführt,

dass jede Gerade, die zwei Punkte einer Ebene enthält, ganz auf ihr liegt. Lp.

A. Radicke. Ueber den bekannten Lehrsatz von regulären Polyedern. Hoffmann Z. XXII. 169-170.

Die Ableitung der möglichen Formen aus dem Euler'schen Satze für die Polyeder wird als neu (!) empfohlen. Lp.

S. Tebay. Solution of question 10745. Ed. Times LV. 63-64.

Sind a, b, c drei zusammenstossende Kanten eines Tetraeders, ferner A_1, A_2, A_3 die Inhalte der von bc, ca, ab eingeschlossenen Seitenflächen, A derjenige der vierten Seitenfläche und x, y, z die Trägheitsradien in Bezug auf a, b, c, so ist

$$(ax)^2+(by)^2+(cz)^2 = A_1^2+A_2^2+A_3^2-\tfrac{1}{3}A^2.$$ Lp.

Bernès. Expression du rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre $SABC$, en fonction des arêtes de ce tétraèdre. J. de Math. élém. (3) V. 49-50.

Kurze Herleitung, bei welcher der Satz zur Erscheinung kommt: Eine beliebige Kugel, die durch drei Ecken des Tetraeders geht, schneidet die durch die vierte Ecke gehenden Kanten in den Ecken eines Dreiecks, das beständig einem anderen Dreiecke ähnlich ist, welches die Producte der Gegenkanten $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ zu Seiten hat. Lp.

R. Hoppe. Relation der Flächenwinkel des Tetraeders. Hoppe Arch. (2) X. 102-110.

R. Hoppe. Maximum der Ecken eines Tetraeders für den Fall ihrer Gleichheit. Hoppe Arch. (2) X. 111-112.

R. Hoppe. Momentane Variation der Eckensumme bei Deformation des regelmässigen Tetraeders. Hoppe Arch. (2) X. 220-221.

Bericht auf S. 289 dieses Bandes.

H. Thieme. Ueber die Bezeichnung „Axe" beim schiefen Kreiskegel. Hoffmann Z. XXII. 173-174.

K. Schober. Ueber die Axen des Kreiskegels. Hoffmann Z. XXII. 492-494.

Gegen die Benennung der Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkte der Basis als „Axe". Lp.

R. Kirchberger. Zur Definition der geraden Pyramide und des geraden Kegels. Hoffmann Z. XXII. 260-262.

„Ein Kegel, dessen Höhe durch den Mittelpunkt der Grundfläche geht, heisst ein senkrechter oder gerader Kegel." Eine senkrechte Pyramide setzt daher eine Grundfläche voraus, die einen Mittelpunkt hat, und kann dann ebenso definirt werden.

Lp.

C. Gusserow. Stereometrische Untersuchungen. Pr. (No. 61) Leibniz-Gymn. Berlin. 20 S. 4°.

In dieser Arbeit werden mehrere Vorschläge gemacht, wie man die Kubatur der von Ebenen begrenzten Körper im Unterricht behandeln kann, wenn man den Satz von Cavalieri vermeiden will. Es wird das schief abgeschnittene dreiseitige Prisma, dann die Pyramide, nachher das Prismatoid berechnet. Von besonderer Anwendung ist hierbei die Methode der Projection. Beim Prismatoid werden die Deckfläche D, die Oberdreiecke, deren Basen in der Deckfläche liegen, und die Unterdreiecke, deren Basen in der Grundfläche G liegen, auf die Grundfläche projicirt. Wenn dann O die Summe der Projectionen der Oberdreiecke, U die der Unterdreiecke bezeichnet, so ist $G = D + O + U$. Ist ferner V das Volumen, h die Höhe des Prismatoids, so hat man $V = \frac{1}{3}h(3D + 2O + U)$, wofür man auch setzen kann $V = \frac{1}{3}h(2D + O + G)$. Ist H der Schnitt des Prismatoids in halber Höhe, so zeigt sich $H = D + \frac{1}{4}U + \frac{3}{4}O$, also $V = \frac{1}{6}h(D + 4H + G)$. Nachher werden noch andere Formeln für das Prismatoid hergeleitet. Es werden Körper betrachtet,

deren Querschnitte inhaltlich durch eine Function zweiten, später auch dritten Grades ihrer Schnitthöhe dargestellt werden. Am Schluss werden auch krummflächig begrenzte Körper besprochen.

Mz.

L. CLIVIO. Nuove formole stereometriche. Il Politecnico. XXXIX. 241-298.

Herr Clivio stellt für den Inhalt eines zwischen zwei parallelen Grundflächen eingeschlossenen Körpers die bekannte Formel auf:

$$V = \frac{d}{6}(M+4P+N),$$

wo d die Höhe, M, N die beiden Grundflächen, P den mittleren Schnitt bedeutet. Er vergleicht ferner diesen Ausdruck mit den gebräuchlichen empirischen Formeln und stellt in einigen Tafeln die in die Resultate dieser letzten Formeln einzuführenden Correctionen zusammen. Es folgt die Anwendung auf die Erd- und Holzmessung.

Vi.

A. BOGUSLAVSKI. Uebertragung eines Satzes von Pappus auf Volumina. Phys. Sect. d. Mosk. Ges. d. Fr. d. Naturw. B. W. H. 1. 1891. (Russisch.)

Construirt man ein Prisma auf der Grundfläche einer Pyramide und auf den Seitenflächen der letzteren andere Prismen, deren obere Grundflächen durch die bezüglichen Kanten der oberen Grundfläche des ersten Prismas hindurchgehen, so ist das Volumen des ersten Prismas gleich der Summe der Volumina der auf den Seitenflächen der Pyramide construirten Prismen.

Si.

H. BENSEMANN. Ueber die Berechnung des Volumens der Kugel und verwandter Körper. Hoffmann Z. XXII. 170-173, 258-260.

O. SCHLÖMILCH. Ueber die Kubatur der Kugel und verwandter Körper. Hoffmann Z. XXII. 257-258.

F. Kosch. Zu dem Artikel von Bensemann. Hoffmann Z. XXII. 338-340, 425.

Durch Anwendung der Summen der Potenzen der ganzen Zahlen anstatt der Integration oder durch die Simpson'sche Regel, wie bekannt. Lp.

A. von Frank. Berechnung des Rauminhalts eines Fasses. Hoffmann Z. XXII. 333-336.

Die Berechnung geschieht unter der Annahme, dass die Dauben eine parabolische Krümmung besitzen und der Körper als Rotationskörper behandelt werden könne. Lp.

M. Zwerger. Den Schwerpunkt einer homogenen Kugelzone auf elementarem Wege zu bestimmen. Hoffmann Z. XXII. 336-338.

Eine Abänderung des gewöhnlichen Verfahrens zur Vereinfachung der Rechnung. Lp.

Ant. Jerábek. Ueber die Bestimmung des regelmässigen Ikosaëders, wenn die Relationen beim regelmässigen Fünfeck nicht bekannt sind. Casop. XX. 202. (Böhmisch.)

Bietet eine rein geometrische Ableitung der bekannten Formeln. Std.

I. Arnold, G. B. M. Zerr. Solution of question 10981. Ed. Times LV. 177.

Das Volumen des regelmässigen Ikosaeders ist gleich dem Producte aus dem Inhalte eines Fünfecks desselben und $\frac{1}{3}$ des Durchmessers der umgeschriebenen Kugel. Lp.

H. M. Jeffrey. On certain analogous properties of the circumscribed and inscribed quadrilateral and pentahedron. Quart. J. XXV. 336-347.

Die im Titel erwähnten Eigenschaften sind metrische Relationen, in welchen Strecken, Flächen und trigonometrische Functionen von Winkeln enthalten sind, die entweder auf ein planes bezw. sphärisches Tangenten-Viereck oder auf Kugeln Bezug nehmen, die von vier oder fünf Ebenen berührt werden.

Scht.

W. Fischer. Erweiterung des Satzes von der Sichel des Archimedes und Verbindung desselben mit dem Satze von den Möndchen des Hippokrates; Schwerpunkte, Rotationskörper. Pr. (No. 442) Gymn. Kempen a. Rh. 25 S. 4°. (1 Fig.-Taf.)

Zeichnet man bei einem rechtwinkligen Dreiecke über der Hypotenuse den Halbkreis, der durch die Ecke des rechten Winkels geht, und über den Abschnitten, welche die Höhe zur Hypotenuse auf der letzteren bestimmt, Halbkreise, die in die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks hineingehen, so schliessen diese drei Halbkreise die sogenannte Sichel des Archimedes ein, deren Inhalt gleich dem des über der Höhe zur Hypotenuse als Durchmesser beschriebenen Kreises ist. Mit dieser Sichel und den allgemein bekannten Möndchen des Hippokrates, die an derselben Figur construirt werden können, beschäftigt sich die an mannigfachen Resultaten reiche Schrift; in Betreff der einzelnen Ergebnisse muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Mz.

V. Martinetti. Sulla projezione stereografica e sulla risoluzione dei triangoli sferici ed angoli triedri. I, II. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 830-839, 976-980.

Auf einer Kugel von dem Radius r und dem Mittelpunkte C_1 sei C der Pol der stereographischen Projection und die Ebene π, wie üblich, durch C_1 gelegt; ein Kreis Ω der Kugel ist dann einmal festgelegt durch die Spur s seiner Ebene in π und die Fluchtlinie q' dieser Ebene für den Augenpunkt C; andererseits natürlich durch sein Abbild Ω'. Ist Δ der in π liegende grösste Kreis der Kugel und Π' der in der Inversion Ω' entsprechende Kreis

mit dem Centrum C_1 und der Potenz $-r^2$, so ist s' die Radicallinie für Ω' und Δ, q' die Radicallinie für Ω' und Π'. Ein Kugelkreis wird nun nach Auffindung von s und q' als gegeben betrachtet. In dieser Art werden u. a. die Aufgaben gelöst, einen Kreis zu finden, der einen gegebenen sphärischen Mittelpunkt hat und einen gegebenen Punkt enthält; einen grössten Kreis festzulegen, von dem die Bilder zweier Punkte gegeben sind; die grössten Kreise zu finden, welche mit einem gegebenen einen Punkt gemein haben und ihn unter gegebenem Winkel schneiden. Als Hauptanwendung wird nachher die Bestimmung eines sphärischen Dreieckes aus drei Bestimmungsstücken behandelt.

E. K.

C. Juel. Et geometrisk Bevis for Viviani's Theorem. Nyt Tidss. for Math. II. 6-8.

Mittels elementarer Betrachtungen wird der folgende Satz bewiesen, aus dem Viviani's Theorem folgt:

Gegeben sind drei auf einander senkrechte Radien OA, OB, OC. Ueber OA als Durchmesser wird ein Halbkreis in dem Winkelraum AOB beschrieben, und über diesem Halbkreis als Leitcurve mit den Erzeugenden parallel zu OC (der senkrechten Richtung) wird ein Cylinder construirt, welcher den Kugeloctanten ABC in einer Raumcurve schneidet. Wird nun durch C ein willkürlicher Hauptkreis gelegt, welcher den Hauptkreis AB in N schneidet, so ist das Areal auf dem Kugeloctanten, welches von einem Teil der Raumcurve und dem erstgenannten Hauptkreis begrenzt wird, doppelt so gross wie der Kreisabschnitt BN.

V.

E. Carvallo. Sur une généralisation du théorème des projections. Nouv. Ann. (3) X. 345-347.

„Wenn zwei Strecken A und B die Resultanten mehrerer anderen Strecken sind, so ist das Product der algebraischen Werte der Strecken A und B und des Cosinus ihres Neigungswinkels gleich der Summe der Producte, welche man erhält, wenn man

je eine Componente der ersten Strecke mit je einer der zweiten und dem Cosinus des Neigungswinkels beider Componenten multiplicirt."

Der Verf. macht darauf aufmerksam, dass dieser Satz der Mechanik auch in der analytischen Geometrie und in der Trigonometrie mit Vorteil verwendet werden kann, was er an Beispielen aus diesen beiden Disciplinen zeigt. F.

Capitel 4.
Darstellende Geometrie.

M. Pieri. Geometria proiettiva. Lezioni per gli allievi dell'Accademia Militare. Torino. Tip. Candelotti. 372 S. 8°.

Die neuere Geometrie bietet eine so wirksame Hülfe bei der Untersuchung der graphischen Constructionen, sie dient so trefflich zur Entwickelung der Raumanschauung, dass sie, während sie von den Gelehrten ihres inneren Wertes wegen hochgeschätzt wird, in der Praxis als ein vortreffliches Vorstudium für die darstellende Geometrie angesehen wird. Zu diesem Zwecke wurde sie in den Unterrichtsplan der italienischen Kriegs-Akademie (derjenigen Schule, welche die Artillerie- und Genie-Officiere vorbereiten soll) eingeführt; dieser Einführung verdankt das Buch, auf welches wir die Aufmerksamkeit der Leser des Jahrbuchs lenken wollen, seine Entstehung.

Die bescheidenen Ziele des mathematischen Unterrichtes an der Kriegs-Akademie erlaubten dem Verfasser nicht, die Grenzen eines ersten Studiums zu überschreiten (insbesondere hat er fast ohne Ausnahme die Raumbetrachtungen ausgeschlossen); aber durch eine glückliche Wahl der behandelten Gegenstände, eine sorgfältige Ausdrucksweise, sowie eine geschickte Auslese der aufgelösten und vorgelegten Aufgaben hat er es verstanden, das Interesse der Schüler anzureizen, ohne die Strenge der Beweise zu vergessen.

Die sechzehn Capitel, aus denen das Pieri'sche Werk besteht, behandeln der Reihe nach: I. Die Grundbegriffe. II. Das Zeichenprincip. III. Die anharmonischen und insbesondere die harmonischen Verhältnisse. IV-V. Die Homographie im binären Gebiete. VI. Die Involution. VII. Die Aufgaben zweiten Grades. VIII. Das Dualitätsgesetz. IX-X. Die Homologie. XI. bis XIII. Die Kegelschnitte. XIV. Die Sätze von Desargues und Sturm. XV. Die Polarentheorie. XVI. Mittelpunkt, Durchmesser und Axen eines Kegelschnittes.

Unter den lobenswerten Punkten bemerken wir nur, der Kürze halber, die Behandlung der unendlich-fernen Elemente nach der Methode des Herrn Pasch (m. vgl., was wir in F. d. M. XX. 1888. 578 geschrieben haben); den Beweis des Reciprocitätsgesetzes mindestens in dem Falle, wenn es auf einen Satz angewandt wird, von dem man einen projectiven Beweis kennt; endlich die Aufstellung einiger Haupttypen von Aufgaben zweiten Grades.

Der Verf. bedient sich der Benennungsweise, welche er in seiner Uebersetzung der Geometrie der Lage von Staudt gebraucht hat (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 592ff.); ferner hat er einige neue Namen eingeführt, welche uns nützlich scheinen und daher hier angeführt werden sollen. Sind p, q, r, ... und p', q', r', ... projective Strahlenbüschel, so werden die Punkte wie pq' und $p'q$ „associirt“ genannt; zwei projective und conjective Punktreihen werden „direct“ oder „invers“ projectiv genannt, je nachdem sie einstimmig oder ungleichstimmig sind. Hat eine Homologie sowohl den Mittelpunkt als die Axe unendlich fern, so besitzt sie die Eigenschaft, dass zwei entsprechende Gebilde durch eine bestimmte Translation in einander übergeführt werden können: daher heisst eine solche Verwandtschaft „Aequipollenz“.

Es kann vielleicht Wunder nehmen, dass man in den in Rede stehenden Vorlesungen keine Spur von den Focaleigenschaften der Kegelschnitte findet. Die Ursache dieser Weglassung dürfte darin liegen, dass die Vorlesungen mit der Bestimmung der kanonischen Gleichungen der Kegelschnitte in cartesischen Coordinaten enden; daher wird der Leser bis an die Thüre der ana-

lytischen Geometrie geführt, wo die genannten Eigenschaften viel leichter als durch die Mittel der projectiven Geometrie ihre Begründung finden. La.

J. KUGLMAYR. Die Projectionslehre. Mit besonderer Berücksichtigung des Bau- und Maschinenfaches. Für den Gebrauch an Bau- und Maschinen-Gewerbeschulen. Wien. Spielhagen und Schurich. 1891. VIII u. 168 S. 8°. Mit einem Atlas von 51 lithogr. Tafeln. Fol.

Das Buch behandelt die Projectionslehre in dem gewöhnlichen Umfange mit besonderer Berücksichtigung des Vorkommens der verschiedenen Flächen- und Körperformen in der technischen Praxis. Die theoretischen Erläuterungen werden kurz und klar unter Zuhülfenahme von cavalierperspectivischen Verbildlichungen gegeben. Bei den praktischen Anwendungen beschränkt sich der Text vielfach auf andeutende Erläuterungen der Figurentafeln. In diesem mit grosser Sachkenntnis und constructivem Geschick zusammengestellten praktischen Uebungsstoff, der sich auf die Kunst- und Werkformen aller Gebiete der Technik erstreckt und eine Fülle der interessantesten und lehrreichsten Motive darbietet, ruht der Schwerpunkt und der besondere Wert des Werkes. — Das Hauptgewicht des Unterrichts in der Projectionslehre wird immer in die Constructionsübungen zu legen sein, und auch da, wo mehr auf die theoretische Seite des Lehrfaches Bedacht genommen wird, wird es sich stets als lohnend erweisen, den theoretischen Aufgaben auch solche aus der Praxis zu untermischen. Unter den dem Referenten bekannten, in ähnlichem Sinne gehaltenen Büchern bietet das vorliegende die reichhaltigste Auswahl hierfür. Hk.

J. HOCH. Katechismus der Projectionslehre. Mit einem Anhange enthaltend die Elemente der Perspective. Leipzig 1891. J. J. Weber. VIII u. 131 S. Mit 100 Abbildungen im Text. Kl. 8°.

Das in der bekannten Art der Katechismen abgefasste Büch-

lein beschränkt sich für die Zwecke des Handwerkers auf die Darstellung der einfachsten Körper nebst deren ebenen Schnitten und Durchdringungen, ferner die Elemente der Schattenlehre, Centralperspective und Cavalierperspective, ohne Anspruch auf wissenschaftliche Bedeutung zu machen. In den Nummern 83, 113, 140, 159 erscheinen Verbesserungen angezeigt. Hk.

A. Stuhlmann. Zirkelzeichnen. Zum Gebrauche an Gewerbeschulen, Schulen für Bauhandwerker und polytechnischen Vorbildungsanstalten. Allgemeiner Teil. 13. Aufl. Dresden 1891. G. Kühtmann. 11 u. XV S. Mit 18 lithogr. Tafeln. 12°.

Das Büchlein giebt den Stoff für den Unterricht im gebundenen Zeichnen an Handwerkerschulen, der auf das Fachzeichnen, bezw. auf die darstellende Geometrie vorbereiten soll. Dieser Stoff erstreckt sich auf ebene Flächenornamente, planimetrische Constructionsaufgaben, Kegelschnitte, Grundschatten, parallelprojectivische Darstellung einfacher Körper. Die letztere wird durch Aufmessen und Aufreissen der betreffenden Objecte, die dem Schüler als Modelle in die Hand gegeben werden, auf Grund directer Anschauung bewirkt. Diese von der Anschauung ausgehende Lehrmethode, von Herrn O. Jessen 1858 in Hamburg eingeführt, hat sich ebenso wie das ihr dienende vorliegende Büchlein (1. Aufl. 1869) während einer langen Reihe von Jahren aufs beste bewährt. Hk.

J. Vonderlinn. Lehrbuch des Projectionszeichnens. Dritter Teil. Zweite Hälfte. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart 1892. J. Maier. VIII u. 235 S. Mit 210 Figuren im Text. Gr. 8°.

Die vorliegende Lieferung enthält die ebene Collineation, die Kegelschnitte als Kreisprojectionen, die Axonometrie und die räumliche Centralcollineation. Ref. kann der unter dem Banne der Sonderbarkeiten des Systems Kleyer stehenden Darstellung

keinen Beifall zollen. Die Entwickelung des Lehrganges zeigt Verzwicktheiten, deren Einzelbesprechung der Raummangel verbietet. Hk.

J. F. Heller. Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Darstellenden Geometrie für Realschulen. I. Teil. Für die fünfte Klasse. Wien 1892. A. Hölder. VIII u. 116 S. 8°. Mit 4 Figurentafeln.

Das Werk schliesst sich dem für österreichische Realschulen vorgeschriebenen Lehrplan an und ist auf drei Teile, bestimmt für die Klassen V, VI, VII, berechnet. Der vorliegende erste Teil befasst sich mit der Darstellung und gegenseitigen Lage von Punkten, Geraden und Ebenen, mit Strecken und Winkelgrössen, Transformation, Drehung um eine Axe, Polygonen, elementaren Schattenconstructionen. Die Fragen und Aufgaben bezwecken erstens: durch ihre geschickte Fassung und logische Folge die fraglichen Begriffe und Constructionen aus dem Schüler selbst herauszulocken, so dass dieser selbstthätig das hervorbringt, was er lernen soll. Zweitens liefern sie den nötigen Stoff zur weiteren Anwendung und Einübung der Fundamentalconstructionen. Die bei den einzelnen Uebungsaufgaben gegebenen Elemente sind teils durch Angabe ihrer Coordinaten, teils durch Aufzeichnung ihrer Lage in den Figurentafeln bestimmt. Das Buch, dem Ref. einen hohen didaktischen Wert beimisst, mag angelegentlichst empfohlen werden. Hk.

A. Brill. Projectionslehre an dem Gymnasium, ein Glied des Reformwerkes. Allg. Ztg. vom 27. Jan. 1891, Beilage. (Sonderabdruck. 5 S. 8°.)

Der Aufsatz begründet die Forderung der Einführung des Unterrichts in der Projectionslehre an den Gymnasien. Nur durch ihn kann der notorische leidige Mangel an räumlichem Anschauungsvermögen gehoben werden. Letzteres bildet eine unerlässliche Grundlage für den späteren Beruf fast der Hälfte der Abiturienten, und auch für die übrigen hat jener Unterricht einen hohen Bildungswert. „Er übt das Anschauungsvermögen, erfüllt

den Schüler mit Befriedigung, weil er etwas unter seinen Händen entstehen sieht, weckt den Sinn für Nettigkeit und Eleganz der Darstellung und bildet ein technisches Geschick aus, dessen man heutzutage in so vielen Lebenslagen bedarf." Der Freihandzeichenunterricht kann die Anerziehung einer bewussten räumlichen Vorstellung nicht leisten; diese ist eine Art geometrischer Thätigkeit, die eine gewisse Reife, das Lebensalter der Oberklassen erfordert; der bezügliche Unterricht muss in die Hand des Mathematikers gelegt werden. — Die parallelperspectivischen Darstellungen lassen sich leicht neben dem Unterricht in der Stereometrie behandeln. Der Curs in der eigentlichen Projectionslehre müsste mit geometrischen Constructionsübungen beginnen, die sich mit Kreisteilung, geometrischen Flächenornamenten, Kegelschnittconstructionen u. s. w. befassen. Hierauf würde die Darstellung in Grund- und Aufriss von Punkt, Ebene und Gerade, von einfachen Polyedern und Krystallformen, Cylinder, Kegel u. s. w., verbunden mit cavalierperspectivischen Abbildungen folgen. Uebrigens kann der Lehrgang an einer beliebigen Stelle abgebrochen werden ohne Beeinträchtigung des Vorangegangenen. Dieser Unterricht wird als Gegengewicht gegen die abstracten Lehrfächer wohlthätig wirken und kaum als Mehrbelastung empfunden werden. Die Zeit dafür (etwa wöchentlich 2 Stunden durch 2 bis 3 Jahre in den oberen Klassen) muss beschafft werden, und wäre es teilweise selbst auf Kosten des mathematischen- oder des Zeichenunterrichts. Hk.

S. Vecchi. La teoria geometrica attuale delle restituzioni prospettive riveduta e corretta. Memoria sulle impressioni diverse che producono le prospettive e i bassorilievi quando venga a cambiare la posizione del punto da cui si guardano. Parma. Tip. Rossi-Ubaldi. (1885.) 63 S.

S. Vecchi. Teoria geometrica delle restituzioni prospettive per imagini date sopra superficie curve. Parma. Tip. Rossi-Ubaldi. (1891.) 11 S.

S. Vecchi. **Teoria geometrica delle prospettive in rilievo sopra le superficie curve.** Parma. Tip. Rossi - Ubaldi. (1891.) 11 S.

Sind bei der Methode der Centralprojection Projections-Centrum und -Ebene gegeben, so sind die Projectionen einer geraden Linie und jedes ihrer Punkte bestimmt; sind umgekehrt die Spur und der Fluchtpunkt einer Geraden gegeben, so kann man die Gerade selbst und denjenigen ihrer Punkte bestimmen, welcher eine gegebene Projection hat. Verändert man das Projectionscentrum, so entspricht eine Gerade der Projectionsebene und ein Punkt auf ihr verschiedenen Geraden und Punkten der Ebene: die Bestimmung dieser Punkte und Geraden ist der vom Verf. angegebene Zweck der Aufgabe der „perspectivischen Restitutionen“.

In der ersten der Abhandlungen, denen der vorliegende Bericht gewidmet ist, löst der Verf. diese Aufgabe, indem er die Theorie der Centralprojection anwendet, wie Hr. Fiedler sie entwickelt hat, und er schliesst mit folgendem Satze: Zwischen zwei Restitutionen derselben Figur, welche zu zwei verschiedenen Projectionscentren C und C^* gehören, finden die folgenden Beziehungen statt: 1) Zwei entsprechende Geraden oder Ebenen schneiden sich auf der Projectionsebene. 2) Die Verbindungslinie zweier entsprechenden Punkte ist zu CC^* parallel. Die Figuren sind daher affin in Bezug auf die Projectionsebene als Affinitätsebene. — Nach einigen einfachen Anwendungen der allgemeinen Theorie merkt der Verf. einige Versehen an, welche in einigen Werken über Perspective (La Gournerie, Chevillard, Suini) enthalten sind und die Restitutionen betreffen. — Er beschäftigt sich danach mit der (im allgemeinen unbestimmten) umgekehrten Aufgabe der Perspective, insbesondere mit den Fällen, in denen dieselbe bestimmt wird, und zieht daraus die Erklärung einiger Erscheinungen, welche die Gemälde darbieten. Endlich behandelt er die Restitutionen der Reliefperspective und erforscht die geometrischen Beziehungen, welche zwei solche Restitutionen verbinden.

Die Aufgabe der perspectivischen Restitution kann verallgemeinert werden: man kann nämlich voraussetzen, dass das Bild,

statt auf einer Ebene, auf einer beliebigen Fläche gegeben sei. Diese verallgemeinerte Aufgabe wird vom Verf. am Ende seiner ersten Abhandlung ausgesprochen, in der zweiten aber studirt. Da indessen die Erörterung sehr verwickelt ist, falls die Bildfläche ganz beliebig ist, so setzt der Verf. voraus, dass diese eine Kugel- oder Kegelfläche sei.

Auch die Homologie im Raume ist einer weiteren Verallgemeinerung fähig, da man voraussetzen kann, dass die Ordnungsfläche nicht eben, sondern beliebig sei. Nachdem der Verf. in seiner dritten Abhandlung die Theorie dieser „allgemeinen Homologie" berührt hat, behandelt er eingehend den Fall, in welchem die Ordnungsfläche eine Kugelfläche ist. — Endlich beschäftigt er sich mit der folgenden weiteren Verallgemeinerung der Homologie: Sind ein Punkt C und sechs beliebige Flächen μ, ν, α, μ', ν', α' gegeben, ist ferner B ein beliebiger Punkt des Raumes, sind endlich M, N, A, M', N', A' die Treffpunkte von BC mit den gegebenen Flächen, so bestimme man auf BC einen Punkt B' so, dass $MNAB \overline{\wedge} M'N'A'B'$ sei: B' soll als dem B entsprechend angesehen werden. Wir können die Bemerkung nicht unterdrücken, dass diese leicht zu ersinnenden und schwerlich neuen Verallgemeinerungen nur von geringem theoretischen Werte scheinen; wir glauben auch kaum, dass sie in der Praxis irgend welche wichtigen Anwendungen haben können. La.

G. Hauck. Ueber den Begriff der Projection einer geraden Linie. Schloemilch Z. XXXVI. 379-381.

Der Verfasser entwickelt die Gründe, warum von den beiden folgenden Definitionen für die Projection (Central- oder Parallelprojection) einer geraden Linie die zweite vor der ersten den Vorzug verdient:

1) Die Projection einer Geraden ist die Gesamtheit der Projectionen aller ihrer Punkte.

2) Die Projection einer Geraden ist die Schnittlinie der durch die Gerade gelegten projicirenden Ebene mit der Projectionsebene. Scht.

M. PELÍŠEK. Perspectivische Studien. Prag. Ber. 1890. 175-214.

Unter Bezugnahme auf die Referate über vier Arbeiten des Verfassers in F. d. M. XVIII. 1886. 502ff. setzt dieser das Verhältnis der von ihm vertretenen Ansichten zu denen der anderen Schriftsteller über denselben Gegenstand auseinander, von denen er einige bei der Abfassung jener Abhandlungen nicht gekannt hatte. Die Knappheit des Raumes gestattet nicht, auf den zum Teil polemischen Inhalt näher einzugehen, und hieraus möge dem Jahrbuche keine Anschuldigung des Mangels an Interesse entstehen, wie der Verf. ohne wirklichen Grund dem früheren Referenten unzulängliches Eingehen auf den Inhalt und wenig Wohlwollen vorwirft. Lp.

W. FIEDLER. Geometrische Mitteilungen. XII. Metrisch specielle Kegel zweiten Grades in Centralprojection. Wolf Z. XXXVI. 65-87. (Mit 1 Fig. im Text.)

Verf. bespricht im ersten Teil der Abhandlung den sogenannten orthogonalen Kegel und dessen Polarkegel, indem er, anschliessend an frühere bezügliche Arbeiten, zeigt, dass die centralprojectivische Darstellung das geeignetste Mittel bietet, um die verschiedenen (hauptsächlich von Steiner, Chasles und dem Verf. selbst aufgestellten) Eigenschaften dieser Gebilde zu begründen und anschaulich vor Augen zu führen. Der zweite Teil enthält Betrachtungen über das Verhältnis zwischen projectivischer Geometrie und darstellender Geometrie, die sich unter Hinweis auf frühere Arbeiten des Verf., namentlich auf die Lehre von den projectivischen Coordinaten nebst den aus ihnen fliessenden speciellen Formen der Coordinatenbestimmung, auf die darstellend geometrische Theorie der Raumcurven vierter Ordnung erster Art und auf die geometrische Bewegungs- und Kräftelehre beziehen. Hk.

W. FIEDLER. Geometrische Mitteilungen. XIII. Ueber die Durchdringungen perspectivischer Kegel. Wolf Z. XXXVI. 87-113. (Mit 1 Fig. im Text.)

Verf. behandelt die Construction der Durchdringungscurve nebst Tangentenfläche zweier perspectivischen Kegel (d. h. zweier Kegel mit gemeinschaftlicher ebener Leitcurve), mit specieller Anwendung auf Kegel dritter Ordnung, indem er die hierbei zu Tage tretenden vielseitigen Beziehungen des darstellend-geometrischen Problems zu Fragen von allgemeinem Interesse ins Licht setzt, wie er dies zum Teil bereits in seiner „Darstellenden Geometrie“ ausgeführt hat. Der Aufsatz giebt eine schöne, übersichtliche Zusammenfassung von verschiedenen Einzelbetrachtungen, die sich in jenem Werke zerstreut finden, unter dem einheitlichen Gesichtspunkte der Würdigung des Wertes der darstellend-geometrischen Methode. U. a. findet die nahe Beziehung des Durchdringungsproblems zu der allgemeinen Polarentheorie, ferner der involutorische Zusammenhang von drei Kegeln mit paarweise gemeinsamen ebenen Leitcurven eine überaus durchsichtige Klarlegung. Hk.

F. RUTH. Ueber einen neuen Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der klinogonalen Axonometrie. Wien. Ber. C. 1088-1092.

Der vorliegende einfache Beweis beruht auf dem folgenden Satze: Irgend eine Ellipse und ein beliebiger Punkt in ihrer Ebene können stets als Parallelprojection von Basis und Spitze eines beliebigen geraden Kreiskegels und insbesondere eines gleichseitigen (d. i. eines solchen, der unendlich viele Tripel von zu einander senkrechten Erzeugenden hat) betrachtet werden.

Hk.

G. KOHN. Notiz über den Schnitt eines räumlichen vollständigen Fünfecks mit einer Geraden. Monatsh. f. Math. II. 141-142.

Unter den 10 Schnittpunkten, welche die 10 Seitenflächen eines vollständigen Fünfecks mit einer beliebigen Geraden bestimmen, giebt es 5-mal 6 Punkte in Involution; die 5 Paare

von Doppelpunkten dieser 5 Involutionen sind selbst wieder 5 Paare für eine und dieselbe Involution auf der Geraden.

Hk.

F. J. M. Solution de l'épure de géométrie descriptive donnée à l'École Centrale en 1890 (1re session). Nouv. Ann. (3) X. 33-36. (Mit 1 Fig. im Text.)

Constructive Ausführung der Durchdringung zweier orthogonalen Kegel in gegebener Lage mit parallelen Grundkreisen.

Hk.

J. Neuberg. Sur les projections et contreprojections d'un triangle fixe et sur le système de trois figures directement semblables. Belg. Mém. C. in 8°. XLIV. XVI + 87 S.

Vergl. F. d. M. XXI. 588. 1889. Der Abhandlung des Hrn. Neuberg geht ein eingehendes Vorwort vorauf, das die hauptsächlichsten in ihr enthaltenen Ergebnisse hervorhebt.

Mn. (Lp.)

C. A. Laisant. Sur la perspective d'une figure plane. J. de Math. élém. (3) V. 151-153.

Es sei $A'B'C'M'$ eine Centralprojection von $ABCM$. Durch Berechnung der Schwerpunktscoordinaten von M' in Bezug auf $A'B'C'$ aus denen von M in Bezug auf ABC wird die Aufgabe gelöst: Durch einen Punkt M innerhalb eines Dreikants eine Ebene so zu legen, dass M der Schwerpunkt der Schnittfigur wird.

Lg.

A. Mallock. Photographic perspective and the use of enlargement. Nature XLIII. 517-518.

Besprechung des Einflusses der Lage des Augpunktes für den Eindruck eines perspectivischen Bildes und Anwendung dieser Ueberlegungen auf die Beurteilung der photographischen Bilder.

Lp.

S. Ravier. Intersection d'une droite avec un hyperboloïde de révolution. Nouv. Ann. (3) X. 29-33. (Mit 2 Figuren im Text.)

Die Aufgabe wird zurückgeführt auf den Schnitt der gegebenen Geraden mit einem Kegel, dessen Leitcurve mit dem Kehlkreis perspectivisch ist. Hk.

Jos. Navotný. Directe Construction der Spur einer Ebene, die von den Projectionsebenen π, ν um α, β abweicht. Casop. XX. 308. (Böhmisch.)

Enthält die kürzeste Lösung einer einfachen Aufgabe der descriptiven Geometrie. Std.

Flor. Pohl. Grundregeln der Perspective, der Anschauung entlehnt. Casop. XX. 38. (Böhmisch.)

Enthält eine kurzgefasste Belehrung über die Postulate der diesbezüglichen Instruction (II. Aufl. 269), welche lautet: „Vor dem Zeichnen nach den geometrischen Gebilden im Raume sind die betreffenden Grundsätze und Regeln aus der Linealperspective mit Benutzung von Anschauungsapparaten vorzunehmen."
Std.

Flor. Pohl. Centralprojection der Kugel. Casop. XX. 33. (Böhmisch.)

Liefert Bemerkungen über die Schulbehandlung dieser Aufgabe mit Bezugnahme auf Guido Schreiber's „Lehrbuch der Perspective". Std.

Weitere Litteratur.

Ch. Brisse. Cours de géométrie descriptive. Ire Partie, à l'usage des élèves de la classe de mathématiques élémentaires. IIe Partie, à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Ch. Brisse. Cours de géométrie descriptive, à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Baudran. Intersection d'une droite et d'un hyperboloïde de révolution. J. de Math. spéc. (3) V. 133-134.

J. Mascart. Construire un paraboloïde connaissant l'axe et quatre points. J. de Math. spéc. (3) V. 241-244.

W. Fischer. Netze zur Herstellung geometrischer Körper für das perspectivische und projectivische Zeichnen. Dresden. A. Köhler, Verlagsanst. 39 Taf. auf Carton. Quer gr. Fol.

G. Grzybowski. Anfangsgründe über die windschiefen Flächen. Ein Beitrag zum Unterrichte der darstellenden Geometrie an der Realschule. Pr. Tarnopol 1887/88. 3-16, 1888/89. 3-8, 1889/90. (Vom windschiefen Cylinder.) 3-10. (Polnisch.)

G. Grzybowski. Ueber die Berührungen der windschiefen scharfen Schraubenfläche. Pr. Tarnopol. 1890/91. 3-8. (Polnisch.)

Hertter. Die elementar-mathematische Grundlage der Linear- oder Malerperspective. (Sonderdr.) Tübingen. Fr. Fues. 22 S. 8°.

M. Rembacz. Darstellende Geometrie als Unterrichtsgegenstand in den Realschulen. Lemberg 1891. Muzeum. VII. 96-102. (Polnisch.)

K. Schober. Ueber die Construction der Halbschattengrenzen der Flächen 2. Grades unter Voraussetzung von Kugelbeleuchtung. Innsbruck. Wagner'sche Univ.-Buchh. 40 S. mit 2 Taf.

S. Tamburini. Guida pratica di disegno geometrico. Milano. A. Vallardi. [Periodico di Mat. VI. 165.]

———

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

A. Sannia. Lezioni di geometria proiettiva dettate nella R. Università di Napoli. Napoli. Pellerano. 613 S. 8°.

Der Beweggrund zur Veröffentlichung der Vorlesungen, über die wir zu berichten haben, ist in dem Wunsche zu finden, die Lücke auszufüllen, welche in der mathematischen Litteratur entstanden ist, seitdem die italienische Ausgabe und die französische Uebersetzung der „Elementi di geometria projettiva“ von L. Cremona vergriffen sind. Als der Verf. sich zu dieser Veröffentlichung entschloss, hatte er die ganze Handschrift des Werkes fertig; nach derselben hatte ja einer seiner älteren Schüler (Hr. Torelli) im Jahre 1885 bereits eine Skizze desselben dem mathematischen Publicum vorlegen können. Es scheint jedoch, dass, indem er die verschiedenen Teile seines Buches einer letzten Revision unterzog, vielleicht indem er die neueren verwandten Bücher studirte, er grosse Veränderungen und Vermehrungen bewirkt hat. Als er nämlich nach einer sechsjährigen unablässigen Arbeit den Druck zu Ende geführt hatte, besass man ein von dem erwarteten ganz verschiedenes Werk; ein Werk, welches zwar Vortreffliches und Originelles in Fülle bietet, aber von dem didaktischen Standpunkte aus den Erwartungen nicht ganz entspricht, welche man nach dem Ruhme des Verf. als Lehrer hegte. Der Verf. selbst erkannte die Notwendigkeit einer Umarbeitung des ganzen Lehrbuches an und war bereit, dieselbe in einer zweiten Auflage zu bewerkstelligen (die erste war bald nach ihrer Beendigung vergriffen), als ein plötzlicher unerwarteter Tod diese Absicht vereitelte. Wir sind also in einer schwierigen Lage, wenn wir über diese „Lezioni“ urteilen sollen, da sie in keiner Weise als ein treuer Spiegel der endgültigen Ideen des Verfassers angesehen werden können. Daher beschränken wir

uns auf die allgemeine Bemerkung, dass die nicht immer befriedigende Verteilung des Stoffes (welche gewiss in den während des Druckes hinzugekommenen Zusätzen ihren Ursprung hat) und die zu kleine Zahl von Abschnitten (die zwei letzten enthalten zwei Drittel des ganzen Werkes) die Lectüre des Buches schwieriger machen, als man nach dem Thema und dem Stile des Verfassers erwarten könnte. Wir wollen jetzt das ganze Werk durchgehen und dabei die Punkte anmerken, in denen es sich von denjenigen unterscheidet, welche denselben Zweck verfolgen.

§ I. „Erklärungen". Nach einigen allgemeinen Betrachtungen über die Gebilde, welche in der projectiven Geometrie als erzeugende Elemente angesehen werden, setzt der Verf. die Bezeichnungen auseinander, welche er brauchen will, erklärt dann die Grundoperationen der projectiven Geometrie (Projiciren und Schneiden) und lehrt die Theorie der unendlich fernen Elemente, wie sie vor der Erscheinung der Vorlesungen über neuere Geometrie von M. Pasch (Leipzig 1882) allgemein im Gebrauche war.

§ II. „n-Ecke und n-Seite in der Ebene; n-kantige und n-flächige Winkel; n-Ecke und n-Flache im Raume". Ausser den Erklärungen, welche sich auf die in der Ueberschrift gekennzeichneten Gebilde beziehen, lernt man aus diesem Paragraphen die wichtigsten Eigenschaften der ebenen und räumlichen Homologie.

§ III. „Geometrische Grundgebilde".

§ IV. „Harmonische Grundgebilde". Durch die rein geometrische Methode, welche Staudt in seiner Geometrie der Lage gelehrt hat, beweist der Verf. die Grundeigenschaften der harmonischen Gruppen und macht ferner auf die besonderen harmonischen Punkt- und Strahlenquadrupel aufmerksam, welche die metrische Geometrie darbietet.

§ V. „Projectivität der geometrischen Grundgebilde". Zwei gleichartige Grundgebilde sind „projectiv", wenn das eine aus dem anderen durch eine endliche Zahl von Projectionen und Sectionen abgeleitet werden kann. Auf Grund dieser Erklärung

beweist der Verf. rein geometrisch die Eigenschaften der Projectivität im binären Gebiete und kommt dadurch zu dem Satze (dem Grundsatze der projectiven Geometrie): „Sind zwei conjective Grundgebilde erster Stufe projectiv und haben sie drei entsprechende Elemente gemein, so sind sie identisch.“ Hieraus wird gefolgert: „Sind zwei geometrische Grundgebilde erster Stufe auf einander eindeutig bezogen, so dass vier harmonische Elemente des einen vier harmonischen Elementen des anderen entsprechen, so sind sie projectiv“, ein Satz, welchen, wie bekannt, Staudt als Erklärung der Projectivität im binären Gebiete annimmt. Diese Methode, die Theorie der Projectivität zu begründen, hat im Vergleich mit derjenigen bei Staudt den nicht zu verachtenden Vorzug, eine nicht zu künstliche Erklärung als Ausgangspunkt zu haben. Ihre Wahl ist daher zu loben; gleiche Anerkennung kann dagegen nicht den zweideutigen Sätzen gezollt werden, in denen ursprünglich (S. 57) von den imaginären Elementen gesprochen wird.

§ VI. „Construction projectiver geometrischer Grundgebilde erster Stufe; besondere Fälle derselben“. Die Ueberschrift dieses Paragraphen bezeichnet genügend seinen Inhalt; wir wollen nur bemerken, dass unter den besonderen Projectivitäten die ausgearteten nicht enthalten sind, diese vielmehr im nächsten Paragraphen (S. 104-106) untersucht werden.

§ VII. „Involutionen der Grundgebilde erster Stufe; Paare imaginärer Elemente“. Die wichtigste besondere Projectivität zwischen zwei conjectiven Grundgebilden erster Stufe ist die umkehrbare oder die Involution; ihre Eigenschaften werden geometrisch entwickelt und angewandt in den ersten Nummern (n. 50-64) des vorliegenden Paragraphen. Nachdem der Verf. das Auftreten derselben in einer beliebigen binären Projectivität klar gemacht hat, setzt er den Gebrauch derselben auseinander zur Definition eines Paars imaginärer Elemente. Diese interessanten Betrachtungen (n. 65-70) sind im Grunde eine Wiederholung der Segre'schen Abhandlung „Le coppie di elementi imaginari nella geometria projettiva sintetica“, deren Wert wir schon ausdrücklich betont haben (F. d. M. XVIII. 1886. 547).

Herr Sannia macht ferner den Leser mit den Grundlagen der Rechnung mit Projectivitäten bekannt, welche Stephanos (Math. Ann. XXIII) zuerst entwickelt und unter anderen Montesano gebraucht hat (Annali di Mat. (2) XIV. 131-140). Von ihr macht er eine Anwendung auf die cyklischen Projectivitäten (vgl. H. Wiener, Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden, Darmstadt 1885). Im letzten Teile des in Rede stehenden Paragraphen (n. 73) werden mit besonderer Rücksicht auf die Segre'sche „Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux“ (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 523) weitere Eigenschaften der binären Projectivitäten entwickelt.

§ VIII. „Dualitätsprincip. Collineare und reciproke Gebilde. Affinität. Homologie“. Nach einer allgemeinen Einleitung über die elementare einfache Bedingung und die verwickelteren Verbindungen, welchen die erzeugenden Elemente des Raumes unterworfen werden können, wird der Ausdruck und der Beweis des Dualitätsprincips gegeben. Indem der Verf. die Folgerungen aus denselben entwickelt, wird er auf die Erforschung der Eigenschaften geführt, welche die Collineationen und die Reciprocitäten in der Ebene und im Raume besitzen. Unter diesen Eigenschaften bemerken wir die folgenden: I. Zwei collineare, aber nicht affine Ebenen können immer in eine solche Lage gebracht werden, dass sie in der Ebene oder im Raume homolog sind. II. Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit zwei collineare Räume in Homologie gebracht werden können, besteht darin, dass zwei entsprechende Punktfelder, deren Träger den Fluchtebenen der zwei Räume parallel gehen, ähnlich sind (vgl. Housel, Nouvelles Annales de Mathématiques 1869; Bellavitis, Atti del R. Istituto Veneto (3) XV. 876-881; Painvin, Nouvelles Annales 1870).

§ IX. „Ueber die Einteilung der Projectivitäten in Arten. Involutorische Collineationen in den Grundgebilden dritter Stufe. Paare von imaginären Geraden zweiter Art. Räumliche Polar- und Nullsysteme.“ Dieser Paragraph ist vielleicht der wichtigste und originellste des ganzen Werkes, aber auch derjenige, bei

welchem die Mitarbeit des Lesers fast unumgänglich ist, um ein wenig Ordnung in die grosse Menge der neuen in ihm enthaltenen Begriffe und Sätze zu bringen.

Das erste behandelte Thema ist die Einteilung der Collineationen im ternären Gebiete in Arten (n. 114-117); der Verf. verbindet mit derselben die Theorie der cyklischen Projectivitäten (vgl. Lüroth in Math. Ann. XIII.), die Sätze (n. 119-120) über die Homologien, welche eine ebene Collineation in sich selbst verwandeln, und später (n. 123) diejenigen, welche die unter einander projectiven Projectivitäten betreffen. Da der Verf. den Gebrauch des Doppelverhältnisses vermeiden will, so muss er etwas an die Stelle derjenigen Doppelverhältnisse setzen, welche in der nicht rein geometrischen Methode Steiner's und Chasles's, zusammen mit den Ordnungspunkten, zur Bestimmung einer Collineation zwischen zwei conjectiven Punktfeldern nötig sind; die neuen Elemente sind die „charakteristischen Gruppen" erster, zweiter und dritter Stufe, deren Definition wir der Kürze wegen unterdrücken. Den ausgearteten Collineationen und Reciprocitäten begegnet man später (n. 131) vor den Untersuchungen über die involutorische Reciprocität der Ebene oder ebene Polarität (n. 132-138) und hinter (n. 146) den charakteristischen Eigenschaften der verschiedenen Arten ebener Reciprocitäten.

Die berührten Untersuchungen haben ihre Analoga im Raume. Um dieselben durchzuführen, fängt der Verf. an mit der Klassificirung der quaternären Collineationen (vgl. Staudt, Beiträge § 35) und erforscht gründlich die sogenannte (Schur, Math. Ann. XIX. 430) „axiale Collineation" wie auch die beiden involutorischen; die eine von diesen ist die harmonische Homologie, während die andere die gescharte Involution ist und nach Staudt auf die Erklärung der imaginären Geraden zweiter Art angewandt werden kann. Zu den bekannten Sätzen über diesen Gegenstand liefert der Verf. einen wichtigen Beitrag, indem er beweist: „Ist eine axiale, nicht involutorische Collineation Ω gegeben, so giebt es immer eine und nur eine gescharte Involution I, welche als Ordnungslinien die Ordnungslinien von Ω hat und Ω in sich selbst verwandelt". I wird „Ordnungsinvolution" (involuzione unita

nach Hrn. Segre) von Ω genannt und kann als Repräsentantin der Axen von Ω angesehen werden, falls Ω keine reelle Axe besitzt. Der Leser wird gewiss die Aehnlichkeit dieser Betrachtungen mit denjenigen bemerken, welche Herr Segre in den ersten der oben angeführten Aufsätze entwickelt hat; sie können selbst als die Weiterführung der Ideen angehen werden, welche am Ende dieser Abhandlung skizzirt werden.

Herr Sannia zählt dann die verschiedenen mit einer endlichen Zahl von Ordnungspunkten versehenen Collineationen auf, bestimmt die Vertauschbarkeitsbedingung zweier räumlichen Projectivitäten; endlich erklärt und benutzt er die charakteristische Gruppe der quaternären Projectivitäten. — Dann wendet er sich zu den involutorischen Correlationen; nach der Theorie der Polarität benutzt er die passende Gelegenheit, welche die Theorie des Nullsystems darbietet, um die Grundlage der synthetischen Liniengeometrie zu entwerfen. Einige wichtige Anwendungen (n. 145-149) der Rechnung mit Projectivitäten schliessen den inhaltvollen Paragraphen.

§ X. „Kegelschnitte und Kegel zweiten Grades. Sätze von Pascal, Brianchon und Desargues.“ In der analytischen Geometrie definirt man zugleich die reellen und die imaginären Kegelschnitte mittels einer Gleichung mit reellen Coefficienten, z. B. zwischen den cartesischen Coordinaten eines Punktes. Die geometrische Definition der Kegelschnitte, welche denselben Vorzug bietet, die reellen und die imaginären Kegelschnitte zusammen durch reelle Elemente zu bestimmen, ist diejenige, welche Staudt vorgeschlagen und Sannia vorgezogen hat, nach welcher ein Kegelschnitt als Ordnungscurve eines Polarystems angesehen wird. Von dieser Erklärung ausgehend und die schon entwickelte Theorie der ebenen Polarität benutzend, beweist der Verf. die vornehmsten Eigenschaften der genannten Curven. Er bedient sich vorzüglich der Rechnung mit Projectivitäten, deren Anwendungsfähigkeit er so mit neuen Beispielen belegt, und entwickelt dadurch alle projectiven und metrischen Sätze, welche einen einzigen Kegelschnitt oder die Kegelschnitts-Büschel oder -Scharen betreffen. Die Lezioni schliessen mit den Sätzen, welche sich

auf den Quadrikegel beziehen und aus dem Früheren vermöge des Dualitätsprincips oder durch Central-Projection folgen.

Wenn wir hiermit unseren Bericht beschliessen, so geschieht es nicht in der Ueberzeugung, alles gesagt zu haben, was gesagt werden müsste. Jeder Leser wird in der Originalarbeit noch viel Unerwartetes und Gutes finden. Wir wollen aber noch der ausserordentlich reichen Aufgabensammlung Erwähnung thun; unter den (fast 300) in ihr enthaltenen Problemen wird der Lehrer diejenigen klug auswählen, welche mit der Richtung seiner Vorlesung übereinstimmen. Einige derselben haben einen viel höheren wissenschaftlichen Wert, als man nach dem bescheidenen Platze, welchen sie in Sannia's Werke einnehmen, glauben möchte. La.

S. P. Jaroschenko. Projectivische Geometrie. Vorlesungen. T. I. (1889.) Aus Odessa Nachr. XXVII, XXX, L. 260 + IX Taf. (Russisch.)

Dieses in dem Geiste von Staudt geschriebene Handbuch ist das erste systematische Lehrbuch der neueren Geometrie in russischer Sprache (es waren früher nur Anfangsbegriffe in einigen Aufsätzen von Goldenberg dargelegt, Math. Blätt. 1881), und daher ist es wünschenswert, dass diesem ersten Teile, der sich, wie Cremona's vortreffliche „Elementi di geometria“, mit Gebilden erster Stufe beschäftigt, auch ein zweiter folge.

Um einen Ueberblick des Inhalts zu geben, führen wir die Titel der einzelnen Capitel des Buches an:

I. Geometrische Formen und ihre Erzeugungsweisen. II. Projectivische Beziehung der Grundformen erster Stufe. III. Metrische Eigenschaften der projectivischen Formen erster Stufe. IV. Geometrische Formen, erzeugt durch zwei projectivische Punktreihen oder Strahlenbüschel. Si.

R. H. Graham. Geometry of position. London. Macmillan and Co. XV + 192 S.

Der Hauptmangel in diesem Lehrbuche liegt in seinem ersten

Capitel, in welchem die Theorie der projectivischen Strahlenbüschel und der Doppelverhältnisse erörtert wird. Die Darstellung erscheint viel zu lückenhaft, um jedem Lernenden den ersten Versuch, sich des Gegenstandes zu bemeistern, möglichst zu erleichtern. Das Uebrige im Buche ist viel besser und bietet trotz gelegentlicher Unbestimmtheit eine vortreffliche Einleitung in die Anwendungen der projectiven Geometrie auf das Gebiet der Statik. Die behandelten Aufgaben sind an manchen Stellen solche, wie man sie in ausführlicheren Lehrbüchern kaum antrifft. Gbs. (Lp.)

J. Duran y Loriga. Tres capitulos de Geometria superior. Coruña.

Dieses Werkchen umfasst drei Capitel, in denen die anharmonischen und harmonischen Verhältnisse, die Homographie und die Involution leicht und elementar als Vorbereitung für die Schüler gelehrt werden. Tx. (Lp.)

W. J. Macdonald. Higher Geometry. Containing an introduction to modern geometry and elementary geometrical conics. Edinburgh. James Thin. (1890.) [Nature XLIII. 8.]

G. D. E. Weyer. Einführung in die neuere construirende Geometrie. Zum Gebrauch für Studirende. Leipzig. Teubner. VI + 68 S. gr. 8°.

Friedr. Schur. Ueber die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie. Math. Ann. XXXIX. 113-124.

Herr F. Klein hat (in Math. Ann. VI, F. d. M. V. 1873. 272 ff.) gezeigt, dass die projective Geometrie unabhängig vom Parallelenaxiom begründet werden kann. Eine rein geometrische Entwickelung für diese Thatsache hat zwar bereits Herr Pasch ge-

geben; allein bei der Wichtigkeit des Gegenstandes ist die neue äusserst einfache Behandlung desselben, die in der vorliegenden Arbeit gegeben wird, von dem grössten Interesse.

Als erreichbar gelten alle Punkte eines begrenzten Gebietes; zwei erreichbare Punkte bestimmen eine erreichbare Gerade, drei eine erreichbare Ebene, in welcher jede Gerade enthalten ist, die zwei erreichbare Punkte derselben enthält. Wird noch vorausgesetzt, dass jede erreichbare Ebene das Gebiet in zwei getrennte Teile zerlegt, so folgt, dass alle Ebenen, die einen erreichbaren Punkt enthalten, sich gegenseitig in erreichbaren Geraden schneiden, und zwei Gerade durch einen erreichbaren Punkt in einer erreichbaren Ebene liegen. Daher lässt sich mit Hülfe des vollständigen Vierkants der Begriff der harmonischen Strahlengruppe und anschliessend der der harmonischen Ebenengruppe einführen.

Bezieht man nun zwei Strahlenbüschel mit den Centren S und S' so, dass in jedem erreichbaren Punkte einer Ebene η zusammengehörige Strahlen sich treffen, so kann durch die Bestimmung, dass zu vier harmonischen Strahlen vier harmonische Strahlen gehören sollen, jedem Strahle des einen Bündels ein Strahl des anderen so zugewiesen werden, dass entsprechende Strahlen in einer Ebene liegen. Damit ist gezeigt, dass eine Gerade $\mathfrak{a}$ und eine Ebene η, oder besser zwei Gerade $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in einer Ebene, auch wenn sie keinen erreichbaren Punkt gemein haben, einen „Strahlenbündel“ bestimmen, eine zweifache Mannigfaltigkeit von Geraden, von denen durch einen Punkt S je eine geht, und von denen je zwei in einer Ebene liegen; im ersten Falle gehören $\mathfrak{a}$ und η, im zweiten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ dem Bündel an. Mit dem so gewonnenen „idealen Punkte“ ist zugleich die ideale Gerade gegeben, als einfach unendliche Mannigfaltigkeit idealer Punkte, die einer einfach unendlichen Mannigfaltigkeit erreichbarer Ebenen angehören und durch zwei ideale Punkte oder zwei erreichbare Ebenen gegeben sind.

Da somit in der Ebene ausnahmslos zwei Punkte eine Gerade, zwei Gerade einen Punkt bestimmen, so lässt sich nunmehr der Begriff der harmonischen Punktgruppe aufstellen und zeigen, dass zu einer Strahlengruppe, mag das Centrum „ideal“

oder erreichbar sein, entweder nur harmonische Punktgruppen perspectivisch sind oder überhaupt keine. Daraus folgt, dass, sobald man Punkte zweier erreichbaren Ebenen entsprechend nennt, die mit einem idealen Punkte in einer Geraden liegen, drei Punkten in einer geraden Linie drei Punkte in einer geraden Linie entsprechen.

Der Ort der idealen Geraden, welche ein idealer Punkt mit den Punkten einer idealen Geraden bestimmt, kann daher als eine ideale Ebene bezeichnet werden; denn er hat mit jeder erreichbaren Ebene eine Gerade gemein. Es lässt sich zeigen, dass sie mit jeder idealen oder erreichbaren Geraden einen Punkt gemein hat, so dass also nun ausnahmslos drei Ebenen einen Punkt gemein haben und die räumlichen Hauptgesetze erfüllt sind. E. K.

C. Juel. Note til en Konstruktion af Newton. Nyt Tidss. for Math. IIB. 3-6.

Newton hat die folgende Construction zweier projectiven Figuren gegeben:

In einer Ebene seien festgelegt: zwei Gerade BX und BY, ein Punkt O und eine bestimmte Richtung U. Wenn man nun den einem willkürlichen Punkte P entsprechenden Punkt P_1 finden soll, so wird PM parallel mit BY gezogen, so dass M ein Punkt von BX ist, danach OM gezogen, welche BY in M_1 schneiden möge, und endlich M_1P_1 in der gegebenen Richtung U, so dass die Länge M_1P_1 durch die Gleichung

$$\frac{MP}{OM} = \frac{M_1P_1}{OM_1}$$

bestimmt wird.

Herr Juel zeigt jetzt, dass, wenn statt dieser Gleichung

$$\frac{MP}{OM} = k\frac{M_1P_1}{OM_1}$$

gesetzt wird, wo k eine willkürliche Constante ist, Newton's Construction die allgemeinste lineare Transformation giebt.

V.

Th. Monin. Ueber einige Arten von projectivischen Coordinaten. Beiträge zur Theorie der Kreislinie. Prag. 1889. (Böhmisch.)

Diese kurz gefassten, aber inhaltsreichen preisgekrönten methodischen Studien haben nicht so sehr den Zweck, zu gewissen hübschen Sätzen zu gelangen, als vielmehr das Wesen der Wege aufzudecken und zu vergleichen, wie man dieselben erhält, wobei die Vorzüge der beweglichen Hülfsgebilde der modernen Geometrie gegenüber dem starren Cartesianischen Coordinatengerüst klar hervortreten. Std.

F. Deruyts. Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale. Bruxelles. F. Hayez. 208 S. 8°.

Der Zweck dieser bei Gelegenheit des Wettbewerbes der Universitäten Belgiens 1890 preisgekrönten Schrift ist der, nach einer einheitlichen Methode die Theorie der Involution und der unicursalen Homographie aufzustellen. Ausser den von den Geometern früher gewonnenen Ergebnissen hat der Verfasser die Lösung mancher neuen Fragen dargelegt. Verschiedene Anwendungen sind im Hinblick auf das Interesse eingefügt, welches die Theorie für die Geometrie der Räume bietet.

„Eine Involution I_{n-1}^n von der Ordnung n und dem Range $n-1$ ist eine $(n-1)$-fach unendliche Mannigfaltigkeit aus Gruppen von n gleichartigen Elementen erster Stufe, bei welcher eine beliebige dieser Gruppen ohne Zweideutigkeit durch $n-1$ beliebig herausgegriffene ihrer Elemente bestimmt ist. Eine Involution I_k^n von der Ordnung n und dem Range k ist die k-fach unendliche Mannigfaltigkeit der für $n-k$ Involutionen I_{n-1}^n gemeinschaftlichen Gruppen.“

Eine I_{n-1}^n wird analytisch durch das Nullsetzen einer n-linearen symmetrischen Form dargestellt:

$$(1) \qquad a_{x1}\,a_{x2}\ldots a_{xn} = 0.$$

Eine Involution I_k^n wird durch $n-k$ solcher Gleichungen dargestellt. Die Grundlage der zur Erforschung der Involutionen

benutzten Methode ist die folgende geometrische Deutung: Die Gleichung (1) einer I_{n-1}^n enthält n unabhängige Coefficienten; diese können als die Coordinaten eines Punktes A des n-dimensionalen Raumes oder als die tangentialen Coordinaten eines (n—1)-dimensionalen, in E_n gelegenen Raumes E_{n-1} angesehen werden. Der Punkt A ist der „Hauptpunkt" von I_{n-1}^n, und E_{n-1} ist der im Raume E_n dargestellte „Ergänzungsraum" von I_{n-1}^n. Man gelangt nun zu den folgenden, in Wechselbeziehung stehenden Sätzen:

1) Der Ort der Hauptpunkte der zerlegbaren I_{n-1}^n ist die Normalcurve C_n von E_n.

2) Die Ergänzungsräume der I_{n-1}^n sind die osculirenden Räume der Normalcurve C_n von E_n.

Von da aus wird man zu dem folgenden Schlusse geführt:

Die (n—1)-dimensionalen Räume, welche durch den Hauptpunkt einer I_{n-1}^n gehen, markiren auf C_n Gruppen von n Punkten, deren Parameter die Gleichung (1) befriedigen.

Diese Punktgruppen sind also die „Bilder" der Gruppen der Involution. Eine Involution I_k^n wird also durch die Verbindung der $n-k$ Hauptpunkte der $n-k$ Involutionen I_{n-1}^n dargestellt, deren Resultante sie ist. Diese Verbindung ist ein (n—k—1)-dimensionaler Raum E_{n-k-1}, der „Hauptraum" von I_k^n. Ebenso ist auch der „Ergänzungsraum" von I_k^n ein k-dimensionaler Raum E_k.

Alle (n—1)-dimensionalen Räume, die durch E_{n-k-1} gehen, markiren auf der Curve C_n Gruppen von n Punkten, welche die Bilder der Gruppen von I_k^n sind. Durch die analytische Deutung dieses Ergebnisses wird man ohne Schwierigkeit zur zweiten algebraischen Darstellung einer I_k^n geführt, gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\lambda_1 a1_x^n + \lambda_2 a2_x^n + \cdots + \lambda_{k+1} \overline{ak+1}_x^n = 0$$

eines Büschels k^{ter} Ordnung von binären Formen n^{ter} Ordnung. Der Verf. giebt ein allgemeineres System an, welches es ermög-

licht, die Gruppen einer I_k^n auf der Normalcurve C_μ eines Raumes von $\mu > n$ Dimensionen darzustellen.

Bedient man sich des Darstellungsverfahrens auf den Normalcurven, so findet man sehr leicht die Eigenschaften einer beliebigen Involution wieder, welche Eigenschaften bekanntlich grösstenteils von den Herren Le Paige, Weyr und Lerch entdeckt sind. Diese Methode führt ebenso zu neuen Ergebnissen und zur Verallgemeinerung bekannter Ergebnisse, wie z. B. zur Verallgemeinerung der Sätze des Hrn. Weyr über die neutralen Elemente beliebiger Art.

Andererseits hat die Betrachtung der Involutionsräume es dem Verfasser ermöglicht, die Bedingungen dafür zu finden, dass eine beliebige Anzahl von Involutionen Gruppen in endlicher Anzahl oder in r-fach unendlicher Anzahl gemein habe. Diese Bedingungen lassen sich in die eine zusammenfassen:

„n Involutionen von beliebigen Rängen und Ordnungen können Gruppen in r-fach unendlicher Anzahl nur gemeinschaftlich haben, wenn die um die Zahl r verminderte Summe der Ränge ein Vielfaches von $n-1$ ist. Der Factor der Vielfältigkeit ist die Anzahl der Elemente, welche in den gemeinschaftlichen Gruppen vorkommen."

Eine grosse Anzahl von Eigenschaften der einer beliebigen Zahl von Gruppen gemeinsamen Elemente fliesst unmittelbar aus dem folgenden Lehrsatze:

„$q+1$ Involutionen $I_{k_i}^{n_i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, q+1)$, deren Rangsumme ein μ-faches von q ist, haben Gruppen von μ Elementen gemeinsam, deren Anzahl $\prod_1^{q+1} \binom{n_i-k_i}{\mu-k_i}$ ist".

Die Schrift enthält ausserdem neue Eigenschaften der conjugirten Involutionen, der Involutions-Oberflächen und auch der geometrischen Constructionen der kubischen Involution ersten und zweiten Ranges.

Bei den Anwendungen erinnert der Verf. zunächst an die schönen Untersuchungen, in denen Hr. Le Paige die Eigenschaften der Involution zur Construction der kubischen Curven benutzt

hat, ebenso an die schönen von Hrn. Weyr in der Geometrie der rationalen ebenen oder räumlichen Curven erhaltenen Resultate. Diese Anwendungen werden auf die Geometrie der rationalen Curven beliebiger Räume ausgedehnt. Als analytische Anwendung ermöglicht der Begriff der neutralen Elemente die sofortige Auffindung des kanonischen Ausdrucks der Involutionen I^n_{n-1}, wenn n ungerade ist. Indem man ferner den Begriff der neutralen Elemente erweitert, erhält man den kanonischen Ausdruck der Involutionen $I^n_{n-\varphi}$, wenn $n+1$ ein Vielfaches von $\varphi+1$ ist. Demzufolge kann man die „kanonische“ Form gewisser Systeme binärer Formen geben.

Ein grosser Teil der Schrift ist der Verallgemeinerung der Involution, nämlich der „Homographie“, gewidmet.

„n Figuren erster Stufe bilden eine Homographie H^n_{n-1} n^{ter} Ordnung und $(n-1)^{\text{ten}}$ Ranges, wenn $n-1$ willkürlich aus $n-1$ dieser Figuren herausgegriffene Elemente ohne Zweideutigkeit ein Element der übrig bleibenden Figur bestimmen. Die für $n-k$ Homographien H^n_{n-1} gemeinsamen Gruppen bilden eine Homographie H^n_k n^{ter} Ordnung und k^{ten} Ranges.“

In dem Falle $n=2$, $k=1$ kann man die Homographie als aus zwei Involutionen auf folgende Weise entspringend ansehen: I^2_1 und J^2_1 seien zwei Involutionen; einem Elemente X entspricht in I^2_1 ein Element Y, und diesem Elemente Y entspricht in J^2_1 ein Element Z. Zwischen den Elementen X und Z besteht eine Beziehung H^2_1.

Bedient man sich dieser Eigenschaft, so kann man die Homographie H^2_1 auf einem beliebigen Kegelschnitte construiren. Der Begriff der Resultante zweier Involutionen I^2_1 lässt sich, wie folgt, verallgemeinern: „${}^{(i)}I^{(n)}_{n-1}$ $(i=1, 2, 3, \dots, k)$ seien k Involutionen und I^{n-1}_{k-1} noch eine; jeder der Gruppen von $n-1$ Elementen aus I^{n-1}_{k-1} entspricht in jeder der Involutionen ${}^{(i)}I^n_{n-1}$ ein Element X_i; die k Elemente X_i bilden eine H^k_{k-1}.“

Der Verf. hat nicht beweisen können, dass diese Homographie die allgemeinste ist. In dem Falle $k=3$ hat er es geometrisch bewiesen.

Die beiden letzten Capitel der Schrift enthalten die Erforschung der Eigenschaften beliebiger Homographien: Vielfache Elemente, vielfache zugeordnete Elemente, neutrale Elemente und Gruppen, die einer beliebigen Anzahl beliebiger Homographien gemeinschaftlich sind.

Durch die Verknüpfung der Homographie H_1^2 und der Involution I_1^2 erscheint der Pascal'sche Satz vom Hexagrammum als das geometrische Gewand des folgenden Theorems auf einem Kegelschnitte: „Die Resultante dreier Involutionen I_1^2 ist eine Involution, wenn diese drei Involutionen einem Büschel angehören."

Nach dieser Anschauung führt die Abbildung der Involutionen I_1^2 auf der Normalcurve eines n-dimensionalen Raumes zu der Ausdehnung des Pascal'schen Satzes für eine beliebige Normalcurve. In dem Falle $n = 3$ findet man das Chasles'sche Theorem über das einer kubischen Raumcurve eingeschriebene Siebeneck wieder. Die bei dieser Gelegenheit angegebenen Resultate ermöglichen die lineare Punkt-Construction der allgemeinsten Curve C_n, von der man $n+3$ Punkte giebt.

Als Anwendung der Homographie H_1^2 und ihrer Erweiterung, des Chasles'schen Correspondenz-Princips, sind verschiedene Verfahrungsarten zur Construction gewisser ebener Rationalcurven angegeben. Uebrigens führt die Verallgemeinerung des von Chasles zur Construction der ebenen kubischen Curven angewandten Verfahrens den Verf. zur Erzeugung gewisser Oberflächen. Für die kubischen Oberflächen hat man den folgenden Satz: „Die Ebenen eines Bündels markiren auf vier festen Geraden die Ecken von Vierecken, deren Diagonalpunkte drei allgemeinen kubischen Oberflächen angehören." Die Theorie der beliebigen Homographie führt zur Verallgemeinerung des von Hrn. Le Paige ersonnenen Verfahrens zur Construction der ebenen kubischen Curven mit Hülfe von Strahlenbüscheln. Durch ähnliche Betrachtungen kommen die meisten bekannten Verfahrungsarten zur Erzeugung der kubischen Oberflächen auf die Erforschung der homographischen Büschel zurück. Mn. (Lp.)

Emil Weyr. Ueber Involutionen höheren Grades auf nicht-rationalen Trägern. Wien. Ber. C. 589-606.

Zwei auf einer Raumcurve vom Geschlechte 1 befindliche Involutionen erster Stufe m^{ten} und n^{ten} Grades besitzen $(m-1)(n-1)-1$ gemeinsame Elementenpaare. Ebenso gross ist auch der Grad der Regelfläche, welche aus einer Involution m^{ten} Grades erster Stufe auf einer Raumcurve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte 1 dadurch entsteht, dass man je zwei einer und derselben Gruppe angehörige Punkte durch eine gerade Linie verbindet. Diese Resultate verallgemeinert der Verfasser auf ein beliebiges Geschlecht p. Dann lauten die beiden angegebenen Zahlen übereinstimmend $(m-1)(n-1)-p$. Für die Zahl der Doppelelemente einer Involution m^{ten} Grades ergiebt sich $2(m+p-1)$. Diese Sätze lassen sich leicht auch auf ebene Curven übertragen. Insbesondere werden dann noch die kubischen und die biquadratischen Involutionen erster Stufe auf Trägern vom Geschlechte 1 eingehend studirt. Scht.

Em. Weyr. Ueber die Anzahl der n-fachen Elemente einer J^n_{n-1} auf einem Träger vom Geschlechte Eins. Monatsh. f. Math. II. 458.

Eine J^n_{n-1} auf einem Träger vom Geschlechte Eins besitzt n^2 n-fache Elemente. Js.

E. Waelsch. Zur Construction der Polargruppen. Wien. Ber. C. 315-326.

Der Verfasser giebt in diesem Aufsatze eine geometrische Construction der Polargruppen von $n+1$ und $n+2$ Punkten einer rationalen Curve n^{ter} Ordnung in einem Raume von n Dimensionen. Ausführlich wird der Fall $n=2$ behandelt. Folgende Sätze werden aufgestellt: Die Punkte der r^{ten} Polargruppen von $n+1$ Punkten einer Curve n^{ter} Ordnung in dem Raume von n Dimensionen für einen beliebigen Punkt der Curve als Pol liegen auf der $(n+1-r)^{\text{ten}}$ Polare dieses Punktes bezüg-

lich der Fläche $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche von den Seitenflächen des Polyeders der $n+1$ Punkte gebildet wird. Hat man in einem Raume von n Dimensionen $n+2$ Punkte (a), so lässt sich zu diesen Punkten ein associirtes $(n+2)$-Flach (A) construiren. Sind $x_i = 0$ die Gleichungen der Ebenen (A), und ist $\Sigma x_i \equiv 0$, so ist $\Sigma x_i^2 = 0$ die Gleichung der „Hauptfläche", in Bezug auf welche (a) und (A) polar sind. Wird nun eine beliebige Raumcurve n^{ter} Ordnung C_n durch die $n+2$ Punkte (a) gelegt, so schneidet die Ebene A_i aus der Curve die Polargruppe $(a)_1^{a_i}$ des Punktes a_i bezüglich der $n+1$ anderen Punkte aus. Die Ebenen des $(n+1)$-Polareckes $(a)_1^0$ umhüllen eine Curve $\mathfrak{C}^n$, welche zu C_n bezüglich der Hauptfläche polar ist. Die $(n+1)$-Ecke $(a)_1^0$ sind Polarecke der Hauptfläche. Die Hauptfläche schneidet C_n in den Punkten der Hesse'schen Covariante der Gruppe (a).

Diese Sätze werden mitgeteilt, nachdem sie für $n = 2$ und $n = 3$ bewiesen worden sind. Letztere sind zum Teile schon bekannt. W. St.

W. G. Alexejew. Geometrische Untersuchung über die ein-vierdeutige Verwandtschaft vierter Ordnung zwischen zwei Ebenen. Mosk. Math. Samml. XIV. 223-278. (1889. Russisch.)

Da der Verfasser die Methoden des Herrn Schubert aus dem Calcul der abzählenden Geometrie zum Aufstellen eines allgemeinen Satzes aus der Theorie der Cremona'schen Transformationen anwendet, so giebt er in der Einleitung einen Abriss der Entwickelung der abzählenden Geometrie. Der erwähnte Satz lautet:

„Liegen auf einer Ebene zwei Punktsysteme Σ_1 und Σ_2 vereinigt, die so auf einander bezogen sind, dass einem Punkte des einen ein Punkt des anderen Systems entspricht und einer geradlinigen Punktreihe des einen eine Punktreihe auf der Curve n^{ter} Ordnung des andern, so giebt es auf dieser Ebene im allgemeinen $n+2$ sich selbst entsprechende Punkte."

Hauptaufgabe ist aber, die oben erwähnte Verwandtschaft

geometrisch aufzustellen und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Die Arbeit besteht aus drei Capiteln. Im ersten werden die Collineation, eine neue Methode, die zwei-zweideutige Verwandtschaft aufzustellen, und eine „der quadratischen analoge Verwandtschaft" besprochen. Werden zwei Ebenen P_x und P_y einander collinear zugeordnet, so nennt der Verfasser jede Gerade durch den Punkt y collinear-conjugirt dem Punkte x (x und y sind zwei in der Collineation sich entsprechende Punkte). Nehmen wir auf P_x einen Kegelschnitt C_x und auf P_y Tangenten des Kegelschnitts C_y, der nicht C_x collinear entsprechend ist, so ist zwischen den Punkten von C_x und den Tangenten von C_y eine zwei-zweideutige Verwandtschaft aufgestellt, wenn wir als entsprechende Elemente zweier Formen die collinear-conjugirten annehmen. Sind auf P_x sieben Punkte und auf P_y sieben ihnen collinear-conjugirte Geraden angenommen, so wird eine geometrische Verwandtschaft aufgestellt, wenn wir als entsprechende Elemente den Punkt von P_x und die Gerade auf P_y annehmen, die collinear-conjugirt sind in Bezug auf alle Verwandtschaften, welche erhalten werden, indem man sieben gegebene Paare durch ein achtes Paar conjugirter Elemente von P_x und P_y ergänzt. Die so erhaltene Verwandtschaft ist die „der quadratischen analoge". Bei ihr entspricht jeder geraden Punktreihe auf P_x ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung auf P_y und einem Strahlenbüschel auf P_y ein Kegelschnitt auf P_x. Das zweite Capitel bespricht das Conjugiren der Punkte in Bezug auf die der quadratischen analoge Verwandtschaft; es wird gezeigt, dass analog dem Vorigen hiermit zwischen den Punkten des Kegelschnitts C_x und des Kegelschnitts C_y eine zwei-vierdeutige Verwandtschaft aufgestellt wird. Um die der quadratischen analoge Verwandtschaft völlig zu bestimmen, ist es hinreichend, 14 Paare conjugirter Elemente zu nehmen. Nimmt man aber nur 13 solcher Paare an und betrachtet als entsprechend solche Punkte, die conjugirt in Bezug auf alle der quadratischen analoge Verwandtschaften sind, welche wir bekommen, wenn wir zu den 13 angenommenen Punktepaaren ein beliebiges 14tes adjungiren, so wird somit zwischen P_x und P_y eine Verwandtschaft aufgestellt,

in Bezug auf welche jedem Punkte x von P_x ein einziger Punkt y von P_y entspricht, jedem Punkte y von P_y aber vier Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 auf P_x entsprechen. Diese Verwandtschaft wird somit eine „ein-vierdeutige" genannt. Ihre Eigenschaften werden dann untersucht, was den Inhalt des dritten Capitels bildet. Das wichtigste Resultat ist das folgende: In Bezug auf diese Verwandtschaft entspricht einer Curve von dem Geschlechte p und der Ordnung n der P_y eine Curve auf P_x von der Ordnung $4n$ und vom Geschlechte

$$P = 4p + 6n - 3.$$

Si.

K. DOEHLEMANN. Ueber Cremona-Transformationen in der Ebene, welche eine Curve enthalten, die sich Punkt für Punkt selbst entspricht. Math. Ann. XXXIX. 567-597.

Eine Curve, die bei einer Cremona-Transformation Punkt für Punkt in sich selbst übergeht, wird als feste Curve der Transformation bezeichnet. Auf der festen Curve gelegene Fundamentalpunkte der Transformation sind einfache Punkte der entsprechenden Fundamentalcurven; weitere Fundamentalpunkte enthalten letztere nicht. Die feste Curve geht durch einen Fundamentalpunkt höchstens so oft, wie seine Ordnungszahl anzeigt. Die projectiven Büschel isologer Curven, die den Punkten einer beliebigen Geraden entsprechen, erzeugen bei einer Cremona-Transformation n^{ten} Grades mit einer festen Curve μ^{ter} Ordnung M eine Curve $(2n-3\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung N. Die Verbindungslinien der Punkte von N mit ihren entsprechenden Punkten umhüllen eine Curve $(n^2+n-2+\mu^2-2n\mu-\mu)^{\text{ter}}$ Klasse L.

Die beiden Tangenten zweier entsprechenden Curven in einem sich selbst entsprechenden Punkte P werden entsprechende Richtungen genannt; sie gehen, sobald sie zusammenfallen, in eine selbst entsprechende Richtung über. Punkte P, durch die nun höchstens zwei selbst entsprechende Richtungen gehen, heissen Coincidenzpunkte erster Art; Coincidenzpunkte P hingegen, durch die mehr als zwei und folglich nur selbst entsprechende Gerade

hindurchgehen, Coincidenzpunkte zweiter Art. Im allgemeinen sind die Punkte der festen Curve Coincidenzpunkte erster Art; ausser ihnen sind, abgesehen von speciellen Fällen, noch weitere $n+2+\mu^2-3\mu-\sum_i \varrho_i^2$ Coincidenzpunkte erster Art vorhanden, wo ϱ_i die Ordnung des Fundamentalpunktes R_i bedeutet. Von den beiden durch die Punkte von M gehenden selbst entsprechenden Richtungen sind die einen mit den Tangenten der Curve identisch, die anderen umhüllen eine für die Transformation charakteristische Curve H von der Klasse $\sum_i \varrho_i^2-\mu(\mu-2)$. Ist η der Ueberschuss der Summe der vier höchsten Ordnungszahlen, die den Fundamentalpunkten einer Ebene der Transformation zukommen, über die Zahl $n+2$, so kann die feste Curve höchstens von der $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Ordnung sein. Soll hingegen eine Cremona-Transformation n^{ten} Grades eine feste Curve μ^{ter} Ordnung enthalten, so ist n höchstens gleich $3k+1$, wo $k=n-\mu$ die Zahl entsprechender Punktepaare der Cremona - Transformation angiebt, die auf einer beliebigen Geraden liegen. k benutzt der Verfasser zur Klassificirung aller Cremona - Transformationen, nachdem Caporali für die involutorischen dieses Einteilungsprincip zu Grunde gelegt hat. An die Untersuchung der Cremona-Transformation schliesst sich nach gleichem Gesichtspunkte die der Jonquières - Transformation an; endlich werden im letzten Abschnitte die möglichen Cremona- und Jonquières-Transformationen ersten und zweiten Grades und deren geometrische Erzeugung besprochen. Js.

K. Doehlemann. Ueber die involutorischen Gebilde, welche eine ebene Cremona-Transformation, speciell die quadratische, enthalten kann. Schlömilch Z. XXXVI. 356-378.

Hat man eine Ebene, die durch eine Cremona-Transformation n^{ter} Ordnung auf sich selbst bezogen ist, und bezeichnet man sie insofern als E_x und als E_y, so kann man irgend einen Punkt dieser Ebene als in E_x oder in E_y befindlich auffassen und demnach mit Q_x oder R_y bezeichnen. Je nachdem entspricht ihm

dann ein Punkt Q_y, bezw. R_x. Diese neuen Punktepaare liefern eine neue Beziehung der Ebene auf sich selbst, die der Verfasser „abgeleitete Transformation“ nennt. Ist n der Grad der gegebenen Transformation, so ist der Grad der abgeleiteten n^2. Beispielsweise ist die Cremona-Transformation vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten und drei einfachen Punkten eine aus der quadratischen abgeleitete Transformation. Enthält die gegebene Transformation ein Punktepaar, das sich involutorisch entspricht, so stellt dies für die abgeleitete Transformation zwei Coincidenzpunkte dar. Da die abgeleitete Transformation im allgemeinen n^2+2, die gegebene $n+2$ Coincidenzpunkte hat, so ist die halbe Differenz $\frac{1}{2}n(n-1)$ die Zahl der involutorischen Punktepaare, die eine allgemeine Transformation n^{ten} Grades enthält. An diese Betrachtungen knüpft der Verfasser die Frage, ob eine Transformation nicht nur einzelne involutorische Punktepaare, sondern auch eine ganze Curve enthalten kann, die involutorisch auf sich selbst bezogen ist, oder auch zwei einander involutorisch entsprechende Curven, während die Transformation trotzdem im ganzen noch nicht involutorisch ist. Diese Frage ist zu bejahen, und der Verfasser zeigt, dass eine Transformation n^{ten} Grades höchstens eine Curve $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung als involutorisches Gebilde enthalten kann. Der Verfasser bespricht dann die involutorischen Gebilde einer quadratischen Transformation, weil eine solche, wie er nachweist, die einzige ist, die bei allgemeiner Lage der beiden Ebenen eine involutorische Curve von möglichst hoher Ordnung enthalten kann. Dadurch gelangt er zu einem von einer quadratischen Transformation erzeugten, sich involutorisch selbst entsprechenden Curven-System dritter Ordnung und darauf zu zwei involutorisch auf einander bezogenen Gebilden, deren Gradsumme 3 nicht übersteigt. Hiernach werden specielle quadratische Transformationen discutirt, und ein Satz über die nicht-centrale Involution auf der rationalen Curve dritter Ordnung ausgesprochen. Der Schluss ist endlich der Besprechung einiger Transformationen allgemeiner Natur mit involutorischen Curven gewidmet. Scht.

Ch. P. Steinmetz. Multivalent and univalent involutory correspondences in a plan determined by a net of curves of nth order. American J. XIV. 39-66.

Nachdem der Verfasser in einer Einleitung die involutorischen Punktgruppen auf der geraden Linie betrachtet hat, geht er in Capitel I über zur Bestimmung der Punktgruppen in einer Ebene durch ein Netz von Curven n^{ter} Ordnung:

$$F(x,y) = Q_1 f_1(x,y) + Q_2 f_2(x,y) + Q_3 f_3(x,y) = 0.$$

Durch einen beliebigen Punkt ist ein Büschel von Curven bestimmt, welche n^2 Punkte mit einander gemein haben. Diese n^2 Punkte bilden eine Gruppe der zu betrachtenden Involution. Einem Punkte entsprechen die (n^2-1) Punkte, welche mit ihm eine Gruppe bilden. Einer Geraden entspricht eine Curve $C^{(n^2-1)}$ von der Ordnung (n^2-1). Auf jeder Geraden liegen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Paare correspondirender Punkte. Der Ort der Centralpunkte, welche sich selbst entsprechen, ist im allgemeinen eine Curve $3(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Im Capitel II werden Netze mit festen Grundpunkten betrachtet. Hier können singuläre Curven auftreten, welche Bestandteile von Curven eines Büschels sind. Einem Punkte einer solchen Curve entsprechen alle Punkte derselben. Die Modificationen, welche hierdurch die allgemeinen Sätze erleiden, werden angegeben. Capitel III beschäftigt sich mit eindeutigen Correspondenzen oder Punktgruppen, welche aus zwei Punkten bestehen. Es werden zwei Fälle unterschieden, je nachdem alle Grundpunkte einfache oder mehrfache Punkte der Curven des Netzes sind. In dem ersten Falle muss n entweder gleich 2 oder 3 sein. Der erste Teil des vierten Capitels behandelt specielle Fälle der vierdeutigen Correspondenzen und zwar von $n = 2$ bis $n = 6$. Hierbei kommt die Inversion durch reciproke Radien und die Steiner'sche quadratische Correspondenz zur Sprache. Der zweite Teil beschäftigt sich mit zwei Fällen mehrdeutiger Correspondenzen. W. St.

S. Kantor. Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques. Mémoire cou-

ronné par l'Académie des sciences physiques et mathématiques de Naples dans le concours pour 1883. Naples. 1891. IV + 4 + 335 S. gr. 4° u. 4 Taf.

Referat erfolgt im nächsten Jahrgange.

G. Castelnuovo. Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane. Torino Acc. Mem. (2) XLII. 43 S.

E. D'Ovidio e C. Segre relatore. Relazione intorno alla memoria di Guido Castelnuovo che ha per titolo: Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane. Torino Atti XXVI. 595-602.

Die Leser des Jahrbuchs wissen sehr wohl, dass die Theorie der linearen Systeme ebener algebraischer Curven, welche aus der Theorie der Cremona'schen Verwandtschaften entsprossen ist, sich in vielen Untersuchungsgebieten von ausserordentlicher Wichtigkeit gezeigt hat, und dass in Folge dessen eine grosse Zahl von wertvollen Arbeiten derselben gewidmet worden ist. In der lehrreichen Vorrede der zum Bericht stehenden Abhandlung des Herrn Castelnuovo findet man die bezügliche Litteratur zusammengestellt. Hier genügt es, die Stellen der letzten Bände dieses Jahrbuchs anzuführen, wo über die vornehmsten unter denselben berichtet wurde: F. d. M. XVIII. 1886. 671; XIX. 1887. 603, 610, 611, 704, 840; XX. 1888. 601, 604, 607, 608; XXI. 1889. 618, 620; XXII. 1890. 627.

Die in Rede stehenden Untersuchungen haben zum Ausgangspunkte einen Gedanken, welcher, wie natürlich erscheinen kann, noch nicht in gehöriger Breite entwickelt worden war; wir denken dabei an die Idee, die Lehrsätze der Geometrie auf einer algebraischen Curve (vgl. Brill und Nöther, „Die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie", Math. Ann. VII) für die Theorie der linearen Systeme zu benutzen. Dem Verf. ist ferner eigentümlich die Unterscheidung zwischen „virtuellen" und „wirklichen" Charakteristiken, wie dies aus dem Folgenden erhellen wird.

Der Verf. setzt voraus, dass in einer Ebene σ eine Gruppe A von h Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_h$ beliebig gegeben sei, in welchen eine Curve n^{ter} Ordnung resp. die Vielfachheiten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$ haben soll; in Folge dessen hat man $\frac{1}{2}\Sigma\nu(\nu+1)$ lineare (nicht immer unabhängige) Gleichungen unter den $\frac{1}{2}n(n+3)$ Parametern, von denen die Curve abhängt; jeder Auflösung dieses Systems entspricht eine Curve des linearen Systems $[C]$, welches durch die Punkte a und die Zahlen ν bestimmt wird. Durch $C(n,\nu)_A$ oder kürzer C wird eine ganz beliebige Curve des Systems bezeichnet. Da den Bestimmungsstücken keine Beschränkung auferlegt ist, so kann der Fall eintreten, dass durch den Punkt a wirklich eine Zahl $\bar{\nu}$ von Zweigen geht, grösser als ν. In solchem Falle ist ν die „virtuelle“, $\bar{\nu}$ die „wirkliche“ Vielfachheit der Curve C in a. Bildet man aus den Punkten a oder aus einigen derselben und aus anderen Punkten von σ eine neue Gruppe $\bar{A}$, so werden wir künftig sagen, dass C „in Bezug auf $\bar{A}$ bestimmt“ ist, wenn die Vielfachheiten von C in den Punkten von $\bar{A}$ bekannt sind.

Geht durch k beliebige Punkte von σ eine einzige Curve von $[C]$, so ist k die „wirkliche“ Dimension des Systems; die „virtuelle“ Dimension desselben ist durch die Gleichung

$$(1) \qquad \bar{k} = \tfrac{1}{2}\{n(n+3)-\Sigma\nu(\nu+1)\}$$

gegeben. Enthält das System eine einzige Curve, so ist $k=0$; enthält es keine, so ist es vorteilhaft, $k=-1$ zu nehmen. Mithin kann man sagen, dass die wirkliche Dimension des Systems nicht unter -1 herabsinken kann, während die virtuelle jeden beliebigen positiven wie negativen Wert annehmen kann. Man hat immer $k \geqq \bar{k}$, und der Unterschied

$$(2) \qquad s = k-\bar{k}$$

wird der Ueberschuss (sovrabbondanza) des Systems genannt; ist $s=0$, so ist das System „regulär“.

A' sei die Gruppe der Punkte a, in denen die Curve C eine Vielfachheit $\nu>1$ hat; jede Curve, welche $(\nu-1)$-mal durch einen Punkt

a von A' geht, wird zum System $[C]$ oder zur Curve C in Bezug auf die Gruppe A „adjungirt" genannt; alle adjungirten Curven einer gegebenen Ordnung m bilden ein neues System von Curven $C'(m, \nu-1)_A$, welches dem System $[C]$ auch „adjungirt" genannt wird. Das wichtigste adjungirte System bekommt man, wenn $m = n-3$ ist; dieses wird in Zukunft allein betrachtet. Dasselbe war schon von Hrn. S. Kantor behandelt und benutzt (m. s. C. R. 9. Februar 1885; vgl. F. d. M. XVII. 605), aber die methodische Anwendung desselben wird in der Abhandlung, über die wir berichten, zum ersten Male gemacht. Die wirkliche und die virtuelle Dimension des adjungirten Systems seien k' und $\bar{k}'$; setzt man

$$(3) \qquad p = k'+1, \qquad \bar{p} = \bar{k}'+1,$$

so nennt man p und $\bar{p}$ das „wirkliche" und das „virtuelle" Geschlecht des Systems $[C]$. Folgende Beziehungen finden dann statt:

$$(4) \qquad \bar{p} = \tfrac{1}{2}\{(n-1)(n-2)-\Sigma\nu(\nu-1)\}, \quad \bar{p} \leqq p, \quad p \geqq 0.$$

Endlich wird durch den Namen „Grad" des Systems die (positive oder negative) Zahl

$$(5) \qquad D = n^2-\Sigma\nu^2$$

bezeichnet. Die fünf Zahlen k, p, D, $\bar{k}$, $\bar{p}$ sind die Charakteristiken des Systems $[C]$ oder der Curve C in Bezug auf die Gruppe A. Sie sind durch die Gleichung

$$(6) \qquad D = \bar{k}+\bar{p}-1$$

verbunden; ihre Invarianz wird durch den ersten Teil des folgenden wichtigen Satzes ausgedrückt: „Wenn in einer Cremona'schen Transformation die beliebige Curve C und die Gruppe $\bar{A}$ der Ebene σ die Curve C^* und die Gruppe $\bar{A}^*$ der Ebene σ^* als entsprechend haben, so sind die Charakteristiken von C in Bezug auf A dieselben wie diejenigen von C^* in Bezug auf $\bar{A}^*$; jede adjungirte Curve von C^* besteht aus der Transformirten einer adjungirten Curve von C und den Curven von σ^*, welche den Grundpunkten von σ entsprechen, wo C die virtuelle Vielfachheit 0 besitzt." Dieses Theorem erlaubt, die gegenseitigen Entfernungen

der Punkte der Gruppe A als nicht unendlich klein immer vorauszusetzen.

In einer irreducibeln (oder einfachen) Curve ist $p = \bar{p}$. In einer Curve C, welche aus den Curven $C_1, C_2, \ldots, C_i$ besteht, bezeichne man durch $(C_m C_n)$ die Zahl der Durchschnittspunkte von C_m und C_n in Bezug auf A; setzt man dann $J = \Sigma(C_m C_n)\,(m \gtrless n;\ m, n = 1, 2, \ldots, i)$, so hat man:

$$(7)\qquad \bar{k} = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \cdots + \bar{k}_i + J,$$

$$(8)\qquad \bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \cdots + \bar{p}_i + J - i + 1,$$

$$(9)\qquad D = D_1 + D_2 + \cdots + D_i + 2J,$$

$$(10)\qquad k \geqq k_1 + k_2 + \cdots + k_i,$$

$$(11)\qquad p \geqq p_m (m = 1, 2, \ldots, i).$$

Setzt man ferner voraus, dass keine zwei der Curven $C_1, C_2, \ldots, C_m$ unendlich viele Punkte gemein haben, so kann man schliessen:

$$(12)\qquad p \geqq p_1 + p_2 + \cdots + p_m.$$

Nennt man endlich „zusammenhängend“ eine (reducible) Curve, von der jeder (reducible oder irreducible) Teil mit seinem complementaren Teil entweder unendlich viele Punkte gemeinschaftlich hat, oder mindestens einen Durchschnitt in Bezug auf A, so gilt der Satz: eine zusammengesetzte Curve, bei welcher $p = \bar{p}$ sei, ist zusammenhängend, u. s. w.

Nachdem der Verf. die Erforschung der Eigenschaften der linearen Systeme „in Bezug auf eine Punktgruppe“ erschöpft hat, wendet er sich im zweiten Capitel seiner Abhandlung zu ihren „absoluten“ Eigenschaften und beschränkt sich auf die irreducibeln Systeme, d. h. auf diejenigen, welche als allgemeines Element eine einfache Curve besitzen. Er setzt ferner voraus, dass das System $[C]$ mindestens ∞^1 Curven enthalte; in diesem Falle ist die Zahl derjenigen Punkte endlich, welche allen Curven gemeinschaftlich sind; sie bilden die „Basis“ A des Systems. Die Curve C, unabhängig vom System $[C]$ betrachtet, hat in einem Punkte a der Gruppe A eine gewisse Vielfachheit ν, welche wir als die Vielfachheit des Systems in a ansehen wollen; ν ist die virtuelle und wirkliche Vielfachheit einer beliebigen Curve des Systems in a; aber eine specielle Curve des Systems kann

in a wohl eine Vielfachheit haben, höher als ν. Dies vorausgesetzt, sind die Charakteristiken von $[C]$: 1) die durch die Gleichung (1) gegebene virtuelle Dimension $\bar{k}$, 2) die wirkliche Dimension $k>0$, 3) das (virtuelle = wirkliche) Geschlecht und 4) der durch die Gleichung (5) gegebene Grad.

Die Curven des Systems $[C]$ bestimmen auf einer beliebigen, aber festen Curve desselben eine Reihe von ∞^{k-1} Gruppen, deren jede D Punkte enthält; sie ist die „charakteristische" Reihe g_D^{k-1} des Systems; sie ist in keiner Reihe g_D^l enthalten, in der $l>k-1$, d. h. sie ist „vollständig". Ein lineares System ist regulär oder überschüssig, je nachdem seine charakteristische Reihe „speciell" oder „nicht speciell" ist (nach der Benennung von Brill und Nöther). Dieser bemerkenswerte Satz hat zahlreiche und wichtige, nur zum Teil schon bekannte Folgerungen, welche wir aber der Kürze wegen unterdrücken müssen.

Eine reducible oder nicht irreducible Curve, welche durch keine Curve des Systems $[C]$ in Punkten geschnitten wird, welche der Gruppe A nicht angehören, wird „Fundamentalcurve" des Systems genannt. Der Verf. untersucht die (virtuellen und wirklichen) Charakteristiken einer solchen Curve und beweist dadurch viele neue Sätze, von denen er eine interessante Anwendung auf die Bestimmung der kleinsten Zahl von Basispunkten macht, welche ein überschüssiges System haben kann; er findet, dass ein überschüssiges System mindestens 9 Basispunkte hat, und wenn es gerade 9 hat, so ist ein Büschel (elliptischer) Curven der Ordnung $3r$ ($r = 1, 2, \dots$) vorhanden, welche durch jeden Basispunkt r-mal gehen.

Sieht man von festen Curven ab (falls dieselben existiren), welche von jeder zu C adjungirten Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung einen Teil bilden, so bleiben, wenn $p>1$ ist, ∞^{p-1} Curven, welche das „zu C rein adjungirte System" bilden und auf C die Reihe g_{2p-2}^{p-1} ausschneiden; ist das genannte System reducibel, so ist die allgemeine Curve von $[C]$ hyperelliptisch.

Die Vergleichung der Charakteristiken des Systems $[C]$ mit

denen der zu C rein adjungirten führt auf eine Reihe neuer Beziehungen, welche der Leser in der Originalarbeit findet. Unter den Anwendungen, deren sie fähig sind, wählen wir die Bestimmung der höchsten Dimensionen, welche ein lineares System von gegebenem Geschlechte haben kann, eine Bestimmung, welche den Verf. auf den folgenden höchst merkwürdigen Satz führt: „Ist μ eine ganze positive Zahl, so kann man ein lineares System vom Geschlechte p und von der Dimension

$$k \geqq (\mu+2)\left(\frac{p}{\mu}+2\right)$$

durch eine Cremona'schen Verwandtschaft transformiren: entweder in ein System von Curven einer Ordnung $\leqq 2\mu$ [illegible] oder in eines der Ordnung M mit einem Basispunkte, dessen Vielfachheit $\nu \geqq M-\mu$ ist."

Dies sind etwa die Grundgedanken und vornehmsten Resultate der Arbeit des Herrn Castelnuovo, welche einen wirklichen Fortschritt in einer der hauptsächlichsten Theorien der heutigen Geometrie darzubieten scheint.

La.

V. Retali. Sopra le tangenti doppie di alcune curve piane algebriche. Bologna Rend. Seduta del 21 Dicembre 1890.

Die Untersuchungen: Sopra due particolari trasformazioni piane quadratiche, welche Herr Retali in Bologna Mem. (4) X 653-671 (F. d. M. XXII. 1890. 629) veröffentlicht hat, betreffen zwei ebene Verwandtschaften, welche man auf folgende Weise erklären kann:

a) In einer Ebene π sind ein fester Kegelschnitt K^2 und ein fester Punkt R gegeben; jedem Punkte P von π lässt man die zwei Punkte P_1 und P_2 der Geraden PR entsprechen, welche in Bezug auf P und R harmonisch und in Bezug auf K^2 conjugirt sind.

b) Die gegebenen Stücke seien dieselben; man lässt P den Punkt P' von PR entsprechen, welcher in Bezug auf R und die Polare von P harmonisch conjugirt zu P ist.

Im vorliegenden Aufsatze setzt der Verf. seine früheren Untersuchungen fort und beweist:

I. Bei der Verwandtschaft a) entspricht einer beliebigen Curve C n^{ter} Ordnung und m^{ter} Klasse eine Curve H von der Ordnung $2n$, der Klasse $2(n+m)$, dem Geschlechte $(n-1)^2$. Die Durchschnitte von K^2 mit der Polare r von R sind n-fache Punkte der H; die $6n(n-1)$ Berührungssehnen von K^2 mit den Kegelschnitten, welche durch R gehen, K^2 doppelt berühren und C osculiren, sind Wendetangenten von H; die bezüglichen Wendepunkte sind die Projectionen der Osculationspunkte aus R auf die genannten Tangenten. Doppeltangenten von H sind die $n(n-1)$ Tangenten von C, welche durch R gehen, und die $(n-1)(2n-9)$ Berührungssehnen der Kegelschnitte mit K^2, welche sowohl K^2 als C doppelt berühren.

II. Bei der Verwandtschaft b) entspricht der Curve C eine Curve S desselben Geschlechts von der Ordnung $2n$, der Klasse $2n+m$, mit R als n-fachem Punkte. Die Wendetangenten von S sind die $3n(n-1)$ Geraden, deren entsprechende Kegelschnitte H^2 mit K^2 eine dreipunktige Berührung haben, und die Wendepunkte sind die Projectionen der Berührungspunkte aus R auf die bezüglichen Geraden; die Doppeltangenten von S sind die $\frac{1}{2}n(n-1)(n^2+3n-6)$ Geraden, deren entsprechende Kegelschnitte H^2 mit K^2 zweifache Berührung haben. [Zum Verständnisse dieser Sätze fügen wir hinzu, dass der Verf. mit H^2 einen Kegelschnitt bezeichnet, welcher einer Geraden h auf folgende Weise entspricht: H^2 ist der Ort der Pole der Berührungssehnen der Kegelschnitte mit K^2, welche zu K^2 „conjugirt“ sind (vgl. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, I. Bd., S. 315-325), und in Bezug auf welche r und h reciproke Gerade sind.]

Einige Bemerkungen, welche die Beziehungen zwischen den Verwandtschaften a) und b) und die Hirst'sche quadratische Inversion betreffen, schliessen den lesenswerten Aufsatz. La.

B. Klein. Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde. II. Das Tripelgebiet. III. Collineare

Beziehungen des Tripelgebietes auf den Raum und allgemeine Theorie der Raumcurven dritter Ordnung.
Annali di Mat. (2) XIX. 39-73, 233-246.

Ueber den ersten Teil dieser Arbeit s. das Referat F. d. M. XXII. 1890. 619. Unter „Tripelgebiet" eines Kegelschnittes ist die Gesamtheit aller auf demselben liegenden Punktetripel zu verstehen. Aus der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit des Tripelgebietes lässt sich die zweifach ausgedehnte des Tripelnetzes ausscheiden, welches drei dreifache Punkte besitzt. Es gilt dann der Satz, dass, wenn ein Tripel β einem Netze angehört, dessen Punkte das Tripel α bilden, dann auch α ein Tripel des Netzes ist, dessen dreifache Punkte das Tripel β bilden. Für diesen schon im Abschnitte I enthaltenen Satz giebt der Verf. hier einen neuen Beweis und zeigt, wie derselbe zur Durchführung des Gesetzes der Reciprocität im Tripelgebiet benutzt werden kann. Es zeigt sich, dass zwischen Tripel und Tripelnetz dieselbe polare Beziehung besteht, wie im räumlichen Nullsystem zwischen Ebene und Punkt. — Im übrigen wird im Abschnitt II die Theorie der „Tripelreihen" entwickelt, d. h. der zwei Tripelnetzen auf demselben Träger gemeinsamen kubisch-involutorischen Reihen. Dieselben zerfallen in zwei hinsichtlich der Bestimmung einer Reihe sich unterscheidende Hauptgruppen, wobei immer zu einer Reihe der ersten Gruppe als „Polarreihe" eine Reihe der zweiten Gruppe gehört. Vermöge einer vollkommenen Analogie entsprechen den Reihen der ersten Art die sich nicht selbst conjugirten Strahlen des Raumes in Bezug auf eine Raumcurve dritter Ordnung, den Reihen der zweiten Art die Leitstrahlen ihres Nullsystems. Dieser Zusammenhang gründet sich, wie im Abschnitte III dargelegt wird, auf die Möglichkeit, das Tripelgebiet einer Curve zweiter Ordnung projectivisch auf den Raum zu beziehen, sodass den Punktetripeln die Ebenen (oder Punkte) des Raumes zugeordnet werden. Dabei entsprechen den unendlich vielen singulären, d. h. in einen Punkt zusammenfallenden Tripeln der Curve die sämtlichen Schmiegungsebenen einer Raumcurve dritter Ordnung. Hierdurch ergiebt sich ein sehr allgemeiner Weg zur Theorie dieser Curven, und umgekehrt

von der letzteren aus zu derjenigen des Tripelgebietes. Auf die Berührungspunkte dieser Betrachtungen mit Arbeiten von Hesse und Sturm wird an entsprechender Stelle hingewiesen. Schg.

G. HAUCK. Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme. IV. Artikel. Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden. J. für Math. CVIII. 25-49.

Während in zwei projectiv-linearen ebenen Systemen die zugeordneten Punkte auf je drei zugeordneten geraden Linien im allgemeinen drei projective Punktreihen bilden, so besteht zwischen den auf den drei Hauptaxen enthaltenen Punktreihen eine trilineare Beziehung. Andererseits findet zwischen drei zugeordneten Strahlenbüscheln jederzeit eine trilineare Beziehung statt. Umgekehrt ergiebt sich, dass in zwei sectiv-trilinearen ebenen Systemen je drei zugeordnete Strahlenbüschel, mit Ausnahme der in den Hauptpunkten liegenden, in projectiver, dagegen je drei zugeordnete Punktreihen in trilinearer Beziehung stehen. Wegen dieser Vorkommnisse ist der Verfasser genötigt, bevor er die Eigenschaften der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme weiter verfolgt, die für seinen Zweck in Betracht kommenden Eigenschaften der trilinearen Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden zu erörtern.

Hierbei geht er von den kleinen Ergebnissen aus, welche der Referent 1880 in den Math. Ann. XVII. 457 veröffentlicht hat, und zwar in einer „Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden“ betitelten Abhandlung, welche der Verfasser wohl etwas übertreibend als „grundlegend“ bezeichnet. Wer je die Früchte des Gedankens der projectiven Beziehung zweier Grundgebilde in der synthetischen Geometrie kennen gelernt hat, für den ist der Gedanke, eine trilineare Beziehung zwischen drei Grundgebilden zu constituiren, so nahe liegend, dass anzunehmen ist, dass auch andere Mathematiker schon vor dem Referenten die Grundlagen dieser Beziehung erkannt haben, vielleicht ohne damit an die Oeffentlichkeit zu treten. Während

der Referent von der sectiven Erzeugungsweise trilinearer Punktreihen ausging, wird hier die Untersuchung auf Grund der projectiven Erzeugung geführt. Nach der Entwickelung und constructiven Verwertung der wichtigsten Eigenschaften der trilinearen Beziehung werden die Relationen zwischen drei Strahlenbüscheln erörtert, welche in drei projectiv-linearen ebenen Systemen einander zugeordnet sind. Die aus der blossen Bedingung der eindeutigen algebraischen Zuordnung vom Referenten abgeleitete fundamentale Doppelverhältnis - Relation

$$(pqxy)(p'q'x'y')(p''q''x''y'') = 1$$

tritt auch in den Entwickelungen des Verfassers als grundlegend hervor. Hier bedeuteten auf drei Strahlen p, q, p', q', p'', q'' die 3-mal 2 Kernpunkte, x, x', x'' und y, y', y'' zwei beliebige Tripel zugeordneter Punkte. Interessante weitere auf die Fluchtpunkte bezügliche Relationen, sowie Eigenschaften der Ausartungen werden vom Verfasser entwickelt. Scht.

G. Tarry. Théorème de géométrie. C. R. CXII. 984-985.

Wird eine ebene Figur sich selbst ähnlich so verändert, dass zwei Punkte A und B auf zwei Geraden mit dem Schnittpunkte P gleiten, so beschreiben alle Punkte des Kreises PAB von P ausgehende Geraden und bleiben stets auf einem Kreise. Die inverse Curve hinsichtlich P der Kreisenveloppe ist von gleicher Ordnung mit den Curven, welche die anderen Punkte der Figur beschreiben. E. K.

Duchêne. Sur une représentation plane complète des figures de l'espace. J. de Math. spéc. (3) V. 101-106.

Um die Gebilde des Raumes auf einer Ebene P durch Figuren von gleicher Mächtigkeit darzustellen, denkt sich der Verf. den abzubildenden Punkt M in einer beliebigen Ebene Q. Nimmt man nun zwei feste Geraden D und Δ des Raumes an und construirt die durch M gehende, D und Δ schneidende Gerade, so bestimmt der Schnittpunkt dieser letzteren Geraden mit P das

Bild m von M. Einer Geraden in Q entspricht dann auf P ein Kegelschnitt durch drei feste Punkte, nämlich die beiden Schnittpunkte von D und Δ mit P und denjenigen Punkt, in welchem die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte von D und Δ mit Q die Ebene P trifft. Die Art des Entsprechens bei dieser Abbildung wird für die einfachsten Raumgebilde durchgeführt.

Lp.

G. Lazzeri. Teoria geometrica delle linee e superficie polari. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 1021-1049.

Lässt man eine Gerade um einen Punkt O in der Ebene π sich drehen und nimmt hinsichtlich seiner Schnittgruppe mit einem n-Seit den harmonischen Mittelpunkt $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so erhält man eine Gerade, die Harmonicale des Punktes, die sich im Anschluss an eine von Herrn Sannia herrührende Entwickelung durch einen Schluss von $n-1$ auf n rein geometrisch nachweisen lässt. Die erste Polare P^{n-1} eines n-Seits hinsichtlich eines Punktes P, der Ort der Punkte, deren Harmonicalen P enthalten, ist eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Ecken des Polygons enthält. Schneidet man n-Seit und P^{n-1} durch eine von P ausgehende Gerade, so erhält man zu der Gruppe von n Punkten die Polargruppe hinsichtlich P; ebenso erhält man die zweite bis $(n-1)^{\text{te}}$ Polargruppe. Hinsichtlich einer beliebigen Curve n^{ter} Ordnung ist die m^{te} Polare als Ort der m^{ten} Polargruppen bestimmt. Ohne näheres Eingehen wird sie als eine Curve $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung bezeichnet. Es wird gezeigt, dass die erste Polare eines Punktes P die Berührungspunkte der von P ausgehenden Tangenten enthält und einen s-fachen Punkt der Grundcurve zum $(s-1)$-fachen Punkte hat. Da sich zeigt, dass die Harmonicale eines Punktes für ein n-Seit mit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Polare zusammenfällt, folgt auch im allgemeinen, dass die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare von P der Ort derjenigen Punkte ist, deren erste Polaren P enthalten. Parallel laufend geht eine entsprechende Entwickelung über Flächen n^{ter} Ordnung.

E. K.

G. Castelnuovo. **Intorno alla geometria sopra una superficie algebrica I, II.** Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 127-137, 307-318.

I. Liegt auf einer Fläche ein Büschel von Curven, d. h. eine ∞^1-fache Mannigfaltigkeit, die durch jeden Punkt der Fläche ein Individuum sendet, so ist entweder der Büschel rational oder im allgemeinsten Falle eine Involution μ^{ter} Ordnung. In Verallgemeinerung eines von Herrn Nöther benutzten Verfahrens bezieht nun Herr Castelnuovo die Gruppen dieser Involution auf die Ebenen eines Büschels projectivisch und projicirt von einem festen Punkte aus die Curven jeder Gruppe auf ihre Ebene. Die aus diesen $C_{\mu\nu}$ entstehende Fläche ist, wenn sie die Axe des Büschels ϱ-fach enthält, von der Ordnung

$$\mu\nu+\varrho = n';$$

ihre adjungirten Flächen $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden jede Ebene ausser in der Axe in einer adjungirten Curve $(\nu-3)^{\text{ter}}$ Ordnung der $C_{\mu\nu}$. Da diese adjungirte Curve nach einem Nöther'schen Satze auf jeder der μ Curven eine Specialschar ausschneidet, so ergiebt sich der zahlreiche Folgerungen ergebende Satz: „Enthält eine Fläche vom Geschlecht $p>0$ einen Büschel von Curven, so schneiden die adjungirten Flächen $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung von F auf jeder Curve eine Specialschar aus."

Von hier aus gelangt Herr Castelnuovo zu Flächen, bei denen das „numerische Geschlecht" von dem „geometrischen Geschlecht" verschieden ist. Letzteres ist die Zahl der linear unabhängigen adjungirten Flächen von der Ordnung $n-4$, ersteres die Zahl, welche sich für diese Anzahl ergeben würde, wenn man in die für genügend grosse Ordnungszahl der adjungirten Flächen geltende Formel den Wert $n-4$ einsetzt. Dieser Fall tritt bei allen Flächen ein, deren Geschlecht grösser als 1 ist, und die einen nicht rationalen Büschel von ebenen Curven dritter oder Raumcurven vierter Ordnung erster Art enthalten. Ein concretes Beispiel hierfür bieten, wenn

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

Flächen zweiten Grades darstellen, die Flächen

$$f_n(u, v, w) = 0.$$

II. Zwischen dem Flächengeschlecht p und dem Curvengeschlecht (p') ihrer Schnitte mit den adjungirten Flächen $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung besteht, wie Herr Nöther gezeigt hat, die Relation

$$p^{(1)} \geqq 2p-3,$$

und das Gleichheitszeichen gilt in dem Falle, wo die erwähnten Curven hyperelliptisch sind. Herr Castelnuovo gelangt zu dem Satz, dass, falls eine F adjungirte Fläche $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung nicht durch andere notwendige Punkte zu gehen braucht, wenn sie einen beliebigen Flächenpunkt enthält,

$$p^{(1)} \geqq 3p-6$$

ist, und giebt Beispiele von Flächen, bei denen die untere Grenze für $p^{(1)}$ erreicht wird. E. K.

A. Mannheim. Transformation de démonstration.
C. R. CXII. 475-477.

Herr Mannheim giebt einen Beweis für den Satz: Wenn vier Punkte einer beweglichen Geraden auf vier festen Kugeln, deren Mittelpunkte in einer Ebene enthalten sind, gleiten, so beschreibt jeder Punkt eine Linientrajectorie auf einer Kugel, deren Mittelpunkt mit den Mittelpunkten der vier festen Kugeln in derselben Ebene gelegen ist. Anknüpfend an die kinematische Transformation, über die Herr Mannheim 1890 (C. R. CX, F. d. M. XXII. 864) berichtet hat, wendet er die Beweisform nach einer anderen Richtung und gewinnt das Theorem: Wenn vier Ebenen eines beweglichen, in sich starren Ebenenbüschels bezüglich vier feste Kugeln berühren, deren Mittelpunkte in einer Ebene enthalten sind, so bleibt irgend eine Ebene des Büschels stets Berührungsebene einer Kugel, deren Mittelpunkt mit den Mittelpunkten der vier festen Kugeln in derselben Ebene liegt. Durch die Art, wie beide Sätze begründet werden, rücken sie zu einander in eine interessante ideelle Verbindung. Schn.

C. Ukrig. Trilineare und tetraedrale Collineation.
Diss. Giessen. 8°.

B. Besondere ebene Gebilde.

William J. McClelland. A treatise on the geometry of the circle and some extensions to conic sections by the method of reciprocation. With numerous examples. London. Macmillan and Co. XVI + 299 S.

Lehrbücher der Planimetrie, welche den Ersatz der durch das Studium der euklidischen Elemente gewonnenen Kenntnisse und die Einführung der Lernenden in die hauptsächlicheren neueren Methoden und Errungenschaften bezwecken, fangen jetzt an, in den englischen Veröffentlichungen einen Platz zu beanspruchen. Die Lehrbücher von Townsend und Mulcahy sind ohne Zweifel während einer beträchtlichen Zeit in Gebrauch gewesen; aber in England und Schottland (die Bemerkung findet keine Anwendung auf Irland) hat das Studium der reinen Geometrie bis in die jüngste Zeit wenig Raum gewonnen. Ein Anfang ist wenigstens mit Casey's „Sequel to Euclid" gemacht worden, einem Buche, das mehrere Auflagen erlebt hat, und das vorliegende Lehrbuch bedeutet ein weiteres Vorgehen nach derselben Richtung. Es erledigt nahezu vollständig die „neuere Dreiecksgeometrie" und hat Capitel über solche Gegenstände, wie Maximum und Minimum, Theorie des mittleren Centrums eines Systems von Punkten, collineare Punkte und sich schneidende Linien, Pole und Polaren bezüglich eines Kreises, Kreisbüschel, Theorie ähnlicher Figuren, Inversion, reciproke Figuren, anharmonischer Schnitt, Involution. Möchte das Buch sich nutzbar erweisen, das Interesse an der neueren reinen Geometrie zu erwecken. Gbs. (Lp.)

E. d'Ovidio. Le proprietà focali delle coniche nella metrica projettiva. Torino Atti XXVI. 339-366.

E. d'Ovidio. Sulle coniche confocali nella metrica projettiva. Torino Atti XXVI. 426-437.

E. d'Ovidio. Teoremi sulle coniche nella metrica projettiva. Torino Atti XXVI. 525-535.

I. Wählt man einen beliebigen Kegelschnitt A zum absoluten Kegelschnitt, so ist die Entfernung zweier Punkte RR'

$$RR' = \frac{1}{2i}\log[SS_1\,RR'],$$

wobei unter SS_1 die Schnittpunkte zwischen A und RR' verstanden sind; entsprechend ist der Winkel zwischen zwei Geraden

$$rr' = \frac{1}{2i}\log[ss_1\,rr'],$$

wobei unter ss_1 die Tangenten verstanden werden, die der Kegelschnitt A aus dem Schnittpunkte rr' erhält. Hieraus folgt, dass nur zwei hinsichtlich A conjugirte Strahlen orthogonal sind; ebenso werden zwei conjugirte Punkte und ein Pol und seine Polare bezeichnet. Ein beliebiger Kegelschnitt C besitzt demnach sechs Brennpunkte, die Ecken des ihm und A umbeschriebenen Vierseits; zu demselben gehören sechs Directrices, die Orthogonalstrahlen zu den Brennpunkten. Die Kegelschnitte der Schar (C, A) sind auch hier mit C confocal. Das in Frage kommende Formelsystem gestaltet sich, da C und A auf ihr gemeinsames Poldreieck bezogen werden, sehr übersichtlich. Genauer wird auf die Curve eingegangen, von deren Punkten Tangentenpaare ausgehen, die unter einem gegebenen Winkel geneigt sind. Der Ort ist auch hier eine Curve vierter Ordnung. Ebenso wird die Fusspunktencurve eine rationale Curve vierten Grades, die ihren Pol und die Schnittpunkte s einer Polare mit A zu Doppelpunkten hat. Des Falles, wo der absolute Kegelschnitt in ein Punktepaar zerfällt, sowie des Falles, wo A und C eine einfache Berührung oder eine Osculation haben, wird besonders gedacht.

II. Auch hier gehen durch einen Punkt P zwei zu einem gegebenen confocale Kegelschnitte C_λ, $C_{\lambda'}$; beider Tangenten t, t' stehen auch hier auf einander senkrecht; auch hier haben confocale Kegelschnitte Haupt-Mittelpunkte und Haupt-Axen, das heisst ein Poldreieck mit A gemein. Falls nun A ein Punktepaar ist, aber auch nur dann, kann man eine zweite Schar confocaler Kegelschnitte aufstellen, die t, t' zu Axen haben, während von ihr durch den Mittelpunkt der ersten Schar zwei Kegelschnitte gehen, R_1 und R_2, die deren Haupt- und Neben-Axen

berühren; die beiden Axen von R_1 sind dann den Nebenaxen, die von R_2 den Hauptaxen von $C_{\lambda'}$ und $C_{\lambda''}$ gleich.

III. In der dritten Arbeit giebt Herr d'Ovidio zunächst Anwendungen des folgenden Satzes: „Besteht der absolute Kegelschnitt aus zwei Punkten, und drehen sich zwei Gerade so um feste Punkte, dass sie sich auf der Verbindungslinie der Punkte schneiden, so ist das Verhältnis der Producte der Segmente constant, welche, gerechnet von den festen Punkten aus, eine algebraische Curve auf zwei zusammengehörigen Geraden bestimmt". (Carnot'sches Theorem.)

Ein besonderes Verhalten tritt hinsichtlich der Axen ein. Die drei Seiten des A und C gemeinsamen Poldreiecks, seine Ecken und die von ihnen ausgehenden Geraden werden als Hauptaxen, Hauptmittelpunkte und Hauptdurchmesser bezeichnet [centri, diametri, assi principali], weil sie in der That genau wie Mittelpunkt und Axen eines Kegelschnittes fungiren. Andererseits aber werden als „Durchmesser" alle Tangenten des zu A hinsichtlich C polarreciproken Kegelschnittes A' bezeichnet. Zu einem Durchmesser sind die beiden anderen conjugirt, die durch seinen Pol hinsichtlich C gehen. Während eine Gerade an A' gleitet, beschreibt die ihr zugleich hinsichtlich C und A conjugirte Gerade eine rationale Curve vierter Klasse B; diese hat mit A' vier Axenpaare von C zu gemeinsamen Tangenten etc. Schliesslich werden die Resultate für den Fall modificirt, dass A in ein Punktepaar oder Geradenpaar ausartet. E. K.

C. Taylor. The elementary geometry of conics, with a chapter on the line at infinity. Cambridge. Deighton, Bell, and Co. [Nature XLIV. 517.]

E. C. Valentiner. Om Keglesnit. Nyt Tidss. for Mat. II 18-19.

Beweis zum Schulgebrauch für den Satz, dass ein ebener Schnitt eines elliptischen Kegels ein Kegelschnitt ist. V.

F. PALATINI. Sopra i triangoli formati coi lati dell' esagrammo di Pascal i quali possono ridursi ad un punto. Palmi. Tip. G. Lopresti. 10 S. 8°.

Sind sechs Punkte *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* eines Kegelschnittes *K* gegeben, so bilden die Seiten des vollständigen Sechseckes 15 Dreiecke, deren Ecken nicht auf *K* liegen. Diese Dreiecke geben 6 Figuren von je 5 Dreiecken, von welchen keine zwei eine gemeinsame Seite haben. Eine solche Figur wird z. B. von folgenden Dreiecken gebildet:

(*ad*, *bc*, *ef*); (*af*, *be*, *cd*); (*ae*, *bd*, *cf*); (*ab*, *ce*, *df*); (*ac*, *bf*, *de*).

Liegen jetzt die sechs Punkte *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* paarweise mit einem beliebigen Punkte *S* der Ebene auf einer Geraden, so haben wir ein Sechseck, für welches eines der 15 Dreiecke sich auf den Punkt *S* reducirt. Der Verfasser betrachtet nun Sechsecke, für welche mehrere Dreiecke sich auf Punkte reduciren, und findet u. a. folgenden Satz: Die Maximalzahl der Dreiecke eines Pascal'schen Sechseckes, welche sich auf einen Punkt reduciren können, ist sechs. In diesem Falle sind diese 6 Punkte die Ecken eines vollständigen Vierseits. Jede Gerade desselben zählt für drei Pascal'sche Gerade, sodass ausserdem noch 48 Pascal'sche Gerade übrig bleiben, etc. W. St.

A. ANDREJEW. Ueber Siebenecke von H. Schröter. Charkow Ges. (2) I. 277-280. (Russisch.)

Es handelt sich um den Beweis eines von H. Schröter ohne Beweis veröffentlichten Satzes über das einem Kegelschnitte umschriebene Siebeneck (Schlömilch Z. XXXIII. 374-375, F. d. M. XX. 1888. 623.) Si.

BÖGER. Eine allgemein gültige Construction einer Curve zweiter Ordnung durch fünf Punkte. Hamb. Mitt. II. 1-3.

Wählt man bei der Darstellung einer Involution zwei Elementenpaare, so giebt es unter diesen imaginäre, falls die Involution reelle Doppelelemente hat. Da solche imaginären Ele-

mentenpaare wieder durch zwei Elementenpaare darzustellen sind, so gehören zur Darstellung einer Involution zweimal zwei Elementenpaare. Bei dem Versuche, auf Grund dieser Darstellung einer Involution durch 4 Elementenpaare ein ebenes Polarsystem dritter Ordnung zu construiren, erhielt der Verfasser eine nur das Ziehen einer Reihe von Verbindungslinien erfordernde Construction der Curve zweiter Ordnung aus 5 Punkten, die hier mitgeteilt wird. Scht.

K. Schober. Zur Polarentheorie der Kegelschnitte.

Monatsh. f. Math. II. 469-478.

Nachdem Herr Stolz in seinen Vorlesungen eine lineare Construction eines Kegelschnittes aus fünf gegebenen Punkten auch in dem Falle angegeben hatte, dass vier von den fünf Punkten zwei Paare imaginärer Punkte constituiren, lag dem Verfasser die Frage nahe, ob man zu ähnlichen Constructionen gelangen könne, ohne den Begriff des Imaginären zu Hülfe zu nehmen. Bei der bejahenden Beantwortung dieser Frage gelangte er zu Sätzen, aus denen die gesuchten Constructionen unmittelbar fliessen. Dem Ausspruche dieser Sätze müssen folgende Definitionen vorangehen: „Ist *ABC* ein in der Ebene eines Kegelschnittes gelegenes Dreieck, so entstehen auf jeder Seite desselben zwei conjugirte Pole der Dreiecks-Ecken; solche zwei Pole sollen ein Paar „benachbarter" Pole heissen. Dagegen sollen als Paar zusammengehöriger Curvenpunkte zwei Punkte bezeichnet werden, die, dem Kegelschnitte angehörig, auf derselben Seite des Dreiecks liegen". Hiernach lauten die vom Verfasser bewiesenen Sätze: „Von den drei Paaren benachbarter Pole und den drei Paaren „zusammengehöriger" Curvenpunkte, welche durch einen Kegelschnitt auf den drei Seiten eines Dreiecks bestimmt werden, liegen auf je einem Kegelschnitte:

a) irgend ein Paar benachbarter Pole und die auf den beiden anderen Seiten gelegenen Paare zusammengehöriger Curvenpunkte;

b) je zwei Paare benachbarter Pole und das auf der dritten Seite gelegene Paar benachbarter Curvenpunkte." Scht.

E. C. VALENTINER. Om Konstruktioner af et Keglesnit med givet Braendpunkt og som gaver gjennem 3 givne Punkter. Nyt Tidss. for Math. II A. 138-139.

Ueber die Construction eines Kegelschnittes, wenn der Brennpunkt und drei andere Punkte gegeben sind. V.

F. PALATINI. Alcuni teoremi sulle coniche. Periodico di Mat. VI. 91-93, 131-133.

Der erste vom Verf. bewiesene Satz lautet: Sind ein Kegelschnitt und zwei Strahlenbüschel O, S in seiner Ebene gegeben; verbindet man S mit den Schnittpunkten der Curve mit den Strahlen des Büschels O, und bestimmt man die weiteren Treffpunkte dieser Verbindungslinien mit dem Kegelschnitt, so geht ihre Verbindungslinie durch einen festen Punkt O' der Geraden SO; O' ist harmonisch conjugirt zu S in Bezug auf O, und die Spur der Polare von O auf SO. — Die übrigen Sätze sind Folgerungen aus dem obigen; es scheint uns nicht der Mühe wert, dieselben niederzuschreiben, da sie sehr verwickelt und nach unserer Meinung nicht gerade wichtig sind; der Leser wird uns gewiss entschuldigen, wenn wir auch nicht bei einer Construction der Tangenten in einem Kegelschnittspunkte verweilen, welche länger und daher im Vergleich mit der allgemein bekannten nicht vorzuziehen sein dürfte. La.

H. BROCARD. Solution de la question 281. J. de Math. spéc. (3) V. 286-288.

Synthetischer Beweis des Satzes, dass bei jedem Mittelpunkts-Kegelschnitte die Tangente und Normale eines Punktes parallel sind zu den Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel, welche durch den Punkt, den zweiten Endpunkt des durch den Punkt gehenden Durchmessers und die beiden Brennpunkte bestimmt ist. Lp.

E. Duporcq. Nouvelle démonstration géométrique d'un théorème de M. Faure. Nouv. Ann. (3) X. 140-141.

Der Satz lautet: Die den in Bezug auf einen festen Kegelschnitt conjugirten Dreiecken umgeschriebenen Kreise schneiden einen dem Kegelschnitt concentrischen festen Kreis normal.

H.

T. Clugnet. Note de géométrie. Nouv. Ann. (3) X. 153-158. (Mit 8 Fig. im Text.)

Es wird folgender Satz nebst mehreren Zusätzen bewiesen: Beschreibt man aus einem beliebigen Punkte der Axe eines Kegelschnittes einen Kreis mit beliebigem Halbmesser und zieht vom Kreismittelpunkte eine Normale an den Kegelschnitt, so hat deren Fusspunkt gleiche Abstände von den parallelen Schnittsehnen zwischen Kegelschnitt und Kreis. Hk.

F. Machovec. Ueber die Krümmungscentra der Kegelschnitts-Evoluten. Casop. XX. 97. (Böhmisch.)

Reagirt auf Mannheim's Aufgabe: „Construire le centre de courbure de la développée d'une conique“, gelöst in den mathem.-naturw. Mitt. von Tübingen, 1889, indem darin des Verfassers Methode, wie sie in seinen „Beiträgen zur Construction der Tangenten und Krümmungsmittelpunkte ebener Curven“ (vgl. F. d. M. XX. 1888. 610) enthalten ist, mit Vorteil angewandt erscheint.

Std.

A. Schaeffer. Die Schar ähnlicher Kegelschnitte, welche einem Dreieck umschrieben sind, synthetisch behandelt. Diss. Rostock. 8°.

G. Kohn. Ueber einige projective Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone. Wien. Ber. C. 6-19.

Ein Polygon nennt man bekanntlich ein Poncelet'sches, wenn

es einem Kegelschnitt einbeschrieben ist und gleichzeitig einem zweiten umbeschrieben ist. Der Verfasser beweist nun für ein ungerades n den Satz: „Jedes Poncelet'sche n-Eck ist sich selbst polar in Bezug auf einen gewissen Kegelschnitt K, und zwar ist jede Seite die Polare ihrer Gegenecke; dieser Kegelschnitt K ist derselbe für alle die Poncelet'schen n - Ecke, welche denselben umbeschriebenen und denselben einbeschriebenen Kegelschnitt besitzen, und hat mit den beiden letztgenannten Kegelschnitten ein gemeinschaftliches Pol-Dreieck." Aus diesem für $n = 3$ bekannten Satze folgt auch ein von Herrn Hurwitz in seiner Arbeit über Schliessungsprobleme (Math. Ann. XV, F. d. M. XI. 1879. 398) bewiesener Satz. Für gerade n ergiebt sich der bekannte Zusammenhang zwischen Poncelet'schen n-Ecken und harmonischen Centralcollineationen. An diese Sätze schliesst der Verfasser analoge Sätze an, die sich auf die aufeinanderfolgenden gleichartigen Diagonalen Poncelet'scher Polygone beziehen, und überhaupt zeigt er, wie durch gewisse einfache Processe aus einem Poncelet'schen Polygone successive unendlich viele andere ableitbar sind. Die Specialisirung für $n = 5$ führt vielfach auf Resultate, die schon von Clebsch in seiner Abhandlung „Ueber das ebene Fünfeck" (Math. Ann. IV, F. d. M. III. 1871. 261) geliefert sind.

Scht.

W. Stegemann. Dreiecksscharen, Parabelscharen und Kegelschnittbüschel, welche durch drei ähnliche Punktreihen oder durch drei projective Strahlenbüschel erzeugt werden. Hoppe Arch. (2) X. 225-260.

Die auf den Seiten eines Dreiecks und auf deren Mittelsenkrechten liegenden ähnlichen Punktreihen, deren Aehnlichkeitsverhältnisse den Verhältnissen der Dreiecksseiten gleich sind, sowie die durch diese Punktreihen erzeugten Dreiecke und Parabeln waren schon von Herrn Artzt (Progr. des Gymn. zu Recklinghausen. 1884) untersucht worden. Bei dieser Untersuchung spielten der Grebe'sche Punkt, der Brocard'sche Kreis, die Brocard'schen Dreiecke und Punkte eine wichtige Rolle. Die über

die ähnlichen Punktreihen auf den Mittelsenkrechten gewonnenen Resultate wurden dann von Herrn Kiehl in Bromberg (Progr. d. Realg. in Bromberg, F. d. M. XX. 1888. 625) verallgemeinert, indem an die Stelle des Grebe'schen Punktes ein beliebiger anderer Punkt gesetzt wurde und, der Lage dieses Punktes entsprechend, die Aehnlichkeitsverhältnisse der Punktreihen geändert wurden. Die Parabelscharen ergaben sich dabei durch Drehung der Punktreihenträger. Die letzteren aber blieben an die Bedingung gefesselt, dass sie durch die Seitenmitten gehen und diese als entsprechende Punkte enthalten mussten. In der vorliegenden Abhandlung sind nun die Resultate dieser Abhandlungen verallgemeinert, indem die in vollkommen allgemeiner Lage gedachten Träger als das ursprünglich Gegebene aufgefasst sind, und ein Dreieck hinzugefügt ist, dessen Seiten auf den Trägern senkrecht stehen und durch drei homologe Punkte gehen.

Scht.

K. Dörholt. Die Enveloppe der Axen der einem Dreieck eingeschriebenen Parabeln. Pr. (No. 353) Gymn. Rheine. 38 S. 4°. (1 Fig.-Taf.)

Bekanntlich ist der Ort der Brennpunkte aller Parabeln, welche drei Strahlen berühren, der Umkreis des von den drei Strahlen gebildeten Dreiecks. Jeder Punkt des Umkreises ist Brennpunkt einer Parabel, deren Scheiteltangente man erhält, wenn man die Fusspunkte der von jenem Punkte auf die Seiten des Dreiecks gefällten Lote verbindet. Das Lot von jenem Punkte auf die Scheiteltangente giebt die Parabelaxe, auf der übrigens auch der Höhenschnittpunkt des Dreiecks liegt, dessen Seiten parallele Tangenten zu den Seiten des Original-Dreiecks sind. Ausgehend von diesen aus Steiner-Geiser's Theorie der Kegelschnitte bekannten Sätzen, entwickelt der Verfasser elementar-geometrisch die Eigenschaften der Curve, welche von den ∞^1 Axen der den Punkten des Umkreises als Brennpunkten zugehörigen Parabeln eingehüllt wird. Die Curve ist vierter Ordnung dritter Klasse. Ihre eine Doppeltangente ist die unendlich ferne Gerade. Die elementare Construction ihrer drei Spitzen

und Rückkehrtangenten wird abgeleitet. (Man vergleiche die bezüglichen Sätze bei Steiner, Gesammelte Werke II, S. 642ff.; bei H. Schröter, Ueber die Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde, J. für Math. LIV. 31-47. 1857, und bei Cremona, Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements, J. für Math. LXIV. 101-123, besonders S. 110ff. 1864.) Im metrischen Teile der Abeit findet der Verfasser die Länge der Curve gleich $16r$, ihren Inhalt gleich $2r^2\pi$, wo r den Radius des erwähnten Umkreises bedeutet. Von weiteren Ergebnissen, die sich an die mitgeteilten anschliessen, sei noch der folgende Satz erwähnt: „Wenn man zwei beliebige Radien eines Kreises sich um dessen Centrum so bewegen lässt, dass die von dem einen bestrichene Fläche stets doppelt so gross ist, als die von dem anderen bestrichene, so ist die Enveloppe der Verbindungsstrahlen der Endpunkte solcher Radien gerade die vom Verfasser untersuchte Curve“ (Erzeugungsweise von Kiepert: „Ueber Epicykloiden, Hypocykloiden und daraus abgeleitete Curven“. Schlömilch Z. XVII, F. d. M. IV. 1872. 354, ebenso bei Eckardt: „Einige Sätze über die Epicykloide und Hypocykloide,“ Schlömilch Z. XV, F. d. M. II. 1869/70. 520). Scht.

G. DE LONGCHAMPS. Développements sur les paraboles de M. Artzt. Progreso mat. I. 209-216, 250-253.

Artzt'sche Parabeln eines Dreiecks heissen bekanntlich die drei Parabeln, von denen je eine durch zwei Ecken des Dreiecks geht und in denselben die beiden anstossenden Seiten berührt. In dem vorliegenden Artikel stellt der Verf. die vornehmsten Eigenschaften dieser Parabeln zusammen. Tx. (Lp.)

BEDAUX. Sur le tracé des arcs de parabole. Génie civil. XVI. (1889/90.) 258.

Ist C der Endpunkt des zur Sehne AB conjugirten Durchmessers der Parabel, so ist der doppelte Abstand des Durchmessers von der Axe die vierte Proportionale zu der Projection der Halbsehne auf die Axe, ihrer Projection auf die Scheiteltangente und

demjenigen Teile des Durchmessers, welcher zwischen C und der Sehne liegt.

Auf diesen Satz gründet der Verfasser eine Construction der Parabel, von welcher der Scheitel und zwei symmetrisch zur Axe liegende Punkte gegeben sind. F. K.

Ph. Weinmeister. Ueber die Variation der Parallelprojection einer Ellipse mit der Richtung der projicirenden Strahlen und mit der Lage der Projectionsebene. Hoppe Arch. (2) X. 380-397.

Verf. untersucht die Beziehungen der verschiedenen Parallelprojectionen einer gegebenen Ellipse 1) bei fester Stellung der Projectionsebene und veränderlicher Richtung der projicirenden Strahlen, 2) bei fester Richtung der Strahlen und veränderlicher Projectionsebene, indem er u. a. diejenigen Projectionsellipsen ins Auge fasst, die einen gegebenen Flächeninhalt, oder eine gegebene Quadratsumme der Axen, oder ein gegebenes Axenverhältnis haben, und dabei zu interessanten Sätzen gelangt, die sich auf den Ort der Mittelpunkte, die Umhüllungscurve (bezw. den Umhüllungskegel), die Lage der Brennpunkte u. s. w. beziehen. Hk.

R. F. Davis. Elementary geometrical note on the „Frégier-point" of an ellipse. Ed. Times LIV. 129-131.

W. Panzerbieter. Dreiteilung jedes beliebigen Winkels mittelst einer festen Hyperbel. Hoppe Arch. (2) X. 333-336, 441-442.

Die trisecirende Hyperbel hat P zum Scheitel, B zum zugehörigen Brennpunkte, C zum anderen Scheitel, wenn BC die dem gegebenen Centriwinkel zugehörige Sehne und P ihr einer Trisectionspunkt ist. Dieselbe Hyperbel hat schon Herr Günther 1877 zur Winkeltrisection benutzt. Der zweite Teil enthält ausser

dieser und anderen Litteraturangaben noch Modificationen der Construction mittels derselben Hyperbel. Scht.

G. Tarry. Question 267. Solution et développements. J. de Math. spéc. (3) V. 255-259.

Von Herrn d'Ocagne sind folgende Sätze zum Beweise gegeben: Ist A ein beliebiger Punkt einer gleichseitigen Hyperbel, BC ein beliebiger Durchmesser mit den Endpunkten B und C, so ist die Tangente in A Symmediane des Dreiecks ABC. Gegeben sind zwei Punkte einer gleichseitigen Hyperbel und ihr Mittelpunkt; die Tangenten in diesen beiden Punkten zu construiren. Wenn ein Kreis und eine gleichseitige Hyperbel concentrisch sind, so sind die Tangenten in den Endpunkten ihres einen gemeinschaftlichen Durchmessers senkrecht zu dem anderen gemeinsamen Durchmesser. Herr Tarry beweist auf rein geometrischem Wege diese Eigenschaften und einige andere. Am Schlusse wird ein ganz kurzer anderer Beweis von Herrn Brocard mitgeteilt. Lp.

G. Leinekugel. Solution de la question 199. J. de Math. spéc. (3) V. 251-254.

Die von Herrn Boutin gestellte, von Herrn Leinekugel auf synthetischem Wege gelöste Aufgabe lautet: Auf den drei Seiten eines Dreiecks errichtet man in ihren Mitten Lote und trägt auf ihnen die Strecken ka, kb, kc ab; die Verbindungslinien der Endpunkte dieser Strecken mit den Gegenecken des Dreiecks gehen durch einen und denselben Punkt M. Bei veränderlichem k ist der Ort von M eine dem Dreiecke ABC umbeschriebene gleichseitige Hyperbel. Den Wert von k zu bestimmen, für welchen M im Unendlichen liegt. Herr Leinekugel zeigt, dass der gesuchte Ort durch den Höhenschnitt und den Schwerpunkt des Dreiecks geht. In Dreieckscoordinaten α, β, γ ist seine Gleichung

$$\alpha\beta \sin(A-B) + \beta\gamma \sin(B-C) + \gamma\alpha \sin(C-A) = 0.$$

Für das entsprechende räumliche Problem sind die Lote in

den Umkreiscentren der Dreiecke eines Tetraeders zu errichten und den Flächen dieser Dreiecke proportional zu nehmen; dann bilden die Verbindungslinien ihrer Endpunkte mit den Ecken des Tetraeders vier Erzeugende eines Hyperboloides. Lp.

H. BROCARD. Solution de la question 279. J. de Math. spéc. (3) V. 237-238.

Man beschreibe über einer Sehne AB einer gleichseitigen Hyperbel H als Durchmesser einen Kreis, der die Curve ausserdem noch in C und D schneiden möge; AD und BC treffen sich in I, AC und BD in J. Dann schneidet IJ die Axen von H in zwei Punkten L und N, die mit IJ eine isotomische Teilung bilden, d. h. $IL = NJ$ (Satz von G. de Longchamps). Lp.

P. SACK. Ueber Kreisbündel zweiter Ordnung. Jena. Neuenhahn. 32 S. 8°.

J. NEUBERG et P.-H. SCHOUTE. Généralisation d'un problème connu. Assoc. Franç. Marseille XX. 168-180.

Mit dem Namen „Normale unter dem Winkel α" bezeichnen die Verf. eine Gerade, welche mit der Tangente einer Curve in dem Berührungspunkte den Winkel α bildet. Um alle Normalen einer Curve unter dem Winkel α zu haben, stelle man sich vor, dass die Tangente an der Curve entlang gleite und die Normale unter dem Winkel α mit sich führe. Das behandelte Problem lautet: Man betrachtet 1) die einem gegebenen Dreiecke ABC umbeschriebenen Kegelschnitte S, bei denen die in den Ecken A, B, C unter dem Winkel α gezogenen Normalen durch einen und denselben Punkt P gehen; 2) die dem nämlichen Dreiecke eingeschriebenen Kegelschnitte S', bei denen die in den Berührungspunkten mit den Seiten unter dem Winkel α errichteten Normalen durch einen und denselben Punkt P' gehen. Zu beweisen, dass der Ort von P und der von P' eine und dieselbe kubische Curve ist, und dass eine andere kubische Curve

der Ort der Mittelpunkte O und O' der Kegelschnitte S und S' ist. Die Behandlung der Aufgabe benutzt vorzugsweise synthetische Methoden; doch werden auch die Gleichungen jener kubischen Curven entwickelt. Indem wir darauf verzichten, von den sonstigen interessanten Ergebnissen der Arbeit, insbesondere von den Beziehungen zur neueren Geometrie des Dreiecks Einzelnes mitzuteilen, weisen wir zum Schlusse nur auf die am Ende der Arbeit zusammengestellte Litteratur der Aufgabe für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ hin.

Lp.

E. Kötter. Einige Hauptsätze aus der Lehre von den Curven dritter Ordnung. Math. Ann. XXXVIII. 287-297.

Der Verfasser hatte in seinen „Grundzügen einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven" (Abhandlungen der Berl. Akad. v. Jahre 1887) rein geometrische Beweise für die unendlich vielfache projective Erzeugbarkeit der algebraischen ebenen Curven gegeben. Da sich diese Entwickelung für die Curven dritter Ordnung in bemerkenswerter Weise abkürzen lässt, so giebt er hier die besondere Behandlung der Curven dritter Ordnung als Erzeugnis projectiver Gebilde auf unendlich vielfache Weise. Die Resultate beziehen sich namentlich auch auf das Reell-Sein oder Conjugirt-imaginär-Sein der 4 Grundpunkte des Kegelschnittbüschels und der erzeugten Punkte der Curve dritter Ordnung selbst.

Scht.

M. Disteli. Ueber eine einfache planare Darstellungsweise der Gestalten der ebenen Curven dritter Ordnung. Schlömilch Z. XXXVI. 138-157.

Mit Hülfe einiger bekannter Eigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung entwickelt der Verfasser hier in einfachster Weise die Gestaltung dieser Curven. Der stets reelle unendlich ferne Punkt der Curve dritter Ordnung wird immer als gegeben vorausgesetzt, die beiden anderen Richtungen nach den unendlich fernen Punkten der Curve werden mit dem Zirkel bestimmt;

sonst sind alle Constructionen mit dem Lineal ausführbar. Ausser den Asymptoten werden auch die im Endlichen berührenden Tangenten construirt. Ausgehend von der bekannten Steiner'schen Verwandtschaft zwischen den Punktepaaren einer Ebene, findet der Verfasser die Darstellung aller Arten von Curven dritter Ordnung durch Verallgemeinerung der Constructionen, welche für die Kegelschnitte aus dieser Verwandtschaft fliessen. Hiernach zerfallen die zweiteiligen Curven bei dem Verfasser in: a) elliptische Serpentinen mit elliptischem Oval, b) elliptische Serpentinen mit parabolischem Oval, c) parabolische Serpentinen mit elliptischem Oval, d) elliptische Serpentinen mit hyperbolischem Oval, e) hyperbolische Serpentinen mit elliptischem Oval. Bei den einteiligen Curven werden besonders behandelt: a) circulare Serpentinen, b) parabolische Serpentinen, c) hyperbolische Serpentinen. Bei den rationalen Curven wird die gestaltliche Verschiedenheit natürlich dadurch bedingt, ob ein isolirter Punkt, ein Knotenpunkt oder ein Rückkehrpunkt vorhanden ist. Den Schluss der Abhandlung bildet der hübsche Satz: „Die Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt ist eine sich selbst entsprechende in jedem Polarsystem, welches das Dreieck *RWS* als Tripel harmonischer Pole und einen Punkt der Curve nebst einer Tangente als Paar entsprechender Elemente besitzt, falls *R* den Rückkehrpunkt, *W* den Wendepunkt, *S* den unendlich fernen Punkt bedeutet, den Rückkehrtangente und Wendetangente gemeinsam haben sollen“. Scht.

M. Disteli. Die Metrik der circularen ebenen Curven dritter Ordnung im Zusammenhang mit geometrischen Lehrsätzen Jacob Steiner's. Wolf Z. XXXVI. 255-305.

Die interessante Abhandlung enthält die Construction der Brennpunkte der allgemeinen und der speciellen circularen Curven dritter Ordnung nach Lage und Realität, sowie die geometrische Herleitung der hauptsächlichsten metrischen Eigenschaften dieser Curven, unter Zuhülfenahme der bekannten Steiner'schen Verwandtschaft in der Ebene und mit Ausschluss irgend eines

Coordinaten-Systems. Zunächst wird die zweiteilige Curve dritter Ordnung betrachtet. Dann werden die Betrachtungen auf einteilige und rationale Curven ausgedehnt. Scht.

M. d'Ocagne. Sur la construction des cubiques cuspidales (unicursales de la troisième classe). S. M. F. Bull. XIX. 103-104.

Es bezeichne bei einer ebenen Curve dritter Ordnung dritter Klasse J den Wendepunkt, R den Rückkehrpunkt, T den Schnittpunkt der Wendetangente und der Rückkehrtangente, P einen beliebigen Punkt der Curve, S den Schnittpunkt von JT mit der Tangente in P, U den Schnittpunkt von RP mit JT. Dann ist $(JUTS) = -\frac{1}{2}$. Hierzu fügt der Verfasser die folgende Erzeugungsart der Plancurve dritter Ordnung dritter Klasse. Man construire den zu RP bezüglich RT und RJ harmonisch conjugirten Strahl. Nun ziehe man durch T einen beliebigen Strahl, der den eben construirten in B schneidet und ferner RP in A, JP in C trifft. Ist dann D zu C bezüglich A und B harmonisch conjugirt, so erzeugt der Schnitt von RC und JD die Curve, wenn TA sich um T dreht. Scht.

H. Willig. Einfache Constructionen für eine Reihe von Unicursalcurven dritter Ordnung. Hoppe Arch. (2) X. 1-12.

Drei Methoden, nach denen man auf einfache Weise gewisse Arten von Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkten graphisch finden und discutiren kann.

1) Gegeben 2 Gerade x, y und eine Parabel (durch Brennpunkt und Leitlinie). Zieht man durch den Punkt, in welchem eine Parabeltangente t die Gerade x schneidet, eine Parallele zu y, und umgekehrt, so ist der Ort des Schnittpunktes beider Parallelen eine Unicursalcurve dritter Ordnung.

2) Wählt man auf einem Kegelschnitte den festen Punkt O_1 und den beweglichen P, und in seiner Ebene die festen Punkte O_2, O_3, zieht man durch O_3 zu O_1P die Parallele, so wird O_2P

von dieser Parallele in einem Punkte geschnitten, dessen Ort eine Unicursalcurve dritter Ordnung ist.

3) Alle Fusspunktcurven der Parabel sind Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte. R. M.

V. Martinetti. Teoremi sui poligoni di Steiner, inscritti in una curva di terzo ordine. Palermo Rend. V. 109-120.

V. Martinetti. Sui poligoni di Steiner inscritti in una curva piana di terzo ordine e relativi ad un numero qualunque di punti fondamentali. Milano. Tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C. 18 S. 8°.

Ein Punktepaar PP' einer Curve dritter Ordnung ist ein Steiner'sches von der Ordnung n, wenn ein und in Folge dessen unendlich viele $2n$-Ecke der Curve eingeschrieben werden können, von denen n nicht aneinander stossende Seiten durch P und die anderen n durch P' gehen. Es ist sattsam bekannt, dass die Verbindungslinie zweier Ecken, zwischen denen sich eine gerade Zahl anderer befindet, ebenfalls um einen festen Punkt der Curve sich dreht. Als eine Folge davon wird hier der Satz abgeleitet: Sind PP_1, P_1P_2, P_2P_3, ..., $P_{k-1}P'$ Steiner'sche Punktepaare von den Ordnungen n_1, n_2, ..., n_k, so ist PP' ein Steiner'sches Punktepaar von der Ordnung p, wo p das kleinste Vielfache der Zahlen n_1, n_2, ..., n_k ist.

In der zweiten Arbeit wird als ein auf die Punkte P_1, P_2, ..., P_n bezügliches Steiner'sches Punktsystem [spezzata di Steiner] eine Folge von Punkten

$$P_1, P_2, \dots, P_n, 1, 2, \dots, mn$$

einer Curve dritter Ordnung von der Art bezeichnet, dass die Geraden

$$[i+xn][i+xn+1] \qquad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

durch den Punkt P_i gehen.

Da allgemein die Geraden

$$[i+xn][i+xn+2h+1] \qquad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

durch einen festen Punkt gehen, so ergiebt sich bei ungeradem n zu n beliebigen Punkten ein geschlossenes System von $2n$

Punkten; bei geradem n ergiebt sich zuerst ein geschlossenes System von mn Punkten, und hernach unendlich viele, wenn der Drehpunkt der Geraden $1, n$; $n+1, 2n$; $2n+1, 3n$; ... mit P_n ein Steiner'sches Punktepaar m^{ter} Ordnung bildet. Ein solches Punktsystem wird in die n Klassen von Punkten

$$i, i+n, \ldots, i+(m-1)n$$

zerlegt. Je zwei Klassen besitzen die Eigenschaft, dass man aus m bestimmten Punkten der Curve die Punkte der einen in m cyklische Permutationen aus Punkten der anderen Klasse projiciren kann. Der Verfasser betrachtet nun Configurationen, die sich aus solchen Klassen zusammensetzen lassen. Specielle Configurationen dieser Art sind schon von Herrn de Vries betrachtet worden. E. K.

W. Rulf. Constructionen von Tangenten an einige höhere Curven mittelst Kegelschnitte. Hoppe Arch. (2) X. 446-448.

Ist AB der auf der Tangente T des Kreises K senkrecht stehende Durchmesser, und zieht man durch A einen beliebigen Strahl, der T in D und K in C trifft, und macht man $CP = CD$, so ist P ein Punkt der Strophoide, einer Curve dritter Ordnung. Wird diese Construction statt mittels A, K, T mittels A, L, T durchgeführt, wo L die Kreistangente in C ist, so entsteht eine Hyperbel, die in P dieselbe Tangente hat wie die Strophoide. Diese Hyperbel geht durch den Schnittpunkt von L und T, durch A und durch P und hat die Asymptotenrichtungen L und T. Ihre Tangente in P kann also leicht construirt werden, und damit auch die Strophoiden-Tangente in P. Bei der Cissoide ist der analoge Hülfs-Kegelschnitt auch eine Hyperbel, beim Cartesischen Blatt eine Parabel. Scht.

B. Sporer. Ueber eine besondere Transformation algebraischer Curven und damit in Verbindung stehende Sätze Jacob Steiner's. Schlömilch Z. XXXVI. 339-348.

Die im Titel genannte Transformation ist keine andere, als

die, welche den Punkt Q in Q_1 bezüglich eines Pols P verwandelt, wenn auf einem durch P gehenden Strahle Q und Q_1 harmonisch conjugirt zu den Schnittpunkten dieses Strahls mit einem Leit-Kegelschnitt liegen. Diese Transformation benutzt der Verfasser, um eine Reihe von Steiner'schen Sätzen (Ges. Werke, Band II) zu beweisen, die sich auf Curven dritten Grades, osculirende Kegelschnitte, doppelt berührende Kegelschnitte u. s. w. beziehen. Scht.

Otto Richter. Ueber die bicircularen Curven vierter Ordnung. Schlömilch Z. XXXVI. 191-192.

Im Anschluss an eine von uns besprochene Abhandlung [F. d. M. XXII. 1890. 663] giebt Herr Richter Sätze über dasjenige System viermal berührender Kegelschnitte einer bicircularen Curve vierter Ordnung, welches alle vier Doppeltangentenpaare und dazu die Verbindungslinie der Doppelpunkte enthält.

E. K.

C. Besondere räumliche Gebilde.

Fr. London. Ueber constructive Probleme aus der Theorie der reciproken Verwandtschaft und der Flächen zweiter Ordnung. Math. Ann. XXXVIII. 334-368.

Die vorliegende Abhandlung studirt gewisse abhängige Punktsysteme, welche bei der Theorie der reciproken Verwandtschaft und der Flächen zweiter Ordnung eine Rolle spielen, indem der analytische Ausdruck für die Abhängigkeit jener Systeme in die Form gewisser linearer Identitäten gekleidet wird, die vermöge ihrer anschaulichen geometrischen Interpretation geeignet sind, den Ausgangspunkt für die Behandlung jener Punktsysteme zu bilden. Dadurch gelangt der Verfasser zu Eigenschaften, die einen neuen einfachen Eingang zu der Lösung der fundamentalen Constructionsaufgaben eröffnen, die sich bei der Erzeugung

der reciproken und quadratischen Verwandtschaft, sowie der Flächen zweiter Ordnung und der Raumcurven vierter Ordnung erster Art darbieten. So löst der Verfasser in einfacher und übersichtlicher Weise die Probleme der Construction der quadratischen Verwandtschaft aus 7 entsprechenden Punktepaaren, sowie der Reciprocität aus 8 ihrer Nullpaare. Dann werden die gemeinsamen Nullpaare dreier Reciprocitäten aus 6 gegebenen construirt. Ein Specialfall dieses Problems führt zur Erzeugung der Raumcurve vierter Ordnung erster Art aus 8 Punkten. Ebenso führt ein Specialfall des Problems der Erzeugung der quadratischen Verwandtschaft aus 7 entsprechenden Punktepaaren auf die Construction der Flächen zweiter Ordnung aus 9 gegebenen Punkten. Eine andere Erzeugung der genannten Raumcurven und Flächen aus der hinreichenden Anzahl von Punkten ergiebt sich aus der directen Behandlung der linearen Identitäten, welche zwischen den Quadraten der linearen Formen bestehen, die die linken Seiten der Gleichungen von 9 Punkten einer Fläche zweiter Ordnung oder von 8 Punkten einer Raumcurve vierter Ordnung bilden. Den Abschluss bildet eine neue Lösung des viel behandelten Problems der linearen Construction des achten Schnittpunktes dreier Flächen zweiter Ordnung. Alle Constructionen, welche zu einer einzigen Lösung führen, sind natürlich auch linear angegeben. Scht.

Fr. Wilhelm. Ueber den Ort der Axen jener gleichseitigen hyperbolischen Paraboloide, welche zwei gegebene windschiefe Gerade enthalten. Monatsh. f. Math. II. 345-350.

Der im Titel erwähnte Ort, zu dem der Verfasser manche Constructionen liefert, ist schon mehrfach untersucht, auch von Sir Robert Ball, welcher aus der Mechanik her darauf geführt wurde (cf. Gravelius, Theoretische Mechanik starrer Systeme nach Ball, Berlin. 1889); ebenso wie neuerdings von Herrn Hübener (Mitt. d. Math. Ges. v. 1893). Der Ort ist eine Linienfläche, die den Namen Cylindroid führt. Scht.

Cl. Servais. Sur les sections circulaires dans les surfaces du second ordre. Belg. Bull. (3) XXII. 115-120.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. 88-89.

Der Verf. findet auf synthetische Weise die Eigenschaften der Kreisschnitte der Flächen zweiter Ordnung, indem er die Eigenschaften der Focalkegelschnitte mit denen der conjugirten rechtwinkligen Strahlencomplexe verknüpft. Mn. (Lp.)

H. Schnell. Scharen mit einander perspectiver Tetraeder. Diss. Giessen. 8°.

H. Menzel. Ueber die Bewegung einer starren Geraden, welche mit mehreren von ihren Punkten in festen Ebenen oder auf festen Geraden gleitet. Diss. Münster. 8°.

G. Kohn. Ueber die Sextupel von geraden Linien, welche von sämtlichen Punkten einer kubischen Fläche als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden. Monatsh. f. Math. II. 293-310.

Es ist bewiesen worden, dass der Ort der Spitzen aller Kegel zweiten Grades, welche sechs gegebene gerade Linien berühren, eine Fläche achter Ordnung ist. Schneiden sich zwei dieser Geraden, so bildet die durch sie bestimmte Ebene einen Bestandteil der Fläche. Nimmt man daher die Geraden so an, dass fünf Schnittpunkte entstehen, ohne dass drei Gerade in dieselbe Ebene fallen, so reducirt sich die Fläche auf eine Fläche dritter Ordnung. Diese hat ihren besonderen Charakter, je nachdem man die Lage jener Geraden noch besonderen Bedingungen unterwirft. Liegen fünf Gerade im Raum aber so, dass sie alle von einer sechsten getroffen werden, so ist die Fläche dritten Grades eine allgemeine, und es gilt daher der Satz: „Sechs gerade Linien einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung, von denen fünf windschief sind und alle von der sechsten getroffen

werden, erscheinen, von den sämtlichen Flächenpunkten aus gesehen, als sechs Tangenten eines Kegelschnitts." Von den Ergebnissen der weiteren Untersuchungen mag noch bemerkt werden, dass, wenn fünf Gerade ein räumliches Fünfeck bilden und die sechste eine beliebige Gerade *d* des Raumes ist, der Ort der Punkte, von denen aus diese sechs Geraden als Tangenten eines Kegelschnitts erscheinen, eine Regelfläche dritter Ordnung ist, welche die Gerade *d* zur Doppellinie besitzt.

Schn.

G. Kohn. Beweis eines Satzes von Cayley. Monatsh. f. Math. II. 343-344.

Sehr einfacher geometrischer Beweis eines Satzes von Cayley, welcher lautet: Auf einer Fläche dritter Ordnung liegen 45-mal drei Gerade so, dass sie ein ebenes Dreieck bilden. Durch jede Gerade eines solchen Dreiecks gehen noch vier andere solche Ebenen. Das Doppelverhältnis derselben ist gleich dem Doppelverhältnisse der vier anderen Ebenen, die ebenso durch eine zweite Gerade desselben Dreiecks gehen. Scht.

E. Ciani. Sulla superficie diagonale di Clebsch. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII_1. 227-234.

Die Diagonalfläche ist dadurch ausgezeichnet, dass sie die Punkte ihres Pol-Pentaeders enthält; mit jeder Ebene desselben hat sie die Diagonalen des Vierseits gemein, welches die in ihr liegenden Pentaederkanten bilden. Die anderen Geraden der Fläche bilden ein Schläfli'sches Doppelsechs. Die Hesse'sche Fläche der gegebenen enthält neben den Pentaeder-Kanten noch 10 Paare überzähliger Geraden. Von jeder Ecke gehen zwei aus, die in seiner „Diagonalebene" liegen [eine Diagonalebene enthält den Schnittpunkt dreier Pentaederebenen und die Schnittlinie der beiden übrigen]. Zwei Paare überzähliger Geraden treffen sich in zwei Punkten, wenn sie zu zwei Punkten einer Pentaederkante gehören, im anderen Fall aber nicht. Daher

liegen die überzähligen Geraden zu je dreien und mit je einer Pentaederkante in 20 Ebenen etc. etc.

Bei der allgemeinen Fläche dritter Ordnung entspricht jedem Punkte des Pol-Pentaeders ein Kegelschnitt [coniche opposte a vertici], den seine Polarebene aus der Hesse'schen Curve ausschneidet. Zwei Kegelschnitte, die Punkten derselben Pentaeder-Kante zugehören, schneiden sich in zwei Punkten, während sie im anderen Falle eine Doppeltangente der Hesse'schen Curve berühren etc. Im offenbaren Widerspruch mit dem Angeführten steht der Satz, dass die vier Kegelschnitte, die zu einer Diagonalebene des Pentaeders gehören, auf einer Fläche zweiten Grades liegen. E. K.

V. Jarolímek. Ueber einige geradlinige geometrische Oerter, insbesondere über ein specielles kubisches Konoid. Casop. XX. 1. (Böhmisch.)

Der geometrische Ort eines Punktes im Raume, dessen Abstände von zwei sich nicht schneidenden Geraden M, N ein constantes Verhältnis zu einander besitzen, ist bekanntlich ein geradliniges Hyperboloid, dessen eine Axe die kürzeste Strecke dieser Geraden enthält. Die Abhandlung giebt zunächst einen rein synthetischen Beweis dieses Satzes.

Sind die Abstände einander gleich, so geht das Hyperboloid in ein orthogonales hyperbolisches Paraboloid P über, dessen Scheitel den kürzesten Abstand von M und N hälftet. Drei sich nicht schneidende Geraden geben, zu zweien combinirt, drei Paraboloide, welche sich in einer gemeinschaftlichen Curve vierten Grades durchdringen, die zugleich als der geometrische Ort des Mittelpunktes einer Kugel angesehen werden kann, welche die 3 Geraden berührt. Vier Gerade bestimmen 6 Paraboloide mit 4 Durchdringungscurven vierten Grades, welche einander zu dreien in 8 Punkten schneiden. Damit sind auch die Mittelpunkte der möglichen 8 Kugelflächen gefunden, welche alle 4 Geraden berühren.

Hält man das hyperbolische Paraboloid P fest und bewegt

die Geraden M, N so, dass jeder Punkt der Fläche P von M und N gleiche Abstände besitzt, so erzeugen diese Geraden ein gerades Konoid dritten Grades, welches zur Leitgeraden Z die Axe von P hat, und dessen Richtebene Π senkrecht zu Z ist. Jede Ebene, welche durch irgend eine Erzeugende gelegt wird, schneidet das Konoid in dieser Erzeugenden und in einer Ellipse, welche Z schneidet und sich auf die Richtebene Π orthogonal als ein Kreis projicirt. Von Interesse ist auch die Form, die constructive und die analytische Behandlung der Isophoten des Konoids, wenn die Strahlenrichtung parallel zu einer Hauptebene angenommen wird. Std.

Ed. Weyr. Zur Theorie von Flächen, welche eine Schar von Kegelschnitten enthalten. Monatsh. f. Math. II. 351-412.

So wie die Anordnung der Berührungsebenen einer Regelfläche längs einer Erzeugenden von massgebender Bedeutung für die Eigenschaften einer Regelfläche ist, so ist die Anordnung der Berührungsebenen längs eines Kegelschnittes von grösster Wichtigkeit für die Eigenschaften der von Kegelschnitten erzeugten Flächen. Die vorliegende Arbeit studirt diese Anordnung in ausführlichster Weise. Sie ist eine Wiedergabe der in böhmischer Sprache erschienenen Schrift desselben Verfassers: „O theorii ploch“ (Prag. 1891). Zwischen zwei unendlich nahen Kegelschnitten S und S_1 einer von Kegelschnitten erzeugten Fläche liegt ein unendlich kleiner Streifen (SS_1), dessen Berührungsebenen von einer developpabeln Fläche eingehüllt werden, die höchstens vierter Klasse ist. Die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit sind folgende: Ein Flächenstreifen (SS_1) ist bestimmt, sobald der Kegelschnitt S und die Berührungsebenen des Streifens in 7 Punkten von S gegeben sind. Man kann dann die Berührungsebene in einem beliebigen Punkte von S construiren und entscheiden, ob die unendlich nahen Kegelschnitte keinen, einen oder zwei Punkte gemein haben. Im zweiten Falle wird der S und S_1 gemeinsame Punkt construirt; im dritten Falle können die den Kegelschnitten S und S_1 gemeinsamen Punkte

auf S beliebig gewählt werden. Weiterhin wird die Construction der Berührungsebenen einer solchen von Kegelschnitten erzeugten Fläche in dem Falle gegeben, dass die Fläche durch fünf Leitcurven und durch die developpable Fläche gegeben ist, welche die Ebenen jener Kegelschnitte umhüllt; im Zusammenhange damit wird die Klasse eines beliebigen Flächenstreifens (SS_1) der erzeugten Fläche bestimmt. Ferner wird gezeigt, dass ein von zwei unendlich nahen Kegelschnitten S und S_1 begrenzter Flächenstreifen (SS_1) Leitgerade besitzt, d. h. zwei derart gelegene Geraden, dass die durch einen Punkt von S zu ihnen geführte Transversale in die in jenem Punkte construirte Berührungsebene des Streifens fällt. Darauf folgt die Construction aller Leitgeraden eines Streifens. Im letzten Capitel werden einige rein geometrisch gefundene Resultate analytisch bestätigt.

Scht.

M. Pannelli. Sulla superficie del quarto ordine generata da due stelle di piani e da una rete di quadriche projettive fra loro. Batt. G. XXIX. 133-153.

Bezieht man auf die Punkte eines Raumes S' auf zwei Arten die Ebenen und auf eine Art die Flächen zweiter Ordnung eines Gebüsches eines Raumes S reciprok, so wird jedem Punkte von S' ein Punktepaar, jeder Geraden eine Curve fünfter Ordnung C_5 vom Geschlecht 2, jeder Ebene von S' eine Fläche vierter Ordnung Q_4 von der zu betrachtenden Art zugewiesen. Die Q_4 bilden ein Gebüsch mit einer Grundcurve K elfter Ordnung, auf welche die C_5 sich in 18 Punkten stützen. Umgekehrt gehört zu einer Geraden von S eine rationale Raumcurve vierter Ordnung C'_4, zu einer Ebene von S eine Fläche fünfter Ordnung Q'_5 mit einer Doppelcurve dritter Ordnung. Zunächst interessirt die „Grenzfläche“ L' des Raumes S', deren Punkten zusammenfallende Punkte im Raume S entsprechen. Dieselbe ist von der sechsten Ordnung und der 72sten Klasse. Sie kann definirt werden auch als Hüllfläche der Q'_5 oder auch der Ebenen, denen Q_4 mit Doppelpunkten entsprechen. Die Verminderung der Klassen-

zahl von $6.5^2 = 150$ auf 72 wird durch 39 Doppelpunkte bewirkt; 35 von ihnen entsprechen Geraden, den vier übrigen aber Kegelschnitte in S. Erstere haben vier, letztere acht Punkte mit K gemeinsam. Die Doppelfläche L selbst, von der zwölften Ordnung, ist die volle Jacobi'sche Fläche des Netzes der Q_4.

Jede einzweideutige Verwandtschaft bedingt eine conjugirte involutorische Verwandtschaft, in der zwei Punkte, denen derselbe Punkt des einfachen Raumes entspricht, einander zugewiesen werden. Diese conjugirte Verwandtschaft ist hier von der neunzehnten Ordnung und der siebenten Klasse, hat die Curve K zur Fundamentalcurve von der Vielfachheit 5; etc.

Nachdem Herr Pannelli einige seiner Resultate analytisch erläutert hat, geht er näher auf die eindeutige Abbildung der Q'_5 und die zweideutige der Q_4 auf die correspondirende Ebene (U bez. U') ein. Im Einklang mit Clebsch's Resultaten ergiebt sich, dass den ebenen Schnitten von Q'_5 Curven vierter Ordnung entsprechen, welche die elf Schnittpunkte der Ebene U mit K enthalten. Diesen Fundamentalpunkten entsprechen Gerade von Q'_5. Ihre Doppelcurve, der die Punktepaare einer Curve siebenter Ordnung entsprechen, hat 10 Cuspidalpunkte; etc. etc. Die Curven fünfter Ordnung, die bei der zweideutigen Abbildung von Q_4 auf die Ebene U' ebenen Schnitten von Q_4 entsprechen, haben drei Doppelpunkte und berühren die Grenzfläche L' in 15 Punkten; die Raumcurve dritter Ordnung von Q_4, deren Sehnencongruenz die beiden U' entsprechenden Ebenenbündel erzeugen, hat als Bild eine Curve achter Ordnung mit 21 Doppelpunkten und 24 Berührungspunkten mit der Grenzfläche, sie schneidet jede C_5 von Q_4 in acht Punkten, hat eine conjugirte Curve 37ster Ordnung; etc. etc. E. K.

K. Rohn. Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species. II. Leipz. Ber. XLIII. 1-23.

Nachdem in dem ersten Teile dieser Untersuchungen allgemeine Eigenschaften der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art

abgeleitet worden waren, beschäftigt sich der Verfasser hier mit der Realität der auftretenden Gebilde. Es werden fünf Typen für diese Curven abgeleitet. Bei I, II, III ist das Fundamentaltetraeder reell.

I. Die Curve R_4 besitzt vier reelle berührende Trisecanten; die vier stationären Ebenen und die in der Hauptebene liegenden Curvenpunkte sind imaginär. Die Doppelcurve der Tangentenfläche ist reell.

II. Die Curve besitzt 4 reelle stationäre Ebenen; die berührenden Trisecanten und die in der Hauptebene liegenden Curvenpunkte sind imaginär. Alle Trisecanten haben nur je einen reellen Punkt mit der Curve gemein. Die Doppelcurve der Tangentenfläche ist reell, aber teilweise isolirt.

III. Die Curve besitzt weder reelle stationäre Ebenen noch reelle berührende Trisecanten; die Curvenpunkte in der Hauptebene sind reell. Jede Trisecante schneidet in drei reellen Punkten. Die Doppelcurve der Tangentenfläche ist imaginär. Jede Ebene schneidet C_4 mindestens in zwei reellen Punkten.

IV. Hier besitzt das Fundamentaltetraeder nur zwei reelle Gegenkanten. Auf einer derselben liegen zwei reelle Ecken, durch die andere gehen zwei reelle Seitenflächen, darunter die Hauptebene. Die C_4 hat zwei stationäre Ebenen und zwei reelle berührende Trisecanten; ebenso liegen zwei reelle Punkte von C_4 in der Hauptebene. Die Doppelcurve der Tangentenfläche ist reell.

V. Die C_4 ist vollständig imaginär; die Doppelcurve der Tangentenfläche aber reell. Das Fundamentaltetraeder ist reell.

In dem weiteren Verlauf der Arbeit werden specielle Raumcurven vierter Ordnung auf ihre Realitätsverhältnisse hin untersucht. **W. St.**

EM. WEYR. Ueber Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlecht Eins. II. Mitteilung. Wien. Ber. C. 457-466.

Anschliessend an die Mitteilung I über diese Raumcurven (Wien. Ber. XCIX. 932), untersucht der Verfasser diejenigen

Flächen dritter Ordnung F_3 des durch die R_6 und die drei Quadrisecanten Q_i als Grundcurve bestimmten Büschels, welche einen Knotenpunkt haben. Im ganzen giebt es in einem Büschel 32 solcher Flächen, welche hier in mehrere Klassen einzuteilen sind, erstens solche, deren Knotenpunkte auf dem Hyperboloid H der drei Quadrisecanten Q_i liegen, und zweitens solche, deren Knotenpunkte nicht auf H liegen. Die auf H liegenden Knotenpunkte sind wieder einzuteilen in solche, welche auf den Geraden Q_i sich befinden, und solche, welche nicht diesen Geraden angehören. Jeder Knotenpunkt K, welcher gemeinsam ist einer Q_i und R_6, ist zweimal zu zählen, sodass noch zwei Gruppen von je 4 Knotenpunkten übrig bleiben, von welchen die erste auf H liegt, die zweite aber nicht.

Zunächst werden die Flächen F_3 betrachtet, deren Knotenpunkte K die Schnitte Q_i mit R_6 sind, und es wird die Anordnung der auf diesen Flächen liegenden Geraden untersucht. Dann zeigt der Verfasser, dass die Knotenpunkte, welche dem Hyperboloid H, aber nicht den Q_i angehören, in folgender Weise bestimmt werden. Die Flächen F_3 des Büschels schneiden auf dem Hyperboloid H je drei Gerade N einer kubischen Involution erster Stufe aus, deren vier Doppelelemente je einen Knotenpunkt enthalten. Die Anordnung der Geraden auf einer solchen F_3 wird nun angegeben. Ferner werden die Flächen betrachtet, deren Knotenpunkte ausserhalb H liegen, und es wird gezeigt, dass ein jeder solcher Punkt der Schnittpunkt dreier Trisecanten der R_6 ist. Zum Schlusse werden Constructionen für die nicht auf den Q_i liegenden Knotenpunkte mitgeteilt.

W. St.

Th. Schmid. Ueber die Beleuchtungscurven der windschiefen Helikoide. Monatsh. f. Math. II. 333-342.

Schon in der früheren Abhandlung des Verf. „Ueber Berührungscurven und Hülltorsen der windschiefen Helikoide u.s.w." (F. d. M. XXII. 1890. 680) war implicite die Lösung des Beleuchtungsproblems für jene Fläche enthalten, insofern die

Beleuchtungscurven die Berührungscurven von Hülltorsen vorstellen, deren Directionskegel gleichmässige Beleuchtung zeigen (Rotationskegel mit Axe parallel der Lichtrichtung, bezw. Kegel zweiter Ordnung mit Focallinien parallel der Licht- und Sehrichtung). In der vorliegenden Abhandlung wird nun genauer hierauf eingegangen, indem unter Benutzung der Ergebnisse des früheren Aufsatzes die Construction und Discussion der Hauptprojection der Isophoten und Isophengen für die allgemeine Fläche und deren besondere Arten ins Detail verfolgt wird. Die Vorzüge der vom Verf. eingeführten Behandlungsweise treten hiebei erneut zu Tage. Hk.

H. Thieme. Ueber einen orthogonalen Reye'schen Complex. Schlömilch Z. XXXVI. 349-355.

Der Verfasser leitet die Eigenschaften des Complexes ab, der von allen Geraden des Raums gebildet wird, die von zwei festen Punkten gleiche Entfernung haben. Der Complex erweist sich als ein Reye'scher. Alle Geraden, welche von drei gegebenen Punkten gleiche Entfernung haben, bilden eine Congruenz vierter Ordnung dritter Klasse. Scht.

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

F. Amodeo. Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria projettiva di uno S_r. Torino Atti XXVI. 741-770.

Der Verfasser hält, um die Geometrie des Raumes S_r zu begründen, $r+5$ Postulate für nötig, von denen $r+2$ dazu dienen, den Raum S_r im Riemann'schen Sinne aufzubauen, die übrigen drei nötig sind, um durch fundamentale Doppelverhältnisse den Punkt im Raume S_r festlegen zu können. Die drei ersten Postulate sind, dass Punkte existiren, dass je zwei von ihnen eine Gerade und je drei eine Ebene als Träger von ∞^1

Punkten und Geraden bestimmen. Um einen Raum S_i zu erhalten, braucht man nun bekanntlich ausserhalb eines S_{i-1} nur noch einen Punkt zu postuliren und diesen mit allen Punkten von S_{i-1} durch Gerade zu verbinden. Dass eine solche Mannigfaltigkeit die charakteristischen Eigenschaften eines linearen Raumes besitzt, wird in der üblichen Weise nachgewiesen [§ 1].

Um die eindeutige Beziehung zwischen den Punkten einer Geraden und den Werten einer numerischen Veränderlichen herzustellen, macht Herr A. das Postulat, dass man von jedem Punkte zu jedem anderen Punkte einer Geraden in zwei (entgegengesetzten) Richtungen gelangen könne, und zwar auf stetige Weise (successivamente). Hieraus wird gefolgert, dass vier Punkte einer Geraden auf eine Art in zwei getrennte Paare zerlegt werden können, und es wird mit Hülfe des Satzes vom vollständigen Vierseit der Begriff des harmonischen Trennens abgeleitet. Von drei festen Punkten a, b_0, b_1 ausgehend, wird nun die unendliche Reihe

$$\ldots,\ b_{-3},\ b_{-2},\ b_{-1},\ b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$$

durch die Forderung abgeleitet, dass b_i und a die Punkte b_{i-1} und b_{i+1} harmonisch trennen; die erhaltenen Punkte werden mit den Zahlen

$$\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

bezeichnet, und es wird postulirt, dass mit wachsendem n b_n, und folglich auch b_{-n} sich der Lage a (∞) nähern. Projicirt man nun eine analoge Reihe von Punkten so auf die erste, dass die Punkte 0, m, ∞ derselben auf die Punkte 0, 1, ∞ der ersten fallen, so fallen überhaupt die Punkte

$$\ldots,\ -3m,\ -2m,\ -m,\ 0,\ m,\ 2m,\ 3m,\ \ldots$$

auf die Punkte

$$\ldots,\ -3,\ \ -2,\ \ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ 3,\ \ldots$$

der ersten Reihe. Die $m-1$ Punkte, welche hierbei zwischen n und $n+1$ gelangen, erhalten die Zahlen

$$n+\frac{1}{m},\ n+\frac{2}{m},\ \ldots,\ n+\frac{m-1}{m},$$

und es hat nun jede rationale Zahl ihren zugehörigen Punkt. (Man vergleiche übrigens Herrn F. Klein's Aufsatz: „Ueber die so-

genannte nichteuklidische Geometrie", Math. Ann. XXXVII. 1890). Erhält nun ein beliebiger Punkt p nicht schon eine rationale Zahl, so kann ihm eine bestimmte irrationale Zahl $r+r'$ beigelegt werden, wo r eine ganze Zahl ist und r' ein Kettenbruch, dessen Zähler gleich 1 und dessen Nenner ganze Zahlen sind. Je zwei auf einander folgende Näherungswerte bestimmen Punkte, zwischen denen p liegt. Dass aber die Reihe der so erhaltenen rationalen Punkte eine Grenze hat, nämlich p, scheint mir keineswegs bewiesen zu sein. Es könnte die eine Reihe von Näherungswerten einen Grenzpunkt vor, die andere einen solchen hinter dem gegebenen Punkte haben, und dann wäre jeder Punkt zwischen beiden Grenzlagen mit $r+r'$ zu bezeichnen. Giebt man zu, dass diese Verschiedenheit der Grenzlagen nicht eintreten kann, so ist meines Erachtens das $(r+5)^{\text{te}}$ Postulat ein zu beweisender Satz. Dasselbe drückt aus, dass, wenn man eine irrationale Zahl auf verschiedene Art als limes einer rationalen Zahl definirt, die entsprechenden Punkte derselben Grenzlage zustreben. Im § 3 wird nun, nach Einführung des Doppelverhältnisses, die Bestimmung eines Punktes von S_r gegen $r+1$ unabhängige Punkte durch $r+1$ Doppelverhältnisse erörtert.

E. K.

C. Segre. Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi. Palermo Rend. V. 192-204.

Indem der Verf. das „neue Feld geometrischer Forschungen" bearbeitete, welches er durch die Abhandlung zugänglich gemacht hat, über die wir im vorigen Bande des Jahrbuchs berichtet haben (F. d. M. XXII. 1890. 609), wurde es nötig, eine Aufgabe zu lösen, deren Verallgemeinerung zu dem Aufsatze Anlass gab, mit dem wir uns jetzt beschäftigen sollen. Wenn auch diese Arbeit somit nach ihrem Ursprunge als ein Nebenproduct der Aufstellung einer allgemeinen Theorie erscheint, so hat sie doch ihren eigenen Wert und verdient eine besondere Betrachtung.

Seien R_p, R_q, ... k Räume resp. von p, q, ... Dimensionen;

man betrachte die Gruppen von k Punkten, jeder in einem der gegebenen Räume, als Elemente einer neuen Mannigfaltigkeit von $\sigma = p+q+\cdots$ Dimensionen. Die Mannigfaltigkeit M_σ, welche diese Darstellung in der einfachsten Weise bewerkstelligt, ist diejenige, welche im linearen Raume von $(p+1)(q+1)+\cdots-1$ Dimensionen aus den Punkten besteht, deren Coordinaten folgende Ausdrücke haben:

$$(1) \qquad X_{lm\ldots} = x_l y_m \ldots \quad (l = 0, 1, \ldots, p;\ m = 0, 1, \ldots, q;\ \ldots),$$

wo x_l, y_m, ... die Coordinaten der Punkte in R_p, R_q, ... sind. Die Ordnung von M_σ ist $\dfrac{\sigma!}{p!\,q!\ldots}$. Ist insbesondere $k = 2$, so hat man eine bemerkenswerte Mannigfaltigkeit der Ordnung $\binom{p+q}{q}$, welche in einem $(pq+p+q)$-dimensionalen Raume enthalten ist und zwei ∞^p und ∞^q Reihen resp. von R_p und R_q enthält. Andere Eigenschaften derselben findet der Leser in der Originalarbeit selbst. Ist ferner $p = q = 1$, so bekommt man die bekannte Darstellung der Geometrie zweier Formen erster Stufe auf einer gewöhnlichen Quadrifläche. Ist $p=2$, $q=1$, so gelangt man zu einer bekannten dreidimensionalen kubischen Mannigfaltigkeit. Ist endlich $p = 2$, $q = 2$, so erhält man eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit Σ 6[ter] Ordnung des achtdimensionalen Raumes, deren Punkte die Punktepaare aus zwei Ebenen π, π' darstellen. Σ wird vom Verf. gründlich erforscht mit Methoden, welche auch auf den allgemeinen Fall $p = q = n$ passen. Im Falle $n = 2$ kann Σ aber zwei verschiedene Fälle darbieten, den elliptischen und den hyperbolischen. Nun ist es höchst bemerkenswert, dass im elliptischen Falle Σ durch ihre reellen Punkte alle (complexen) Elemente eines Grundgebildes zweiter Stufe darstellen kann, wie eine gewöhnliche Quadrifläche (z. B. eine Kugelfläche) durch ihre reellen Punkte alle (complexen) Elemente eines Grundgebildes erster Stufe darstellen kann. Auf welche Weise man diese Darstellungen benutzen kann, wird vom Verf. am Ende dieser Abhandlung beiläufig gesagt und in einer längeren Arbeit, von welcher der nächste Band des Jahrbuchs Nachricht geben wird, ausführlicher erörtert. La.

F. Amodeo. Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche di ordine n normali di uno S_{n-1}. (Memoria I.) Annali di Mat. (2) XIX. 1-27.

F. Amodeo. Corrispondenze univoche singolari delle curve ellittiche armoniche ed equianarmoniche. (Memoria II.) Annali di Mat. (2) XIX. 145-157.

Die Theorie der eindeutigen Correspondenzen auf elliptischen Normalcurven ist durch eine grössere Reihe von Arbeiten, die von speciellen Gesichtspunkten allmählich zu allgemeineren vorschritten, soweit gefördert worden, dass sich ein Ueberblick über die ganze Theorie gewinnen und gleichzeitig erkennen lässt, wo noch Lücken auszufüllen und Erweiterungen vorzunehmen sind. Eine Behandlung des Gegenstandes in diesem Sinne geben die vorliegenden, besonders an die Arbeiten der Herren Weyr und Segre anknüpfenden beiden Abhandlungen. — Die erste derselben enthält allgemeine Sätze über Correspondenzen auf elliptischen Normalcurven im $(n-1)$-dimensionalen Raume in einheitlicher synthetischer Behandlungsweise. Von besonderer Bedeutung ist der von Herrn Segre gefundene Satz über die Anzahlen der eindeutigen Correspondenzen bei allgemeiner Lage, harmonischer und anharmonischer Beziehung der beiden zu Grunde gelegten Curven. Diese drei Fälle werden eingehend discutirt. Ein weiterer Abschnitt bringt Sätze über die den Curven einbeschriebenen Polygone mit einer Anwendung auf cyklische Correspondenzen und Steiner'sche Polygone. — In der zweiten Abhandlung giebt der Verf. Sätze über die Transformationen der Correspondenzen in sich und über die singulären Correspondenzen der harmonischen und anharmonischen elliptischen Curven. Schg.

V. Schlegel. Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à n dimensions. Palermo Rend. V. 1-8.

Die n-dimensionale Erweiterung des Begriffs der homogenen Polygone und Polyeder führt bei beliebigem n zu drei Arten

von homogenen Körper-Gebilden in einem n-dimensionalen linearen Raume, nämlich erstens zu der Reihe A, die mit dem Dreieck, Tetraeder, Fünfzell beginnt; zweitens zu der Reihe B, die mit dem Viereck, Hexaeder, Achtzell beginnt; drittens zu der Reihe C, die mit dem Viereck, Oktaeder, Sechzehnzell beginnt. Ein n-dimensionales Körpergebilde nennt der Verfasser homogen, wenn es nur von $(n-1)$-dimensionalen linearen Räumen begrenzt wird, und wenn ausserdem in allen Grenzgebilden sich immer gleichviel homogene Körpergebilde niederer Dimension befinden. Specialfälle dieser homogenen Körpergebilde sind die n-dimensionalen Erweiterungen der regulären Polyeder. Je nachdem ein homogenes Körpergebilde der Reihe A, B, C angehört, soll es A_n, B_n, C_n heissen. Für die Anzahl der r-dimensionalen Räume, welche A_n, B_n, C_n begrenzen, ergiebt sich beziehungsweise:

$$\text{a)}\ \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!}; \quad \text{b)}\ \frac{n!\,2^{n-r}}{r!\,(n-r)!}; \quad \text{c)}\ \frac{n!\,2^{r+1}}{(r+1)!\,(n-r-1)!}.$$

Diese drei Arten von Gebilden stellt der Verfasser nun durch ebene Zeichnungen dar. Am einfachsten gestaltet sich die ebene Darstellung von A_n. Sie besteht aus einem $(n+1)$-Ecke mit seinen Seiten, Diagonalen, Dreiecken, Vierecken etc. Die $n+1$ Ecken stellen die Punkte des A_n dar, die $\frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!}$ Verbindungsgeraden der $n+1$ Ecken stellen die Kanten des A_n dar u. s. w. Die ebenen Darstellungen von B_n und C_n gehen bezw. von einem 2^n-Ecke und einem $2n$-Ecke aus; doch sind in diesen Fällen gewisse Diagonalen zu unterdrücken und gewisse Verbindungs-Strahlen hinzuzufügen. Scht.

P. H. Schoute. Voordracht over de regelmatige lichamen in ruimte van meer dimensies. Algemeene Vergadering van het derde natuur- en scheikundig congres te Utrecht.

Zusammenstellung der bisher ermittelten elementaren Eigenschaften der regelmässigen Körper von vier (und mehr) Dimensionen nebst Formeln zur Berechnung der von ihren Grenz-

gebilden eingeschlossenen Winkel und Beschreibung der Methode, nach welcher diese Körper sich durch dreidimensionale Projectionsmodelle veranschaulichen lassen. Hinzugefügt ist ein Litteratur-Verzeichnis. Schg.

E. WAELSCH. Zur Construction der Polargruppen. Wien. Ber. O. 315-326.

Bericht auf S. 646 dieses Bandes.

E. Abzählende Geometrie.

M. PIERI. Formule di coincidenza per le serie algebriche ∞^n di coppie di punti dello spazio a n dimensioni. Palermo Rend. V. 252-268.

In einem linearen Raume n^{ter} Dimension sei eine n-fach unendliche algebraische Reihe von Punktepaaren PP' gegeben. Ein Doppelpunkt der Reihe heisst jedes Paar zusammenfallender Punkte, und eine Hauptgerade [rette principale] jede zwei unendlich nahe Punkte verbindende Gerade. Die Doppelpunkte sind auf n Orte 0ter, 1ter, ..., $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension verteilt, die teilweise fehlen können, derart, dass den Punkten der Mannigfaltigkeit von i Dimensionen ein Kegel $(n-i)^{\text{ter}}$ Dimension von Hauptstrahlen adjungirt ist. Unter Benutzung des „Princips der speciellen Lage“ und unter Anwendung der Bezeichnungen des Herrn H. Schubert erweitert Herr Pieri zunächst die Resultate desselben. Von den entstehenden Incidenz-Formeln seien folgende hier angeführt:

$$\alpha_i)\quad \sum_{j=0}^{j=n-1}(j)(n-j)'-(i-1,n)(n-i)=\sum_{j=i}^{j=n-1}\varepsilon(j,n)(n-j)$$
$$(i=0,1,\dots,n-1)$$

und mit ihnen nahe zusammenhängend

$$\beta_i)\quad (n-i)(i)'+(i,n)(n-i-1)-(i-1,n)(n-i)=\varepsilon(i,n)(n-i)$$
$$(i=0,1,\dots,n-1).$$

Eine andere Methode führt auf die Bestätigung dieser Formeln und ergiebt die neuen

$$\gamma_i)\quad \varepsilon(0, n)+\varepsilon(1, n-1)+\cdots+\varepsilon(i, n-i) = (n-i-1, n)(i)+(n-i-1, n)(i)'+i(n-i-1) \quad (2i+1 \leqq n,),$$

wobei das Symbol $(i, n-i-1)$ den Wert 0 hat, wenn $2i+1=n$ ist.

In dem zweiten Teil der Arbeit wird folgende Formel aufgestellt. Wenn zwei algebraische Mannigfaltigkeiten M_k^m, $M_{k'}^{m'}$ eines Raumes von $n=k+k'$ Dimensionen durch eine Mannigfaltigkeit F_χ gehen, aber in jedem Punkte derselben bestimmte und verschiedene Tangentialräume S_k und $S_{k'}$ besitzen, ausserhalb F_χ aber nur Punkte gemeinsam haben, so ist deren Anzahl

$$N = mm' - \sum_{i=n-\chi}^{n} y_{(i)},$$

wobei $y_{(i)}$ die Ordnung der Punkt-Mannigfaltigkeit von i Dimensionen ist, welche von den $\infty^{i-(n-\chi)}$ Räumen $S_{n-\chi}$ ausgefüllt wird $(n-\chi \leqq i \leqq n)$, von denen jeder beide Mannigfaltigkeiten M und M' in einem Schnittpunkte von F mit einem S_i berührt, also die betreffenden Räume S_k und $S_{k'}$ enthält. E. K.

H. Schubert. Ueber eine Verallgemeinerung der Aufgaben der abzählenden Geometrie. Hamb. Mitt. III. 12-20.

Die Hauptaufgabe der abzählenden Geometrie lautet bekanntlich: die Zahlen x zu bestimmen, welche angeben, wie viele geometrische Gebilde Γ z_1-mal die Bedingung Z_1, z_2-mal die Bedingung Z_2 u. s. w. erfüllen. Die in Rede stehende Verallgemeinerung dieser Aufgabe besteht darin, dass bei der jedesmaligen Bestimmung von x die Grössen z_1, z_2, ... nicht mehr, wie bisher, durch specielle Zahlenwerte ersetzt werden, sondern dass x als Function dieser allgemein gedachten Zahlen darzustellen ist. Die vom Verf. schon früher in dieser Richtung hin-

sichtlich linearer Gebilde erzielten, hinsichtlich der Kegelschnitte angebahnten Resultate werden hier vervollständigt durch Mitteilung der allgemeinen Kegelschnittformel, sowie entsprechender Formeln für Punktepaare, Strahlenpaare, Ebenenpaare, projective Punktreihen und Strahlenbüschel und correlative Ebenen. In diesen allgemeinen Formeln ist eine Reihe specieller Anzahlen enthalten, die früher einzeln von Chasles, Sturm, Hirst und dem Verf. berechnet worden sind. Schg.

H. SCHUBERT. Beziehungen zwischen den linearen Räumen auferlegbaren charakteristischen Bedingungen. Math. Ann. XXXVIII. 598-602.

Die in einer früheren Arbeit „Anzahlbestimmungen für lineare Räume" (s. F. d. M. XVIII. 1886. 632) vom Verf. abgeleitete Hauptformel wird hier verallgemeinert. Die Vergleichung beider Resultate ergiebt eine beachtenswerte Beziehung zwischen zwei Determinanten. Schg.

H. SCHUBERT. Mitteilung aus der abzählenden Geometrie p-dimensionaler Räume ersten und zweiten Grades. Naturf. Ges. Halle. LXIV. 9-10.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Capitel 1.

Lehrbücher, Coordinaten.

F. Lindemann. Vorlesungen über Geometrie unter besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch. Zweiten Bandes erster Teil. Die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Klasse und der lineare Complex. Leipzig. B. G. Teubner. VIII + 650 S. gr. 8°.

Der vorliegende Band ist die Fortsetzung des im Jahre 1875 in demselben Verlage erschienenen Werkes: A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie. Bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann. Ref. F. d. M. VIII. 1876. 421. Die Veränderung des Titels entspricht dem Umstande, dass noch mehr, als bereits im ersten Bande, die selbständigen Untersuchungen und Ausführungen des Verfassers gegenüber dem von Clebsch herrührenden Material in den Vordergrund getreten sind. Und dies gereicht dem ganzen Werke nur zum Nutzen, da wir so auch die Resultate der neueren geometrischen Forschungen in demselben niedergelegt finden, während andererseits in der Vorrede und in den litterarischen Anmerkungen hinlänglich angegeben ist, welche Abschnitte speciell von Clebsch herrühren. Das Werk, sowie es jetzt vorliegt, vereinigt grosse Vorzüge in sich, wie man sie selten beisammen findet. Es ist ausgezeichnet durch strenge

begriffliche Durcharbeitung, die keiner Schwierigkeit aus dem Wege geht und bis auf die philosophischen Grundlagen des mathematischen Erkennens zurückgreift; dann durch die Fülle des gebotenen Stoffes, ferner durch pädagogisch geschickte Anordnung und Entwickelung, wie durch eine schlichte Darstellung, die immer den Punkt, auf den es gerade ankommt, scharf hervorzuheben weiss, und endlich auch durch grosse Gewissenhaftigkeit in litterarischen Bemerkungen und Quellenangaben, die sich bis auf die anderen Werken entlehnten Figuren erstreckt.

Der Inhalt ist in drei Abteilungen von bezw. 8, 21 und 13 Capiteln geteilt.

Die erste Abteilung, Seite 1-130, behandelt: Punkt, Ebene und Gerade. Nach Einführung rechtwinkliger Coordinaten, des Richtungswinkels und des Vectors werden zwei Punkte betrachtet, und die Gleichungen

$$x_1 - x_2 = r\cos\alpha \text{ und die analogen}$$

führen sofort zur Aufstellung der Gleichungen einer Geraden und der „Parameterdarstellung“ und weiter auch zur Gleichung der Kugel und zu ihrer Parameterdarstellung. Hieran wird die Auseinandersetzung der Methoden zur analytischen Behandlung von Curven und von Flächen überhaupt geknüpft. Hierauf wird der Winkel zweier Richtungen, der kürzeste Abstand zweier Geraden bestimmt und dann die Gleichung der Ebene aufgestellt und schliesslich in die Form

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

gebracht, aus welcher sofort das Princip der Dualität gewonnen wird, das nun gleich genauer ins Auge gefasst wird, um später als bereites Hülfsmittel bei den folgenden Untersuchungen zu dienen. Daran schliesst sich die Betrachtung der projectivischen Gebilde und ihrer Erzeugnisse, dann die Grundlage der Liniengeometrie, der lineare Complex, Systeme von 2 oder 3 solchen Complexen; die Transformation der rechtwinkligen Coordinaten und die Einführung homogener Coordinaten. Den Schluss des ersten Abschnittes bildet die Betrachtung der imaginären Elemente in der v. Staudt'schen Darstellung, wodurch der vollständige geometrische Sinn imaginärer Punkte, Ebenen, gerader

Linien und der Doppelverhältnisse aus solchen Elementen klargelegt wird.

Es ist somit in der ersten Abteilung eine sichere Grundlage für die weiteren Untersuchungen geschaffen.

Die zweite Abteilung behandelt (Seite 131-432) in sehr erschöpfender Weise die Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse, ausgehend von der allgemeinsten Gleichung in homogenen Coordinaten. Es wird zunächst die Polarentheorie behandelt und die Fläche auf ein conjugirtes Tetraeder bezogen; dann wird die Erzeugung der Fläche durch (reelle oder imaginäre) Gerade besprochen, und es werden die Flächen mit verschwindender Determinante, also im allgemeinen Kegel, betrachtet. Hierauf wird die Beziehung der Fläche zur unendlich entfernten Ebene untersucht, wobei sich die Lehre von den conjugirten Durchmessern ergiebt. Daran schliesst sich das Hauptaxenproblem und die Untersuchung der Paraboloide. Es folgt die Betrachtung der Umdrehungsflächen und die der sechs Systeme von Kreisschnitten der allgemeinen Fläche. Dann werden durch das Dualitätsprincip aus den bisherigen Betrachtungen die entsprechenden Resultate abgeleitet. Hierauf wird die gegenseitige Lage zweier Flächen zweiter Ordnung behandelt, wobei die Raumcurve vierter Ordnung und erster Art und diejenige dritter Ordnung untersucht werden, und nachdem wieder der Uebergang zu den dualistisch entsprechenden Eigenschaften vollzogen ist, werden die confocalen Systeme eingehend behandelt. Nach Einführung der gewöhnlichen und der verallgemeinerten elliptischen Coordinaten folgt die Untersuchung der Krümmungslinien und der geodätischen Linien. Dann werden die Beziehungen linearer Complexe zu Flächen zweiter Ordnung und lineare Transformationen der Flächen in sich, gewisse lineare Transformationen des Raumes, solche eines linearen Complexes in sich, dualistische lineare Transformationen eines linearen Complexes in sich und die allgemeinen reciproken Verwandtschaften betrachtet. Den Schluss der Abteilung bildet die Untersuchung der eindeutigen Abbildung einer Fläche zweiter Ordnung auf die Ebene, wobei die allgemeinen Gesetze derartiger Abbildungen

zur Sprache kommen. Hierbei werden auch die Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Klasse besprochen. Auch wird die stereographische Projection eingehend behandelt.

Ganz besonders interessant ist nun die dritte Abteilung, Seite 433-637, enthaltend die Grundbegriffe der projectivischen und der metrischen Geometrie.

Es waren in den beiden ersten Abteilungen schon immer die projectivischen Eigenschaften der Gebilde gegenüber den metrischen bevorzugt und die letzteren meist aus den ersteren abgeleitet worden. Gleichwohl war die ganze Grundlage der Untersuchung metrisch gewesen; denn die homogenen Coordinaten waren aus den rechtwinkligen abgeleitet, und der Begriff des Doppelverhältnisses beruhte auf metrischen Bestimmungen. Es macht sich nun das Bedürfnis geltend, zu untersuchen, wie weit es möglich ist, die projectivische Geometrie ohne metrische Begriffe, also ohne den Begriff der Congruenz und der Grösse von Winkeln und Strecken zu begründen.

Die Voraussetzungen, von denen der Verfasser ausgeht, sind diese: Es existirt im dreidimensionalen Raume ein System von unendlich vielen Flächen mit folgenden Eigenschaften:

1) Die Durchschnittscurve, welche zwei Flächen des Systems gemein haben können, (d. i. die Gesamtheit ihrer gemeinsamen Punkte) gehört allen Flächen an, die zwei Punkte der Curve enthalten; diese Curven heissen gerade Linien oder Gerade.

2) Durch drei beliebig angenommene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, lässt sich eine und nur eine Fläche des Systems hindurchlegen. Diese Flächen heissen Ebenen.

Durch zwei Punkte einer Ebene lässt sich also stets eine Gerade legen, die ganz in die Ebene fällt, die Gerade setzt sich in beiden Richtungen unbegrenzt fort; es ist aber nicht ausgemacht, ob sie geschlossen ist oder nicht. Zwei Gerade in derselben Ebene können nur einen Punkt gemein haben. Durch diese Voraussetzungen ist die Ausführbarkeit von Constructionen in der Ebene gesichert. Es lässt sich aber bekanntlich die harmonische Teilung ohne den Begriff des Doppelverhältnisses geometrisch definiren und mit dem Lineal ausführen. Sind nun auf

einer Geraden die Punkte A, B, C gegeben, welche in alphabetischer Reihenfolge liegen, so kann man diese Punkte als Bilder der Zahlen 0, 1, ∞ ansehen. Construirt man jetzt den zu A zugehörigen vierten harmonischen D, so werde dieser als Bild der Zahl 2 genommen; der Punkt E, der harmonisch zu 1 in Bezug auf 2 und ∞ liegt, stellt die Zahl 3 dar u. s. f.; so erhält man die Reihe der positiven ganzen Zahlen durch Punkte der endlichen Strecke AC dargestellt, die sich gegen C zu immer dichter zusammendrängen. Ebenso lässt sich in die Strecke 0-1 der Punkt $\frac{1}{2}$ als vierter harmonischer zu ∞ construiren, und weiter der Punkt $\frac{1}{2^p}$ und die Reihe $\frac{1}{2^p}, \frac{2}{2^p}, \frac{3}{2^p}, \cdots, \frac{\infty}{2^p}$. Jede andere positive reelle Zahl kann weiter durch eine convergente unendliche Reihe dargestellt werden, deren Glieder nach Potenzen von $\frac{1}{2}$ fortschreiten, und der entsprechende Punkt kann hierdurch als Grenzlage einer gewissen Punktreihe mit beliebiger Annäherung erreicht werden. (Für rationale Zahlen ergiebt sich später eine einfachere directe Construction.) Hierdurch ist ohne jede metrische Bestimmung eine geometrische Darstellung einer beliebigen positiven Zahl n definirt. Die Zahl $-n$ ist weiter darzustellen als vierter harmonischer Punkt zu $+n$ in Bezug auf 0 und ∞, sofern ein solcher existirt; denn es ist nicht verbürgt, dass die Strahlen, auf denen diese Punkte der Construction nach liegen müssen, die eine oder die andere Verlängerung von AC treffen. Man ist deshalb dazu geführt, umgekehrt zu verfahren. Ein beliebiger Punkt P einer der beiden Verlängerungen hat sicher einen vierten harmonischen Q, beide getrennt durch 0 und ∞. Der Punkt Q stellt eine Zahl $+n$ dar, also stellt P die Zahl $-n$ dar. Wir nehmen zunächst an, die Gerade sei ungeschlossen, und lassen den Punkt P zuerst die Verlängerung von AC über A (Null) hinaus bis ins Unendliche durchlaufen; dann erhält man die Darstellung der Zahlen zwischen Null und $+\varDelta_1 = M$. Man lasse ferner den Punkt P die Verlängerung über C hinaus bis ins Unendliche durchlaufen, so erhält man die Zahlenreihe von $-\infty$ bis $-\varDelta_2 = -N$; es lässt sich beweisen, dass die Zahl $+M$ in der Zahlenreihe nicht hinter $+N$ liegen kann. Es sind

also zwei Annahmen möglich. Entweder die Punkte $+M$ und $+N$ sind verschieden: dann fehlt in der reellen Zahlenreihe das Gebiet von $-M$ bis $-N$, d. h. zwischen A_1 und A_2; oder die Punkte $+M$ und $+N$ fallen zusammen: dann ist diese Zahlenreihe vollständig darstellbar. Es bleibt noch die Möglichkeit, dass die Gerade AC geschlossen sei; dann ergiebt die analoge Betrachtung, dass die Darstellung der Zahlenreihe es auch ist. Von den drei möglichen Annahmen führt die erste auf die hyperbolische Geometrie, bei welcher die Gerade zwei unendlich ferne Punkte hat; die zweite auf die parabolische oder euklidische Geometrie, bei welcher die Gerade einen unendlich fernen Punkt hat; die dritte auf die elliptische, bei welcher die Gerade endlich und geschlossen ist.

Die Verlegung des Nullpunktes nach dem Punkte q und des Einheitspunktes nach dem Punkte $q+p$, während der Punkt ∞ derselbe bleibt, hat zur Folge, dass die demselben Punkte P in beiden Bestimmungsweisen entsprechenden Abscissen (so wollen wir die oben betrachteten Zahlen in ihrer geometrischen Beziehung nennen) ξ und ξ' zusammenhängen durch die Gleichung

$$\xi = q+p\xi'.$$

Hierdurch werden die neuen Abscissen A'_1 und A'_2 der unendlich entfernten Punkte natürlich auch erhalten, und diese brauchen nicht immer negativ zu sein. So ist ohne Zuhülfenahme metrischer Bestimmungen eine Grundlage für die analytische Geometrie gewonnen. Es ist nicht thunlich, die weiteren Betrachtungen hier genauer zu verfolgen. Es sei nur bemerkt, dass man auf diesem Wege eine von metrischen Bestimmungen unabhängige Definition der Doppelverhältnisse gewinnt, dass die Zahlen, welche wir als Abscissenwerte für die Gerade AC wählten, selbst die Werte solcher Doppelverhältnisse sind, und dass die projectivischen Eigenschaften der Figuren unabhängig von metrischen Bestimmungen und unabhängig davon bestehen, ob hyperbolische, parabolische oder elliptische Geometrie vorausgesetzt ist.

Um nun aber von dem jetzt erlangten Standpunkte zu metrischen Eigenschaften zu gelangen, muss man auf künstlichem Wege die Begriffe Entfernung, Winkel, Congruenz bilden, und

hierzu kann die Betrachtung der Bewegung dienen. Bei diesen Untersuchungen ist es jedoch von wesentlichem Einfluss, ob der Raum hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch angenommen wird. Es handelt sich nämlich darum, ob es eine solche Bewegung des Raumes in sich giebt, d. h. eine solche Transformation, bei welcher jedem endlichen Punkte wieder ein endlicher Punkt entspricht, jeder Geraden wieder eine Gerade, und bei welcher die als Entfernungen und als Winkel definirten Grössen unverändert bleiben. Es handelt sich also um lineare Transformationen, die von höchstens drei Parametern abhängen, und bei denen die unendlich entfernten Elemente in einander übergehen. In glücklicher Weise ist es dem Verfasser bei dieser schwierigen Untersuchung gelungen, unnötige Verwickelungen zu vermeiden, indem er stufenweise von den einfachsten zu den allgemeinsten Bewegungen aufsteigt. Er beginnt mit der Verschiebung der Geraden in sich. Sind $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ die Abscissen der unendlichen entfernten Punkte (in der hyperbolischen Geometrie), und ist die Linie so in sich verschoben, dass der Punkt x nach ξ gekommen ist, so folgt aus einfachen Functionsbetrachtungen, dass die Entfernung r der beiden Punkte sich folgendermassen ausdrücken muss:

$$r = k \ln \frac{\xi - \varDelta_1}{\xi - \varDelta_2} \cdot \frac{x - \varDelta_2}{x - \varDelta_1},$$

wo k eine Constante bedeutet. Hieraus ergiebt sich das Doppelverhältnis zweier Punktepaare x, y und ξ, η, wenn die Entfernungen $x\xi = r$, $x\eta = r'$, $y\xi = \varrho$, $y\eta = \varrho'$ genannt werden

$$\frac{x-\xi}{x-\eta} \cdot \frac{y-\eta}{y-\xi} = \frac{\sin \frac{ir}{2k}}{\sin \frac{ir'}{2k}} \cdot \frac{\sin \frac{i\varrho'}{2k}}{\sin \frac{i\varrho}{2k}}.$$

Diese Formel geht nur im Grenzfalle $k = \infty$, d. h. für die euklidische Geometrie, über in

$$\frac{x-\xi}{x-\eta} \cdot \frac{y-\eta}{y-\xi} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{\varrho'}{\varrho},$$

welche früher bewiesen war.

Hiermit ist nun die Grundlage gewonnen, um die Bewegung der Ebene in sich zu untersuchen, die sich durch eine Collineation darstellt, bei der die unendlich entfernte Curve, ein reeller Kegelschnitt, in dessen Innerem die endlichen Punkte der Ebene liegen, sich in sich selbst transformirt. Analog wird dann die räumliche Bewegung betrachtet. Für die elliptische Geometrie ergiebt sich aus dem Umstande, dass die Gerade endlich geschlossen ist, eine gewisse Periodicität, die analytisch darauf hinauskommt, dass A_1 und A_2 conjugirte complexe Zahlen werden, und die Constante k imaginär wird. Die parabolische oder euklidische Geometrie kann als Grenz- und Uebergangsfall der beiden anderen Fälle betrachtet werden.

Obwohl nun jede der drei denkbaren Arten von Geometrie in sich logisch und consequent ausgebildet werden kann, so ist doch nur die euklidische in Einklang zu bringen mit unseren Raumvorstellungen. Gleichwohl bezeichnet der Verfasser das Studium der nichteuklidischen Geometrie als äusserst lehrreich, weil auf diesem Wege die Frage sicher entschieden wird, welche seit zwei Jahrtausenden immer von neuem gestellt wird, nämlich ob das Parallelenaxiom zu entbehren ist oder nicht. Es zeigt sich deutlich, dass ein solches Axiom oder Postulat unentbehrlich ist, wenn auch seine Formulirung wechseln kann. Jene Untersuchungen haben also vor allem einen erkenntnistheoretischen Wert.

Gelegentlich dieser Untersuchungen kommt der Verfasser auch wiederholt auf den Begriff des Raumes von mehr Dimensionen zu sprechen, und es ist ihm vollständig zuzustimmen, wenn er gegenüber den metaphysischen Spielereien, die heute gang und gebe sind, die Bedeutung auch dieses Begriffes klarstellt. Nachdem er nämlich auseinander gesetzt hat, dass es mathematisch keine Schwierigkeit mache, unsern Raum als Teil einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit zu betrachten u. s. w., wenn man nur über die letztere gewisse, den geometrischen Axiomen entsprechende Voraussetzungen macht, fährt er fort: Man muss sich nur nicht verleiten lassen, aus der Möglichkeit einer solchen rein formalen Verallgemeinerung analytischer Be-

griffe und Gleichungen auf die thatsächliche Existenz einer vierten Dimension zu schliessen.

Den Abschluss der Untersuchungen über die verschiedenen Arten von Geometrie bildet nun eine eingehende Untersuchung und Kritik der Definitionen, Postulate (*ὅροι*, *αἰτήματα*) und Axiome (*κοιναὶ ἔννοιαι*).

Es ist sehr interessant, wie der Verfasser nachweist, dass die Hypothesen der modernen Geometrie mit den Postulaten und Axiomen des Euklid vollständig übereinstimmen, wenn man gewisse Ergänzungen zu letzteren hinzufügt, ohne die sie überhaupt nicht ganz ausreichend wären. Das Resultat dieser Untersuchung fasst der Verfasser in folgenden Worten zusammen: Wir stehen im wesentlichen auch heute noch auf dem Standpunkte des Euklid und müssen immer von neuem den Scharfsinn bewundern, mit dem es schon im Altertum möglich war, aus der Fülle der geometrischen Anschauungsformen diejenigen einfachsten Gesetze zu abstrahiren, welche notwendig und hinreichend waren, um aus ihnen alle Eigenschaften geometrischer Figuren rein logisch zu construiren. Uebrigens sei bemerkt, dass der Verfasser der in Peyrard's Ausgabe der „Oeuvres d'Euclide“ 1814-18 wiederhergestellten richtigen Anordnung gefolgt ist, welche übrigens auch E. F. August in der griechischen Ausgabe der Elemente (Berolini 1826, Trautwein) innegehalten hat. Danach ist die Grundlage der Parallelentheorie im V. Postulat ausgesprochen, welches früher fälschlich unter die Axiome gekommen und als elftes derselben bezeichnet worden war, wie es denn auch heute noch vielfach genannt wird.

Die folgenden Capitel der dritten Abteilung behandeln zunächst die endlichen Gruppen von Bewegungen in der elliptischen Geometrie, und hieran schliesst sich die Betrachtung der Ikosaedergruppe, des zehnfachen Brianchon'schen Sechsecks, sowie die Auflösung der Gleichungen des fünften Grades. Die beiden letzten Capitel haben zum Gegenstande die Darstellungen der binären Formen auf der Kugelfläche und der Werte einer complexen Variable durch die Punkte der Ebene. Der Verfasser begründet in diesem letzten Capitel die gewöhnlich als Gauss'sche

Darstellung bezeichnete, aber von Argand herrührende Darstellung der complexen Grössen ohne metrische Betrachtungen durch die von Staudt'sche Theorie.

Ein ausführlicher Index und einige Verbesserungen und Zusätze bilden den Schluss. Ein Druckfehler auf Seite 470 Formel (8) ist dort übersehen; die Formel muss heissen

$$\left(\cos\frac{r}{2ki}\right)^2 \Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = 0.$$

Dies ist in grossen Zügen der Inhalt des Werkes, dem wohl ein hervorragender und dauernder Wert in der mathematischen Litteratur zugesprochen werden darf. A.

F. Rudio. Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, Technischen Hochschulen, sowie zum Selbststudium dargestellt und mit zahlreichen Uebungsbeispielen versehen. Leipzig. B. G. Teubner. X + 156 S. gr. 8°.

Dieses Buch schliesst sich seiner ganzen Anlage nach auf das engste an die „Elemente der analytischen Geometrie der Ebene" an, welche der Verfasser gemeinschaftlich mit Herrn Ganter in demselben Verlage im Jahre 1888 hat erscheinen lassen (Ref. F. d. M. XX. 679). Auch in ihm finden wir, bei Beschränkung auf die einfachsten Betrachtungen, scharfe begriffliche Klarheit und leicht verständliche Darstellung. Besonderes Gewicht legt der Verfasser darauf, dass die geometrische Bedeutung der in den Formeln auftretenden Vorzeichen stets gebührend berücksichtigt werde. Der Stoff ist auf Gerade, Ebene und die Umdrehungsflächen zweiter Ordnung beschränkt; nur das dreiaxige Ellipsoid ist noch in gewissen Beziehungen mit in die Betrachtung aufgenommen, und es werden einige allgemeinere Betrachtungen über Kubatur von Umdrehungskörpern angestellt. Ferner ist gelegentlich die Schraubenlinie als Beispiel einer räumlichen Curve behandelt, und daran ist auch die Betrachtung einer speciellen Schraubenfläche geknüpft. Zahlreiche einfache Uebungsaufgaben sind dem Texte eingefügt. Zum Zweck der allerersten

Einführung in die analytische Geometrie des Raumes wird das Werk gewiss den Anfängern von Nutzen sein. A.

L. Raschi. Geometria analitica alle coordinate (cartesiane, projettive, ecc.). Parma. L. Battei. 640 S.

Ein Lehrbuch der analytischen Geometrie, welches durch das Eingehen auf viele neuere Ansichten gekennzeichnet ist, wie dies der Gebrauch der Determinanten und die Anwendung einiger Grundbegriffe der neueren Geometrie (z. B. die projectiven Verwandtschaften, die Liniencoordinaten, die Liniengeometrie u.s.w.) bezeugen. Der erste Platz wird den cartesischen Coordinaten gegeben, aber auch die anderen Coordinatensysteme (die polaren, die barycentrischen, die projectiven u. s. w.) finden ihre richtige Entwickelung. Eine Neuerung, welche wir für gut und bemerkenswert halten, ist die Verschmelzung der ebenen und der räumlichen Geometrie: durch Annäherung der analogen Aufgaben der Geometrie zu zwei und zu drei Coordinaten wird nicht nur die Aehnlichkeit der beiden Geometrien in ein helleres Licht gesetzt, sondern nach unserer Meinung auch die Schwierigkeit des Lernens dem Anfänger verringert. Die gute Behandlung der geometrischen Gebilde erster und zweiter Ordnung, die bunten Anwendungen der Theorien und die reiche Aufgabensammlung machen das Buch des Herrn Raschi zu einer vortrefflichen Vorbereitung auf die analytische Geometrie der Curven und Flächen beliebiger Ordnung. La.

F. Caldarera. Primi fondamenti della geometria del piano. Palermo-Torino. C. Clausen.

Ein elementares Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene in trilinearen Coordinaten, dessen Inhalt aus dem folgenden Inhaltsverzeichnis erhellt: I. Punkt und Gerade im allgemeinen. II. Punktreihen. Strahlenbüschel und Strahlenfelder. Doppelverhältnisse. III. Harmonische Verhältnisse und Involution. IV. Projective Punktreihen und Strahlenbüschel. V. Harmonische

Mittelpunkte und Axen. Involution höherer Art. VI. Collineare Punktfelder. VII. Reciproke Punktfelder. VIII. Kreis und elementare Kreissysteme. La.

H. Cranz. Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. I. Teil: Analytische Geometrie des Punktes und der Geraden. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. J. Maier. VI + 266 S. 8°.

Das Buch ist namentlich zum ersten Selbststudium wohl geeignet wegen seiner Methode, über welche wiederholt im Jahrbuch berichtet ist (XVIII. 1886. 487 u. s. w.). Ausser der Theorie sind 206 meist ausgeführte numerische Uebungsaufgaben über Coordinatentransformation, Beweise geometrischer Sätze, Doppelverhältnisse, projectivische, harmonische und involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel u. a. gegeben. Ausser einer Reihe von Druckfehlern fielen dem Ref. sachliche Fehler auf S. 30 No. 11; S. 189 Z. 6 v. u.; S. 94 in Fig. 37. Mh.

A. Hanner. Analytische Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte. Prag. H. Dominicus (Th. Gruss). VIII + 480 S. 8°.

Der erste Abschnitt des Buches liefert die Grundlagen der analytischen Geometrie, der zweite behandelt eingehend die Projectivität, der dritte die Kegelschnitte bis zu der Lehre von den Kegelschnittbüscheln und -Reihen (-Scharen). Die Darstellung ist, abgesehen von gewissen stilistischen Eigenheiten, klar und glatt. Aufgaben werden zahlreich gelöst, auch mit Benutzung synthetischer Methoden; numerische Beispiele fehlen. Die Theorie der Determinanten wird als bekannt vorausgesetzt; der Begriff der „Invarianten“ und „Covarianten“ wird S. 422 und 424 definirt; dabei muss es aber auffallen, dass schon S. 215 eine Capitelüberschrift lautet: „Invarianten und Covarianten binärer Formen“. Das Buch gewährt reichliche Belehrung über geometrische und algebraische Terminologie; ein alphabetisches Sach-

register wäre deshalb von grossem Nutzen. Notizen über die ersten Autoren von Sätzen und Methoden werden anfangs immer, in den späteren Teilen des Werkes selten gegeben. Warum auf S. 68 als Autor nur Carnot angegeben, Menelaos gar nicht erwähnt wird, ist nicht recht ersichtlich. Zur Polemik fordert die Behauptung S. 44 heraus, dass eine Gerade keinen unendlich fernen Punkt besitze. Mh.

J. Schlotke. Analytische Geometrie der Ebene. Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben nebst Erläuterungen und Resultaten. Dresden. G. Kühtmann. IV+217 S. 8°.

Dieses Buch enthält die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Es werden zuerst die Punktcoordinaten erklärt; hierauf wird die Gleichung der Geraden eingeführt, woran sich der Begriff der Liniencoordinaten knüpft. Auch schiefwinklige Coordinatenaxen werden besprochen; dann werden Abkürzungen in der Bezeichnung gebracht, Punktreihen, Strahlenbüschel, harmonische Beziehungen behandelt. Danach folgt der Kreis mit Pol und Polare, Liniencoordinaten am Kreise und die Einführung von Polarcoordinaten. Hieran schliesst sich die Theorie der Kegelschnitte in ausführlicher Darstellung, gegründet auf ihre einfachen geometrischen Definitionen; Coordinatenverwandlungen leiten zu einer Betrachtung der Curven zweiter Ordnung und zweiter Klasse, wie sie durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades definirt werden. Dann geht der Verfasser zu Curven höherer Ordnung über, unter anderen zur Cassini'schen Linie; ferner werden Cykloiden und Spiralen behandelt. Bei der Darlegung des Princips der reciproken Radien und der Lehre von den Polarfiguren geht der Verfasser auch ein wenig in die Raumlehre hinüber und zeigt die Abbildung einer Kugelfläche auf eine Ebene, ferner die Anwendung hiervon auf die Darstellung des Gradnetzes der Erdkugel. Ferner wird die Cyklide erklärt als diejenige Fläche, die einer geraden Cylinderfläche mit kreisförmigem Querschnitt in Bezug auf einen Punkt m als Mittelpunkt reciproker Radien zugeordnet ist, und es wird die Cyklide

genauer beschrieben und besprochen. Noch eine andere Construction wird hier vorgenommen, die auf das Rotationshyperboloid führt. Am Schluss folgt endlich eine kurze Behandlung von Sätzen der analytischen Geometrie mit Hülfe von Dreieckscoordinaten.

Die Reichhaltigkeit des Buches, die fassliche Darstellung, sowie 97 sehr gut ausgeführte Figuren gereichen dem Buche zur Empfehlung. Druck und Ausstattung sind zu loben.

Mz.

G. Salmon. Analytische Geometrie dreier Dimensionen. Moskau 1891. (Russisch.)

Nur der erste Teil der französischen Uebersetzung des Salmon'schen Werkes ist von Herrn Alexejew ins Russische übertragen. (Er endigt mit Capitel X: Kegel und sphärische Kegelschnitte.)

Von demselben Uebersetzer übertragen, erschien auch Salmon's Theorie der Kegelschnitte, deren erste Uebersetzung von H. Waschtschenko-Sachartschenko (1860) schon längst vergriffen war.

Si.

G. Salmon. Traité de géométrie analytique à trois dimensions; traduit de l'anglais sur la quatrième édition par O. Chemin. Partie II. Théorie des surfaces. Courbes gauches et surfaces développables. Famille de surfaces. Paris. Gauthier-Villars et Fils. [J. de Math. spéc. (3) V. 280.]

E. Busche. Grundzüge einer rechnenden Geometrie der Lage. II. Pr. (Nr. 719) Hansasch. Bergedorf b. Hamburg. 19 S. 4°.

Ueber den ersten Teil dieser Arbeit s. das Referat in F. d. M. XXII. 1890. 691. Die daselbst durchgeführte geometrische Darstellung reeller und complexer Zahlen ohne Benutzung einer Längen- oder Winkeleinheit wird hier verwendet, um die Grundzüge einer analytischen Geometrie des Raumes zu entwickeln,

in welcher die Bedeutung der complexen Zahlen ganz analog ist derjenigen der reellen Zahlen in der Ebene. Hierbei wird jeder Strahl des Raumes bestimmt durch seine Schnittpunkte (X, Y) mit zwei Fundamentalebenen, welche als Träger der linearen Punktfelder dienen, während die Punkte X und Y in gewöhnlicher Weise entsprechenden complexen Zahlen zugeordnet sind. Wenn dann x und y zwei complexe Zahlen sind, so stellt die Gleichung

$$s = xX+yY+1 = 0,$$

je nachdem $x:y$ reell ist oder nicht, einen Punkt oder ein Strahlensystem dar, welches mit jedem Punkte einen Strahl gemeinsam hat und daher ebenfalls als „Punkt" bezeichnet wird. Hierdurch wird dem vierdimensionalen Strahlenraume ein vierdimensionaler Punktraum dual gegenüber gestellt. Im Anschluss an diese Voraussetzungen wird dann die lineare und die quadratische Gleichung in complexen Strahlencoordinaten discutirt, wobei gelegentlich der Enveloppe des Strahlensystems zweiten Grades auch räumliche Analoga zu den Sätzen von Pascal, Brianchon und Desargues gewonnen werden. Schg.

G. Battaglini. Sullo studio della geometria. Geometria analitica cartesiana. Batt. G. XXIX. 1-2, 3-33, 93-132, 195-233, 298-355.

Der Verf. empfiehlt für die Zwecke des Hochschul-Unterrichtes eine sowohl die analytische wie die synthetische Methode benutzende Darstellung der Geometrie, einerseits im Interesse eines rascheren Fortschrittes der Entwickelung, andererseits um die Eigentümlichkeiten und Vorteile beider Methoden darzulegen. Im übrigen giebt er der consequenten Durchführung einer der beiden Methoden den Vorzug und entwickelt ein kurzes Programm für eine Einführung in die analytische Geometrie, wobei der erste Teil die Anwendung der cartesischen Coordinaten auf die Lehre von den Punkten, Geraden, Ebenen, Kreisen und Kugeln enthalten soll, ferner auf Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung, der zweite Teil die projectivische Geometrie unter Be-

nutzung der projectivischen Coordinaten, der dritte Teil die geometrische Darstellung der algebraischen Formen. Die vorliegenden Abschnitte führen die Ausarbeitung des ersten Teils bis zur Lehre von den Kegelschnitten und schliessen mit den Sätzen über Kugelflächen. Schg.

Weitere Lehrbücher.

A. Macé de Lépinay. Compléments d'algèbre et notions de géométrie analytique. Paris. 392 S. 8°. [J. de Math. élém. (3) V. 88-89.]

J. Marchand. Premières notions de géométrie analytique plane. Louvain. 308 S. 8°.

Carnoy. Cours de géométrie analytique. Géométrie plane. 5e éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

W. Briggs and G. H. Bryan. The elements of coordinate geometry, as far as the equations and properties of the right line and circle. London. 228 S. 8°.

A. Rémond. Exercices élémentaires de géométrie analytique à deux et à trois dimensions. Ire Partie. Géométrie à deux dimensions. 2e éd. IIe Partie. Géométrie à trois dimensions. Problèmes généraux. Énoncés. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

E. Mosnat. Problèmes de géométrie analytique. Tome I. Paris. 354 S. 8°.

T. Biggin. On biangular coordinates and an extension of the system to space of three dimensions. Quart. J. XXV. 237-258.

Sind A und B zwei feste Punkte (Pole) in der Ebene, so sind die biangularen Coordinaten eines Punktes P dieser Ebene die Cotangenten der von den Strecken PA und PB mit der Richtung AB gebildeten Winkel. — Ist P ein Punkt im Raume und P' seine Projection auf die Ebene, so tritt zu den biangularen Coordinaten von P' als dritte Coordinate des Punktes P

die Tangente des Winkels, den die Ebene *PAB* mit der ersten Ebene bildet. Für beide Fälle werden die einfachsten analytisch-geometrischen Aufgaben gelöst und verschiedene Coordinaten-transformationen gegeben. Die Gleichungen zeichnen sich bei passender Wahl der Pole durch Einfachheit aus. Schg.

G. B. Maffiotti. Sopra una relazione tra le coordinate sferiche ortogonali e le coordinate topografiche. Torino Atti XXVII. 210-216.

Die elementare Berechnung der sphärischen rechtwinkligen Coordinaten giebt nur für die in der Nähe des als Axe der x gewählten Meridians liegenden Punkte Resultate von genügender Genauigkeit. Der Verf. entwickelt für diese Coordinaten auf analytischem Wege Formeln, welche für einen weiteren Bereich von Punkten gelten, und zwar soweit, als noch Glieder vierter Ordnung vernachlässigt werden können. Dabei wird der Unterschied der beiderseitigen Coordinatenwerte festgestellt. Schg.

Lormeau. Des coordonnées angulaires. J. de Math. élém. (3) V. 35-44.

Aug. Poulain. Les coordonnées angulaires. Ibid. 52-56, 73-79.

Bernès. Lettre à M. G. de Longchamps. Ibid. 109-112.

„Winkelcoordinaten“ eines Punktes P heissen die drei Winkel, unter denen die drei Seiten des festen Bezugsdreiecks von P aus gesehen werden. Der erste Aufsatz erörtert die in Betracht kommenden Unterscheidungen und schlägt vor, die Tangenten dieser Winkel statt der Winkel selbst als Coordinaten einzuführen. Herr Bernès dagegen geht in seinem Briefe an den Herausgeber von den Begriffsbestimmungen aus, welche in dem Referate auf S. 600 dieses Bandes des Jahrbuchs wiedergegeben sind, und zeigt, dass dadurch die von Herrn Lormeau betonten Schwierigkeiten beseitigt werden. Zugleich werden die Hauptergebnisse der in dem angezogenen Referate besprochenen Arbeit

vorgeführt. Herr Poulain dagegen benutzt diese Winkelcoordinaten zum Beweise mancher Sätze der neueren Dreiecksgeometrie.

Lp.

A. Poulain. Des équations tripolaires réversibles. J. de Math. spéc. (3) V. 265-276.

Herr Poulain hat in demselben Journal (vergl. F. d. M. XXI. 1889. 680) die Abstände λ, μ, ν eines Punktes von den drei Ecken des Bezugsdreiecks als tripolare Coordinaten behandelt und benutzt. Gegenwärtig beschäftigt er sich mit der Frage, wie die Unbequemlichkeit beseitigt werden könne, dass jede Curve in tripolaren Coordinaten durch unendlich viele Gleichungen von verschiedenen Graden dargestellt werden könne. Ist nämlich $f(\lambda, \mu, \nu) = 0$ eine derselben, $J = 0$ die Gleichung, welche die drei Coordinaten verbindet, und $\varphi(\lambda, \mu, \nu)$ eine willkürliche Function, so kann man die gegebene Gleichung durch

$$f(\lambda, \mu, \nu) + J.\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0$$

ersetzen. Die von ihm jetzt entwickelte Theorie gestattet die Zurückführung aller Formeln auf einen einzigen Typus. Dies gelingt durch Aufstellung des Begriffes der „umkehrbaren tripolaren Gleichung", welche aus der Cartesischen Gleichung eines Ortes durch Verwandlung der rechtwinkligen Coordinaten in tripolare entsteht, ohne dass dabei die Relation $J = 0$ benutzt wird. Die beiden Abschnitte der Arbeit behandeln: I. die Eigenschaften der umkehrbaren Gleichungen, II. die Polaren und dergl. der durch eine umkehrbare Gleichung dargestellten Curven.

Lp.

L. Bénézech. Sur le centre des distances proportionnelles. J. de Math. élém. (3) IV. 123-127, 145-149. (1890.)

L. Bénézech. Applications de la théorie du centre des distances proportionnelles. Coordonnées quadripolaires. J. de Math. élémen. (3) V. 3-7, 25-28, 97-100, 127-129, 149-151.

L. Bénézech. Applications de la théorie du centre des distances proportionnelles. Ibid. 241-244.

Centrum der proportionalen Entfernungen heisst dem Verf. der Punkt, den man sonst Schwerpunkt von n gegebenen Punkten nennt. Die mitgeteilten Sätze sind zum grossen Teile solche, die in der Statik über den Schwerpunkt bewiesen zu werden pflegen (z. B. bei Poinsot, Éléments de Statique), vom Verf. öfter in Determinantenform vorgeführt. Quadripolare Coordinaten sind die Abstände eines Punktes im Raume von den vier Ecken des festen Bezugstetraeders. Die in denselben aufgestellten Gleichungen für geometrische Gebilde, besonders für Punkte der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel und andere mit dem Tetraeder zusammenhängende Figuren, sind in der Gestalt von Determinanten entwickelt, alles ohne Bezugnahme auf frühere Arbeiten, wie z. B. Darboux: „Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace" (Ann. de l'Éc. Norm. (2) I, F. d. M. IV. 1872. 383) und Frobenius: „Anwendungen der Determinantentheorie auf die Geometrie des Masses" (J. für Math. LXXIX, besonders S. 244ff., F. d. M. VI. 1874. 381). Lp.

M. d'Ocagne. Méthode de calcul graphique fondée sur l'emploi des coordonnées parallèles. Génie civil. XVII. (1890.) 343-344.

Der Verfasser nennt parallele Coordinaten einer Geraden die Abstände ihrer Schnittpunkte mit zwei parallelen Geraden von zwei auf den letzteren fest angenommenen Punkten. Die Verbindungslinie der festen Punkte soll auf den Parallelen senkrecht stehen. (Vergl. Schwering, „Ueber ein besonderes Liniencoordinatensystem" in Schlömilch Z. XXI, F. d. M. VIII. 1876. 414.) Der Verfasser giebt einige Anwendungen dieser Coordinaten. F. K.

J. Hermes. Der Flächeninhalt der Dreiecke, Vierecke und Kreise in der Farey'schen Ebene. Königsberg i. Pr. Ostpreuss. Zeitungs- u. Verlags-Druckerei. 47 S. mit 1 Fig.-Taf. 4°.

Es handelt sich in dieser Arbeit um einen besonderen Fall

der Möbius'schen, aus Punkten mit rationalen Coordinaten gebildeten Dreiecksnetze. Sind nämlich $(\alpha_1 : \alpha)$ und $(\alpha_2 : \alpha)$ rationale rechtwinklige Coordinaten eines Punktes a, und bedeuten die Buchstaben β und γ dasselbe für die Punkte b und c, so heisst das Dreieck abc ein Farey'sches, wenn die Determinante, deren Colonnen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$; β_1, β_2, β; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ sind, den Wert 1 hat. Und man kann nun durch Anwendung eines Formalismus, der arithmetisch auf eine symbolische Addition der Punkte und geometrisch auf lineare Constructionen hinausläuft, neue rationale Punkte erhalten und eine Theorie von Dreiecksnetzen begründen, in der sich, vermöge ihres Zusammenhanges mit der Farey'schen Reihe, an die geometrische Construction eine Menge zahlentheoretischer Beziehungen knüpfen, und in der nicht nur mannigfache geometrische Gebilde, wie Pascal'sche Sechsecke, vollständige Vierecke und Polaren, sondern auch Kettenbrüche, diophantische und quadratische Gleichungen, unendliche Reihen und Producte auftreten. Aus den Inhaltsbestimmungen für die Figuren ergeben sich auch bemerkenswerte Resultate über flächengleiche Figuren (Dreiecke, Kegelschnitte und Kegelschnittbüschel). — Der oben genannte Formalismus zur Bildung neuer Punkte stimmt im wesentlichen mit dem von Noth (Arithmetik der Lage. 1882) angewandten überein und findet, wie dieser, seine einfachste rechnerische Begründung in der Grassmann'schen Darstellung eines Punktes durch drei Fundamentalpunkte der Ebene (vergl. z. B. des Ref. „Raumlehre" I. 76). Den Schluss der Arbeit bildet ein Ausblick auf verschiedene noch offene Fragen, geeignet, zu weiteren Untersuchungen anzuregen. Schg.

A. Cornely. Untersuchungen über involutorische Gleichungensysteme. Diss. Würzburg. 28 S. 4°.

Nach Herrn Prym (Unters. ü. d. Riemann'sche Thetaf. etc. p. 73, Leipzig 1882, vergl. dieses Jahrb. XIV. 419) wird ein System von n linearen Gleichungen:

$$(A) \qquad y_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

ein involutorisches genannt, wenn seine Coefficienten a den Bedingungen:

$$\sum_{\varrho=1}^{n} a_{\mu\varrho} a_{\varrho\nu} = \delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, wo $\delta_{\mu\nu} = 1$ oder 0 ist, je nachdem $\nu = \mu$ oder $\nu \gtrless \mu$ ist (Art. 1). Bezeichnet man dann mit A die Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ und mit $\alpha_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $a_{\mu\nu}$ in dieser Determinante, so ist $A^2 = 1$ und $\alpha_{\mu\nu} = A a_{\mu\nu}$ (Art. 2). Setzt man weiter:

$$f\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_n \\ & z & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \varepsilon_1 z & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} + \varepsilon_n z \end{vmatrix},$$

wo $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ zweite Einheitswurzeln bezeichnen, so sind die n Wurzeln der Gleichung $f\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ & z & \end{vmatrix} = 0$ sämtlich ± 1. Heisst man das zu Grunde liegende involutorische System ein zur Zahl m gehöriges, wenn von diesen n Wurzeln m den Wert $+1$, $n-m$ den Wert -1 haben, so ist für jedes zur Zahl m gehörige involutorische System $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = n - 2m$, $A = (-1)^m$, und es verschwinden von den 2^n Determinanten $f\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_n \\ & 1 & \end{vmatrix}$ alle, bei denen von den n Grössen ε weniger oder mehr als m den Wert -1 besitzen, während von jenen, bei denen gerade m Grössen ε den Wert -1, $n-m$ den Wert $+1$ haben, wenigstens eine einen von Null verschiedenen Wert besitzt (Art. 3). Man erhält aus einem zur Zahl m gehörigen involutorischen Systeme (A) immer wieder ein zur Zahl m gehöriges System $(\bar{A})$, wenn man vermittelst einer und derselben linearen Substitution an Stelle der n Veränderlichen y n neue Veränderliche $\bar{y}$ und gleichzeitig an Stelle der n Veränderlichen x n neue Veränderliche $\bar{x}$ einführt (Art. 4), und es lässt sich auf diese Weise ein gegebenes, zur Zahl m gehöriges involutorisches System (A) in jedes andere zur Zahl m gehörige involutorische System überführen (Art 5). Man erhält endlich das allgemeinste zur Zahl m gehörige involutorische System (A), wenn man die n^2 Coefficienten a durch die Gleichungen:

$$a_{\varepsilon\eta} = \delta_{\varepsilon\eta} - 2\sum_{\mu=1}^{m} b_{\mu\eta} z_{\mu\varepsilon} \qquad (\varepsilon, \eta = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmt und dabei die mn Grössen $b_{\mu\eta}$ und die mn Grössen $z_{\mu\varepsilon}$ als unbestimmte Constanten, die den m^2 Relationen:

$$\sum_{\tau=1}^{n} b_{\mu\tau} z_{\mu'\tau} = \delta_{\mu\mu'} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, m)$$

genügen, ansieht (Art. 6), oder durch die Gleichungen:

$$a_{\varepsilon\eta} = \delta_{\varepsilon\eta} - \frac{2}{H} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\nu'=1}^{m} f_{\nu\eta} g_{\nu'\varepsilon} \bar{h}_{\nu\nu'} \qquad (\varepsilon, \eta = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmt und dabei die mn Grössen $f_{\nu\eta}$ und die mn Grössen $g_{\nu'\varepsilon}$, aus denen sich die h den Gleichungen

$$h_{\nu\nu'} = \sum_{\tau=1}^{n} f_{\nu\tau} g_{\tau'\nu} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, n)$$

gemäss zusammensetzen, während H die Determinante

$$\Sigma \pm h_{11} h_{22} \ldots h_{nn}$$

und $\bar{h}_{\nu\nu'}$ die Adjuncte von $h_{\nu\nu'}$ in dieser Determinante bezeichnet, als unbestimmte Constanten, die der Bedingung $H \neq 0$ genügen, ansieht (Art. 7). Der Art. 7 wurde durch die Abhandlung des Herrn Prym „Ueber orthogonale, involutorische und orthogonal-involutorische Substitutionen" (Gött. Abh. XXXVIII) veranlasst.

Kr.

E. Hunyady. Az orthogonális. — Parameterdarstellungen der orthogonalen Substitutionscoefficienten. Abhandlung II. Budapest. 14 S. gr. 8°. (Ungarisch, 1890.)

G. de Longchamps. Sur la résolution des problèmes déterminés par la méthode des lieux géométriques. Mathesis (2) I. 132-136.

In diese Methode kann man oft grosse Vereinfachungen einführen, wenn man dabei Coordinaten X, Y durch passend gewählte Functionen neuer Veränderlichen x, y ersetzt, die man ebenfalls als Coordinaten ansieht.

Mn. (Lp.)

J. JUEL. Nogle Fortegns bemarkninger. Nyt Tidss. II B. 94 - 95.

Note über das Rechnen mit Vorzeichen auf geschlossenen Curven. V.

N. W. BUGAJEW. Geometrie der willkürlichen Grössen. Mosk. Math. Samml. XIV. 394-409. (Russisch, 1889.)

Als Mittel zum rein analytischen Studium der Eigenschaften der Flächenstücke auf der Ebene und der begrenzten Körper im Raume, schlägt der Verfasser die „willkürlichen Grössen“ und Functionen vor; so werden die Functionen genannt, die sich bei Umkehrung der unstetigen Functionen darbieten. Eine Grösse, die alle Werte zwischen a und b erhalten kann, wird eine willkürliche Grösse zwischen den Grenzen a und b genannt und mit $\Omega = (a, b)$ bezeichnet. Die Grösse $\omega = (0, 1)$ ist „willkürliche Einheit“; jede andere willkürliche Grösse

$$\Omega = (a, b) = a + (b-a)\omega$$

ist durch ω ausdrückbar. Man muss auch „den Sinn der Veränderung“ bei willkürlichen Grössen unterscheiden: So hat z. B. $\omega' = (1, 0)$ den umgekehrten Sinn. Wird in der analytischen Geometrie der Ebene eine Curve $f(x, y) = 0$ untersucht, so muss man bei jetziger Auffassung noch zwei Gleichungen

$$x = (-\infty, +\infty), \quad y = (-\infty, +\infty)$$

hinzufügen. Fügen wir aber statt der letzteren die Gleichung $y = (\alpha, \beta)$ hinzu, so wird nur der Teil der Curve zwischen den Ordinaten $y = \alpha$, $y = \beta$ betrachtet. Wenn die Coefficienten einer Gleichung $f(x, y) = 0$ solche willkürlichen Grössen enthalten, so bestimmt die Gleichung nicht mehr eine Curve, sondern ein Flächenstück. Ein geradliniges Flächenstück wird z. B. durch die Gleichung

$$y = \varphi(\omega)x + \psi(\omega)$$

bestimmt. Unter ihnen wird das einfachste keilförmige Flächenstück

$$y = (a\omega + b)x + (c\omega + d)$$

durch die Geraden $y = bx + c$ und $y = (a+b)x + (c+d)$ begrenzt.

Man kann auch Gebiete betrachten, die durch zwei solche Gleichungen bestimmt sind.

In derselben Weise erhalten wir im Falle dreier Coordinaten geometrische Körper. Si.

N. W. Bugajew. Unstetige Geometrie. Mosk. Math. Samml. XV. 600-607. (Russisch.)

Der Zweck des Verfassers ist, den Zusammenhang der unstetigen Geometrie (d. h. der Untersuchung der unstetigen geometrischen Gebilde) mit der Theorie der unstetigen Functionen zu zeigen. Es werden dazu einige Beispiele der Gebilde betrachtet, deren Gleichungen von der Function $E(x)$ abhängen. Si.

B. W. Spiro. Ueber complexe Punktreihen. (Russisch.)

Wie Neovius (Helsingf. Vetensk. Soc. Öfv. XXIX. 154-161) und noch früher Berlin (Lunds Univ. Arskr. 1872), stellt der Verfasser den imaginären Punkt ($x = \alpha+\beta\sqrt{-1}$, $y = \gamma+\delta\sqrt{-1}$) dar durch den wie bei reellen x und y construirten Affix der complexen Grösse $x+iy$. Für die Eindeutigkeit der umgekehrten Bestimmung des imaginären Punktes nach dem gegebenen ihn darstellenden Punkte wäre noch ein zweiter darstellender Punkt nötig. Da aber der Verfasser sich mit dieser umgekehrten Frage nicht beschäftigt, so führt er den zweiten Punkt nicht ein.

Diese Darstellungsweise wird verwendet, um die Eigenschaften der complexen Punktreihe zu studiren. So wird die Gesamtheit der Punkte genannt, welche die Entfernung zweier reellen Punkte (Coordinatenanfang und ein Punkt der x-Axe) im Verhältnis $ke^{\sigma i}$ teilen (k und σ nehmen alle reellen Werte an). Si.

A. J. Boguslavsky. Ueber M. Marie's Methode der Darstellung der imaginären Elemente in der Geometrie. Arbeiten der VIII. Versamml. russ. Naturf. u. Aerzte, Abt. I, 16-20. (Russisch.)

In der Arbeit, über welche im vorigen Bande dieses Jahrbuchs (S. 694) referirt ist, wie auch in der früheren „Théorie des fonctions des variables imaginaires", t. I, giebt Hr. Marie den Beweis dafür, dass, damit der Punkt

$$\xi = \varphi(\alpha, \beta;\ \alpha', \beta'),\quad \eta = \psi(\alpha, \beta;\ \alpha', \beta')$$

eine vom Coordinatensystem unabhängige Beziehung zu dem imaginären Punkte $x = \alpha + \beta i$, $y = \alpha' + \beta' i$ habe und somit sein Repräsentant sein könne, die Functionen φ und ψ resp. gleich $\alpha + \beta$ und $\alpha' + \beta'$ sein müssen. Dieser Beweis scheint Herrn Boguslavsky fehlerhaft, da man aus der Gleichung

$$\psi(\beta', \beta) = \psi(\beta', \beta + 2\beta' \cos\theta)$$

(was ein Stadium des Beweises bildet) den Schluss der Unabhängigkeit der Function $\psi(\beta', \beta)$ von β nur dann ziehen kann, wenn diese Function vom Winkel θ der Coordinatenaxen nicht abhängt. Er hält deshalb die ganze Methode des Hrn. Marie für unberechtigt.

Dem Referenten, der kein besonderer Verteidiger der Vorteile der Methode des Hrn. Marie ist, scheint aber Herr Boguslavsky nur darauf aufmerksam gemacht zu haben, dass Hr. Marie die Voraussetzung solcher Unabhängigkeit implicite von Anfang an macht. Gewiss ist es deshalb noch klarer, dass diese Methode der Darstellung des Imaginären nicht die einzig mögliche ist, wie Hr. Marie selbst es behauptet, und Hr. Boguslavsky hat selbst ein Beispiel solcher Functionen gegeben, die den gemachten Forderungen Genüge leisten, aber von θ abhängen:

$$x_1 = \varphi = \alpha \mp \beta \operatorname{cotg}\theta \mp \beta' \operatorname{cosec}\theta,$$
$$y_1 = \psi = \alpha' \pm \beta' \operatorname{cotg}\theta \pm \beta \operatorname{cosec}\theta,$$

nämlich Laguerre's Punkte, im schiefwinkligen Coordinaten-System ausgedrückt. Doch ist, wie Hr. Suworow in seiner Dissertation gezeigt hat, diese mit der Staudt'schen eng verbundene Methode des Hrn. Marie noch keineswegs falsch.

Si.

Maximilien Marie. Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie. Nouv. Ann. (3) X. 172-179, 276-296, 329-340, 378-384, 417-428, 459-472; auch sep. bei Gauthier-Villars et Fils.

Wir hatten bereits im vorigen Jahre über eine Abhandlung des Herrn Marie berichtet, in der die imaginären, einem algebraischen Gebilde

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

angehörigen Elemente durch Betrachtung der conjugirten Curven bewältigt wurden (vergl. F. d. M. XXII. 1890. 694). Den Abschluss hatten Betrachtungen über das Integral

$$(2) \qquad \int y\,dx$$

gebildet. Von den Perioden entstanden die einen durch Integration längs der geschlossenen Züge der reellen Curve von (1) und ihrer „Imaginärenveloppe", andererseits hatten die geschlossenen Curven desselben „Systems conjugirter Curven", — die mit denselben Zügen der reellen Curve und ihrer Imaginärenveloppe in Berührung stehen, — denselben Inhalt, der, mit i multiplicirt, eine Periode war. Endlich ergab sich auf jeder Asymptote eine unendlich gestreckte Ellipse, deren Inhalt, mit πi multiplicirt, eine „cyklische Periode" war. Herr Marie erläutert nun, dass das Auftreten eines Doppelpunktes die Zahl der Perioden um zwei Einheiten vermindert. Geht z. B. ein geschlossener Zug der reellen Curve in einen isolirten Punkt über, so verschwindet ihr Inhalt, der vorher eine Periode war, und je zwei von den inhaltsgleichen conjugirten Curven, die vorher diesen Zug und einen anderen berührten, fliessen zu einem 8-förmigen Zuge zusammen, dessen Inhalt unter Beachtung des Umlaufssinnes verschwindet, weshalb noch eine Periode ausscheidet. Es verschwinden sämtliche Perioden des Integrals, wenn die algebraische Curve die Maximalzahl von Doppelpunkten und reellen Asymptoten besitzt und diese letzteren im Unendlichen dreipunktig berühren. Der Fall der Curve dritter Ordnung wird besonders behandelt.

Nach Andeutungen über die Rectification von Curven und einer kurzen Entwickelung über die Exponentialfunction und den Logarithmus wendet sich Herr Marie zu räumlichen Betrachtungen. Nachdem er gezeigt hat, dass der reelle Punkt

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta', \quad z_1 = \alpha'' + \beta''$$

zu dem imaginären Punkte

$$x = \alpha + \beta i, \quad y = \alpha' + \beta' i, \quad z = \alpha'' + \beta'' i$$

in einer Beziehung steht, die vom Coordinatensystem unabhängig ist, werden der Gleichung einer Fläche

$$(3) \qquad f(x, y, z) = 0$$

die Hülfsgleichungen

$$(4) \qquad \frac{\beta}{c} = \frac{\beta'}{c'} = \frac{\beta''}{c''}$$

adjungirt. Die Punkte, welche die Lösungen von (3) und (4) realisiren, liegen auf einer conjugirten Fläche der gegebenen. Diese Flächen berühren die reellen Schalen der gegebenen Flächen längs Curven und die Schalen einer Hülfsfläche, der „Realisirung der Imaginärenveloppe“, in Punkten. Eine Ebene, welche die Richtung

$$c : c' : c'' = x : y : z$$

der conjugirten Fläche enthält, schneidet sie in einer Curve, die zu der Schnittlinie von (3) mit der Ebene conjugirt ist. Hierauf beruht es, dass die geschlossenen conjugirten Flächen eines Systems dasselbe Volumen besitzen.

Ohne näher darauf einzugehen, wie das Doppelintegral

$$\int z \, dx \, dy$$

bei fester Begrenzung, aber veränderlichem Integrationsgebiet sich verhält, spricht Herr Marie doch von „Perioden“ des Doppelintegrals. Unter einer Periode wird der Wert des Integrals

$$\int \Omega \, dy$$

verstanden, wobei Ω eine Periode des Integrals $\int z dx$ der Curve

$$f(x, y, z) = 0, \quad y = \text{const.}$$

ist, und die Integration zwischen zwei Werten zu nehmen ist, für welche Ω verschwindet. Einzelne von diesen Perioden, z. B. die Inhalte geschlossener Schalen der Fläche und die mit i multiplicirten Inhalte geschlossener Schalen einer conjugirten Fläche, sind vom Coordinatensystem unabhängig. Bei anderen, die z. B. aus abgeplatteten Ellipsoiden in den Tangentialebenen unendlich ferner Punkte resultiren, wird auf die Erörterung dieser Frage nicht eingegangen.

Herr Marie wendet sich nun zu den Flächen n^{ter} Ordnung, bei denen alle Perioden verschwinden. Jedenfalls müssen sie eine Doppelcurve von möglichst grosser Ordnung besitzen, ausserdem von n Ebenen im Unendlichen je in einer dreifachen Geraden geschnitten werden. Den Abschluss der Arbeit bilden Betrachtungen über die Taylor'sche Reihe. E. K.

C.-A. Laisant. Sur l'extension de la géométrie cartésienne aux figures imaginaires. S. M. F. Bull. XIX. 29-30.

Der Verfasser ergänzt einen früheren Versuch, imaginäre Coordinaten in die ebene Geometrie einzuführen, indem er nach dem Vorgang von Hrn. Tarry einen Doppelpunkt (System zweier conjugirten Punkte) durch die Aequipollenz

$$(M, M') = (X, cj.X') + (Y, cj.Y')e^{\vartheta}$$

definirt, wo ϑ den Winkel zwischen den Axen bezeichnet.

H.

Ch. Berdellé. Calcul directif. Rectification importante. Surfaces de révolution de la droite et leurs sections planes. Assoc. Franç. Marseille XX. 181-185.

Während der Verf. früher eine erste Axe für die reelle Einheit 1, eine zweite dazu senkrechte für die Einheit i und eine dritte, zu den beiden ersten senkrechte für i^i annahm, verwirft er jetzt diese letzte Deutung und führt eine selbständige Einheit j auf der dritten Axe ein. Dadurch erhält $\sqrt{-1}$ unendlich viele Werte, nämlich $i\cos a + j\sin a$ bei beliebig zu wählendem a. Eine Anwendung dieser Lehre auf das einschalige Rotationshyperboloid soll die Fruchtbarkeit derselben erweisen. Ueber die Beziehung zur Quaternionentheorie schweigt der Aufsatz.

Lp.

O. Stolz. Ueber die geometrische Bedeutung der complexen Elemente der analytischen Geometrie. Innsbruck. Naturw.-medic. Ver. 1890-91. 3-7.

Uebersichtliche Zusammenstellung des auf dem genannten Gebiete Geleisteten mit Hinweis auf des Verfassers einschlägige Arbeit in Bd. IV der Math. Ann. Schg.

Fr. Schilling. Ueber die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente. Gött. Nachr. 1891. 188-190.

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie sind Relationen zwischen den drei Kantenwinkeln λ_1, λ_2, λ_3 und den drei Seitenwinkeln l_1, l_2, l_3 eines räumlichen Dreikants, dessen Scheitel im Kugelmittelpunkte liegt, und dessen Kanten die Schnittgeraden der drei Seitenebenen des vorliegenden sphärischen Dreiecks sind. Man setze zunächst

$$\lambda_\nu = \lambda'_\nu + i\lambda''_\nu; \quad l_\nu = l'_\nu + il''_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

und betrachte alsdann das Gebilde dreier beliebig im Raume gelegenen, gegen einander windschiefen Geraden I, II, III, welche die Kugel in reellen Punkten schneiden, und construire die drei inneren kürzesten Abstände, welche im Sinne der auf die Kugel zu gründenden projectiven Massgeometrie zwischen je zweien der Geraden I, II, III stattfinden. Es sei hierbei allgemein der Abstand zweier Punkte, wie der Winkel zweier Ebenen, definirt als $\frac{i}{2}\log DV$, wo DV das Doppelverhältnis bedeutet, welches die beiden Punkte, resp. Ebenen mit den Schnittpunkten der Verbindungslinie der beiden Punkte mit der Kugel, resp. den Tangentialebenen durch die Schnittgerade der beiden Ebenen an die Kugel bilden. Man bezeichne dann den Winkel der jedesmaligen beiden Ebenen, welche durch je eine der Geraden I, II, III und die zu ihr gehörigen kürzesten Abstände sich legen lassen, bezw. mit λ'_1, λ'_2, λ'_3, dagegen die durch die kürzesten Abstände auf den Geraden I, II, III abgeschnittenen Längen mit $i\lambda''_1$, $i\lambda''_2$, $i\lambda''_3$. Entsprechend setze man den Winkel der beiden Ebenen, die sich durch je einen der kürzesten Abstände und die zugehörigen beiden Geraden legen lassen, gleich l'_1, l'_2, l'_3,

die Länge der kürzesten Abstände selbst gleich il''_1, il''_2, il''_3; dann gilt Folgendes:

Setzt man die so definirten Grössen in der angegebenen Weise zu den sechs Grössen λ_1, λ_2, λ_3; l_1, l_2, l_3 zusammen, so bestehen zwischen den letzteren gerade die Formeln, wie sie die Relationen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie darstellen. Wz.

J. Evrard. Mémoire sur l'interprétation des symboles dits imaginaires ou théorie des acceptions avec ses applications en algèbre et en géométrie (extrait principalement des travaux inédits de feu l'abbé George). Paris. XXII + 239 S. gr. 8°.

E. Carvallo. Sur les systèmes linéaires, le calcul des symboles différentiels et leur application à la physique mathématique. Monatsh. f. Math. II. 177-216, 225-266, 311-330.

Die Arbeit enthält in ihrem ersten Teile eine weitere Ausführung der von Laguerre (1867) begründeten Theorie der „linearen Systeme". Sind J_1, J_2, J_3 drei auf einander senkrechte Axen im Raume, so sind im Sinne der Streckenrechnung zwei Vectoren X und Y dargestellt durch die Gleichungen

$$X = x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3, \quad Y = y_1 J_1, + y_2 J_2 + y_3 J_3.$$

Sind dann die Zahlen y_1, y_2, y_3 mittels des „linearen Systems" von neun Coefficienten a_{rs} $(r, s = 1, 2, 3)$ als lineare Functionen von x_1, x_2, x_3 ausgedrückt, so wird dieser Zusammenhang zwischen X und Y durch die Gleichung $Y = \varphi(X)$ dargestellt, und $\varphi(X)$ eine Vectorfunction genannt. Während aber Laguerre das Zeichen φ nur in algebraischem Sinne auffasst, betrachtet der Verf. dasselbe als ein geometrisches Operationssymbol, welches den Vector X in Y überführt, und vervollständigt den von Laguerre nur für Addition, Subtraction und Multiplication ausgeführten Algorithmus dieses Symbols durch Hinzufügung der Potenzirung, Reihenentwickelung, Umkehrung, Division, Radicirung und beliebiger Functionsbeziehungen. Bemerkenswert ist, dass

schon Hamilton diesen Calcul ohne Beweis auf die Quaternionen anwendet, dass der Verf. seine streng folgerichtige Ableitung desselben ohne Hülfe der Quaternionen ausführt, und dass die vereinfachende Wirkung der letzteren um so mehr auf die Vectorfunction zurückzuführen ist, da die Quaternion selbst nur als specieller Fall der für das vierdimensionale Gebiet aufgestellten Vectorfunction erscheint, wobei das zugehörige lineare System statt 16 nur vier verschiedene Coefficienten enthält, die das Bild einer schiefen Determinante geben. Es folgen Invarianten und Determinanten der Vectorfunction, die Bedingungen des Verschwindens und des Constantbleibens einer Richtung, Auflösung der Vectorgleichung, conjugirte und symmetrische Vectorfunctionen, Anwendung auf beliebige Functionen der Coordinaten in der analytischen Geometrie, auf geometrische Aufgaben, u. s. w. Ueberall tritt die vereinfachende Kraft der Vectorfunction auf das deutlichste hervor.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit den Differential-Eigenschaften der Vectorfunctionen, die der Verf. zum Teil schon in einer früheren Arbeit (Formules de quaternions; vgl. F. d. M. XXII. 1890. 292) behandelt hatte. Hier tritt in erster Linie die Bedeutung des Operationssymbols „Delta" (∇) hervor, definirt durch die Formel

$$\nabla = J_1 \frac{d}{dx_1} + J_2 \frac{d}{dx_2} + J_3 \frac{d}{dx_3}.$$

Dasselbe kann gleichzeitig als Zeichen der Ableitung und als Vector aufgefasst werden und wird, wenngleich bereits von anderen Autoren eingeführt, hier zum ersten Male systematisch behandelt. Mit Hülfe dieser Theorie werden zwei allgemeine Formeln aufgestellt, um die in der mathematischen Physik auftretenden einfachen, doppelten und dreifachen Integrale in einander überzuführen.

Im dritten Teile wird als Anwendung des Vorhergehenden eine neue Darstellung der von Duhamel aufgestellten Theorie der Wärmeleitung in Krystallen gegeben, wobei sich herausstellt, dass die von Lamé ausgeführte Verallgemeinerung dieser Theorie entbehrlich ist, und dass die von ihm benutzten neun Coefficienten

auf die sechs von Duhamel verwendeten zurückgeführt werden müssen. Die Arbeit im ganzen macht den Eindruck einer wesentlich vervollkommneten und vereinfachten Darstellung derjenigen Principien der Quaternionen-Theorie, welche ihrer methodischen Vorteile wegen als dauernd lebensfähig anerkannt werden dürfen. Von dieser Darstellung zu derjenigen der Ausdehnungslehre ist nur noch ein Schritt, den der Verf., wie aus weiteren Berichten ersichtlich sein wird, auch alsbald gethan hat. Die vorliegende Arbeit zeichnet sich durch hervorragend lichtvolle und übersichtliche Schreibweise aus. Schg.

A. J. Boguslavsky. Algebra der Ebene und des Raumes, oder Calculus situs. Aus Mosk. Math. Samml. B. XIV, XV u. XVI; Moskau. 1891. VIII + 229 S. (Russisch.)

Durch dieses Werk hat Herr Boguslavsky dem russischen mathematischen Publicum und der Wissenschaft einen grossen Dienst geleistet, und wir hoffen, dass die Absicht des Verfassers, die Ausbreitung der Ideen von H. Grassmann zu fördern, ihre völlige Erfüllung finden wird. Es handelt sich aber nicht nur um die Darlegung der Resultate anderer; die Darstellung ist selbständig und an eigene Forschungen geknüpft. Das Buch besteht aus vier Capiteln. Im ersten giebt der Verf. die Begriffe der verschiedenen räumlichen Grössen und ihre Einteilung in Stufen, um im zweiten zu den Operationen mit räumlichen Gebilden erster Stufe überzugehen. Jedem Schritte in der Theorie folgen gut gewählte Anwendungen, so auf die Aufstellung eines Systems von homogenen Coordinaten in der Ebene und auf das Studium der projectivischen Büschel. In § 11-15 führt die Betrachtung der Summe dreier Masspunkte und dreier Vectoren in der Ebene zu einer allgemeinen Methode der Untersuchung der Fragen der sogenannten Geometrie des Dreiecks. Im dritten Capitel werden die Operationen mit Gebilden höherer Stufen betrachtet. Unter den Anwendungen erwähnen wir die einfache Darstellung der Determinantentheorie und eine sehr einfache Ableitung der Grundformeln der sphärischen Geometrie.

Endlich wird im vierten Capitel (unter dem Titel: Calculus situs) die auseinandergesetzte Methode auf das Studium einiger Fragen der projectivischen Geometrie angewandt, und es zeigt sich ihre Fruchtbarkeit auch auf diesem Gebiete. Die Methode führt endlich zur Darstellung des Imaginären, die mit der Laguerre'schen übereinstimmt.

Wenn auch in den Litteraturanzeigen einige Lücken vorhanden sind (z. B. ist G. Peano's Calcolo geometrico nicht erwähnt), so entspricht doch das Werk den Worten des Verfassers (im Vorwort), dass seine Arbeit die Methoden des barycentrischen Calculs von Möbius und die Theorie der Aequipollenzen von Bellavitis vereinigt; zum tieferen Studium der Werke von Grassmann wird es sicherlich anregen. Si.

G. Peano. Gli elementi di calcolo geometrico. Torino. Tip. G. Candeletti. 42 S. 8°.

G. Peano. Die Grundzüge des geometrischen Calculs. Autorisirte deutsche Ausgabe von A. Schepp. Leipzig. B. G. Teubner. 38 S. 8°.

Die Schrift ist anzusehen als Auszug aus des Verfassers grösserem Werke „Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann" (1888). Sie beschränkt sich in dem theoretischen Teile auf die einfachsten Gesetze der Rechnung mit Punkten und Strecken, wobei jedoch die äussere Multiplication nicht erwähnt und auch nur bei der Bildung des Tetraeder-Volumens angewandt wird. Am eingehendsten ist die Drehung einer Strecke durch den Factor e^{it} (i^{α} in der „Raumlehre" des Ref.) behandelt. Hieraus ergeben sich in einfachster Weise auf wenigen Seiten die Gleichungen der wichtigsten Curven und die Hauptbegriffe und Sätze der Curven- und Flächentheorie. Dass der Verf. als Zeichen der inneren Multiplication wieder das von Grassmann selbst aufgegebene liegende Kreuz gewählt hat, können wir schon im Interesse einheitlicher Bezeichnungen nicht als Verbesserung ansehen. Im übrigen ist die kleine Schrift mit ihrer klaren und übersichtlichen Darstellung sehr gut geeig-

net, wenigstens nach einer Seite hin eine Vorstellung von den Vorteilen der Ausdehnungslehre zu gewähren. Dass der Uebersetzer bei sonstiger Worttreue den in der Vorrede des Verf. stehenden ausdrücklichen Hinweis auf das oben genannte grössere Werk des Verf. fortgelassen hat, ist im Interesse der Sache zu bedauern. Schg.

P. MOLENBROEK. Theorie der Quaternionen. Leiden. E. J. Brill. XII + 284 S. 8°.

Im Hinblick auf die vorhandenen deutschen Bearbeitungen der Quaternionen (z. B. von Odstrčil, Graefe, nebst Uebersetzung des Hamilton'schen Originalwerkes durch Glan) kann es zweifelhaft erscheinen, ob eine weitere Arbeit derselben Art noch ein Bedürfnis ist. Jedenfalls aber hat der Verf. Recht, wenn er sagt, dass zur Verbreitung der Kenntnis dieses Zweiges der Mathematik eine kurze Darstellung der wesentlichen Theorien desselben geeigneter ist als das umfangreiche Originalwerk. Das vorliegende Buch beschränkt sich auf die Theorie selbst (im Anschluss an Hamilton) und behandelt die Anwendungen nur andeutend. Eine systematische Darstellung derselben soll folgen. Doch bietet der Verf. auch einiges Neue, und zwar in der geometrischen Deutung der imaginären Grössen, die übrigens völlig unabhängig von der eigentlichen Quaternionenrechnung ist. Ist α ein Vector im Raume, so wird unter αi der Inbegriff aller Strecken verstanden, welche aus α durch Drehung um einen rechten Winkel entstehen können, also die im Endpunkte von α senkrechte Kreisfläche (Vectorkreis) mit dem Radius α. Demgemäss, wenn β ein anderer Vector ist, der mit α einen Endpunkt gemeinsam hat, unter $\beta + \alpha i$ der Mantel des Kegels (Vectorkegel), welcher β zur Axe und den Kreis αi zur Grundfläche hat. Eine Quaternion, welche einen einfachen Vector in einen Vectorkegel transformirt, wird eine „konisch spaltende" genannt, und ihre Wirkung mit derjenigen eines doppelt brechenden Krystalls verglichen, der, wie Hamilton gezeigt, unter Umständen einen auffallenden Lichtstrahl in einen Strahlenkegel zweiten Grades spalten kann. Die imaginären Punkte einer reellen Ge-

raden sind in diesem Zusammenhange Kreislinien in Ebenen, welche auf der Geraden senkrecht stehen, und mit Mittelpunkten, welche in der Geraden liegen. Legt man durch die reelle Gerade eine beliebige Ebene, so kann man die Schnittpunkte derselben mit einer solchen Kreislinie als Repräsentanten zweier conjugirt-imaginären Punkte in dieser Ebene auffassen und gelangt so zu derselben Darstellungsart imaginärer Punkte, welche Ref. im „System der Raumlehre" II. 111 (1875) und Schlömilch Z. XXIII. 143ff., sowie Tarry in seiner „Géométrie générale" (1889) gegeben hat. Die Sprache des Buches ist meist correct und überall verständlich, wenn auch mancherlei Eigenheiten der Ausdrucksweise den Ausländer verraten. (Vergl. die Selbstanzeige auf S. 75 dieses Bandes. Red.) Schg.

R. Grassmann. Die Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft von den extensiven Grössen in strenger Formelentwickelung. Stettin. R. Grassmann. IX + 132 S. 8°.

In Betreff der Stellung des vorliegenden Werkes zu sonstigen Arbeiten des Verfassers und der Eigentümlichkeiten seiner Darstellungsweise vergleiche man das Referat über des Verfassers „Zahlenlehre", S. 158 dieses Bandes der F. d. M. Von besonderem Interesse ist hier das Vorwort, weil der Verfasser darin über den Anteil, welchen er an der Ausarbeitung der „Ausdehnungslehre" seines Bruders gehabt hat, eingehendere Auskunft giebt. Doch constatirt er ausdrücklich das alleinige geistige Eigentum des Bruders an dieser Wissenschaft. Dem Buche selbst, welches als Erweiterung einer schon 1872 publicirten kleinen Schrift anzusehen ist, liegt im wesentlichen Gang und Darstellungsweise der „Ausdehnungslehre von 1862" zu Grunde; doch fehlt die einem besonderen Bande zuzuweisende Functionenlehre, und die geometrischen Anwendungen sind bis auf einzelne Veranschaulichungs-Beispiele weggelassen. Dagegen ist eine übersichtlichere und durchsichtigere Anordnung des Stoffes im einzelnen durchgeführt, die Beweise sind gekürzt, auch finden sich kleine Aenderungen in der Bezeichnungsweise, und im Rahmen

einer fast völligen Umgestaltung der Terminologie auch solche Aenderungen, durch welche der Verfasser einzelne Begriffe vor Verwechselungen besser zu sichern bestrebt ist. Wenn dann mit leisem Tadel bemerkt wird, dass es bisher noch niemand weiter unternommen habe, die Ausdehnungslehre in ihrer vollen Allgemeinheit neu darzustellen, so liegt der Grund darin, dass diese Arbeit, wie einst, so noch heute in der Luft schweben würde, und erst dann zeitgemäss erscheinen wird, wenn die Ausfüllung dieses grossen abstracten Gebäudes mit geometrischem Inhalt in der Hauptsache vollendet sein wird, wozu nicht mehr lange Zeit erforderlich sein dürfte. Ein künftiger Bearbeiter der Ausdehnungslehre wird zwar immer auf den Arbeiten H. Grassmann's fussen müssen, aber auch aus dem vorliegenden Buche mancherlei Belehrung schöpfen. Schg.

H. Taber. On the application to matrices of any order of the quaternion symbols *S* and *V*. Lond. M. S. Proc. XXII. 67-79.

Die vom Verf. an anderer Stelle (American Journ. XII) gegebene Ausdehnung des Begriffs einer Matrize zweiter Ordnung (Vector- und Scalarteil einer Quaternion) auf beliebig hohe Ordnungen wird hier benutzt, um verschiedene von Sylvester aufgestellte Sätze und Aufgaben in kurzer Form zu behandeln, bezw. zu vervollständigen. Schg.

P. Molenbroek. Ueber die geometrische Darstellbarkeit imaginärer Punkte im Raume. Hoppe Arch. (2) X. 261-282.

A. Macfarlane. Principles of the algebra of physics. Amer. Assoc. adv. of Science XL. 65-117.

Bericht auf S. 76 und 78 dieses Bandes.

A. S. Christie. What is a quaternion? Washington Bull. XI. 579-580.

R. GAERTNER. Teilungen. Hoppe Arch. (2) X. 337-379.

Eine geometrische Deutung gewisser algebraischer Beziehungen, welche besonders Bemerkenswertes nicht bietet.

Schn.

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

W. DYCK. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme. Münch. Ber. XXI. 23-57.

Die durch eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

mit reellen Coefficienten zwischen zwei Veränderlichen x, y in der xy-Ebene definirten Curven werden zunächst hinsichtlich ihres Verlaufs in der Umgebung derjenigen Punkte x, y untersucht, welche durch das Gleichungssystem

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

definirt sind, wo y' zur Abkürzung für $\frac{dy}{dx}$ gesetzt ist. Wird die durch die beiden ersten dieser Gleichungen definirte Curve die Discriminantencurve genannt, so sind jene Punkte geometrisch dadurch charakterisirt, dass in ihnen die Richtung der Tangente an die Integralcurve zusammenfällt mit der Richtung der Tangente an die Discriminantencurve. Der Verfasser verlegt den Coordinatenanfangspunkt in einen jener Punkte und die x-Axe in die genannte Tangentialrichtung; werden dann bei der Potenzentwickelung lediglich diejenigen Glieder berücksichtigt, die in x und y' von der zweiten Dimension sind, so ergiebt sich

die Differentialgleichung zweiten Grades

$$y'^2 + 2cxy' + bx^2 + 2ay = 0,$$

wo a, b, c Constanten sind, und aus welcher durch Differentiation nach x die Differentialgleichung ersten Grades

$$(cx + y')\frac{dy'}{dx} + bx + (a + c)y' = 0$$

entsteht. Den Verlauf der durch diese letztere Differentialgleichung definirten Curven deutet der Verfasser zunächst in der xy'-Ebene und kehrt dann mit Hülfe der ein-zweideutigen Abbildung dieser Ebene in die ursprüngliche xy-Ebene zurück. Auf diese Weise zeigt sich, dass man unter den in Betracht gezogenen singulären Stellen einer Differentialgleichung erster Ordnung im allgemeinen drei Fälle zu unterscheiden hat. Im ersten Falle bilden die Curven in der xy'-Ebene logarithmische Spiralen, und diesen entsprechen in der xy-Ebene Curven, welche im Innenbereich der Discriminantencurve unendlich oft um den singulären Punkt oscilliren und dabei mit Spitzen auf die Discriminantencurve auftreffen. In dem zweiten und dritten Falle gehen durch den singulären Punkt in der xy'-Ebene je zwei ausgezeichnete Gerade, gegen die sich die übrigen Integralcurven in einfacher Weise gruppiren, und diesen Geraden entsprechen je zwei Parabeln in der xy-Ebene. Nunmehr folgt eine Untersuchung über den Gesamtverlauf der Curvensysteme, insbesondere über die Relationen zwischen der Anzahl der singulären Stellen in einem gegebenen, von der Discriminantencurve begrenzten Gebiet, wobei die schon in früheren Arbeiten vom Verfasser angewandten Kronecker'schen Charakteristiken als Hülfsmittel dienen. Ht.

A. E. Pellet. Sur la rectification approximative d'un arc de courbe. S. M. F. Bull. XIX. 5-8.

Zuerst wird der allgemeine Satz bewiesen: Trägt man auf der Tangente einer ebenen Curve vom Berührungspunkte aus nach beiden Seiten hin zwei gleiche unendlich kleine Strecken, ferner auf der Normale nach dem Krümmungsmittelpunkte hin den

dreifachen Krümmungsradius ab und verbindet den letzteren Endpunkt mit den beiden ersteren durch zwei Gerade, so begrenzen diese auf der Curve einen Bogen, der von der Tangente um ein Unendlichkleines fünfter Ordnung differirt. Auf der Ellipse, Hyperbel und Parabel giebt es zwei Punkte, wo jene Differenz siebenter Ordnung ist. Auf den Flächen zweiten Grades ist sie in den Nabelpunkten und parabolischen Punkten sechster Ordnung. H.

M. d'Ocagne. Sur la liaison entre les expressions du rayon de courbure en coordonnées ponctuelles et en coordonnées tangentielles. S. M. F. Bull. XIX. 26-29.

Die cartesischen Coordinaten eines Curvenpunktes M seien x, y; die plücker'schen Coordinaten der Tangente in M (negative reciproke Strecken, welche die Tangente auf der x- und y-Axe abschneidet) η, ζ; die parallelen Coordinaten der Tangente (Ordinate in $x = 0$ und variabelm x') u, v; dieselben von M (d. h. negative reciproke Ordinaten der durch dieselben Fusspunkte und M gezogenen Geraden, entsprechend denselben Abscissen) p, q. Dann ist

$$\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \frac{1}{y^3\zeta^3};\qquad \frac{d^2v}{du^2}\,\frac{d^2q}{dp^2} = \frac{1}{v^3q^3}.$$

Demzufolge wird der Krümmungsradius

$$R = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}\left(\frac{OH}{OP}\right)^3 = \frac{d^2\zeta}{d\eta^2}\left(\frac{MT}{OT}\right)^3 = \frac{d^2v}{du^2}\,\frac{(SM)^3}{\delta} = \frac{2}{\frac{d^2q}{dp^2}}\,\frac{(AK)^3}{\delta}.$$

Hier ist $\delta = OO'$, wo O Anfang der xy, O' der Punkt $x = x'$, $y = 0$; OH die Parallele mit der Tangente; P, H die Punkte, in denen das Lot von M auf die x-Axe diese und OH schneidet; ST die Tangente, begrenzt von der y- und x-Axe; AK die Gerade durch M und O', begrenzt durch die y-Axe und OH. Aus dem ersten, sowie vierten Ausdruck von R folgt ein Satz von Reiss.

H.

M. d'Ocagne. Sur une détermination particulière du centre de courbure des lignes planes. Application aux courbes algébriques d'ordre quelconque. S. M. F. Bull. XIX. 31-34.

Es wird die Formel hergeleitet:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{\Omega N}{\Omega M}\frac{1}{\sin^2\vartheta},$$

wo P das Quadrat des Radiusvectors des Curvenpunktes M, N der Schnittpunkt der Normale und der x-Axe, Ω der Krümmungsmittelpunkt und ϑ der Winkel zwischen der Normale und der x-Axe ist; dadurch wird folgender Satz begründet: Schneidet eine Gerade eine algebraische Curve m^{ter} Ordnung in den Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_m$ unter den Winkeln $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m$; trifft ferner eine auf ihr senkrechte Gerade die den M entsprechenden Normalen in $N_1, N_2, \ldots, N_m$, und sind $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$ die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte, so ist

$$\Sigma\frac{\Omega N}{\Omega M}\frac{1}{\sin^2\vartheta} = \Sigma\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Winkel zwischen den m Asymptoten und der ersten Geraden bezeichnen. H.

M. d'Ocagne. Détermination du rayon de courbure en coordonnées parallèles ponctuelles. Belg. Bull. (3) XXI. 220-227.

E. Catalan. Rapport. Ibid. 118-119.

Zwei parallele Gerade AP, BQ, auf denen zwei feste Punkte A, B markirt sind, werden durch die Geraden MB, MA in B_1, A_1 geschnitten. Setzen wir $p = (1 : AB_1)$, $q = (1 : BA_1)$, so sind p und q die parallelen Coordinaten von M. Der Krümmungsradius einer ebenen Curve in einem Punkte M wird durch die Formel

$$\frac{1}{R} = \delta\frac{d^2p}{dq^2} : \overline{BH}^3$$

gegeben, wo δ der Abstand von AP und BQ ist, H der Schnittpunkt von AM mit der durch B zur Tangente in M gezogenen

Parallele *BH*. Diese Formel ermöglicht leicht die Aufstellung einer gleichwertigen Formel für das Reiss'sche Theorem über die Krümmung einer Curve in den Punkten, in denen sie durch eine Gerade geschnitten wird. Mn. (Lp.)

H. DE RHÉVILLE. Construction géométrique du centre de courbure en un point d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires. Nouv. Ann. (3) X. 411-416.

Ist der Radiusvector ϱ, die Amplitude ω und die Normale a eines Curvenpunktes A gegeben, und ist N Schnittpunkt von a mit dem im Anfangspunkte O des Coordinatensystems auf ϱ errichteten Lote, und F Schnittpunkt von ϱ mit dem nunmehr in N auf a errichteten Lote, so liegt der zu A gehörige Krümmungsmittelpunkt C auf a in der Mitte einer Strecke NN' von der Eigenschaft, dass die Parallele $N'G$ zu CF auf ϱ eine Strecke $OG = -\frac{d^2\varrho}{d\omega^2}$ bestimmt. A, N und der Schnittpunkt D von NF mit OC sind Eckpunkte eines Dreiecks, dessen Seite AD mit NO einen Punkt B gemein hat, für den die Beziehung

$$OA\,.\,OB = \frac{1}{\frac{d^2\omega}{d\varrho^2}}$$

gilt. Die für OG und $OA\,.\,OB$ ermittelten Bedingungen führen jede zu einer linearen Construction des zu A gehörigen Krümmungsmittelpunktes C. Js.

A. DEMOULIN. Sur la courbure des lignes planes. Belg. Mém. C. in 8°. XLIV. 48 S.

Diese Abhandlung ist in den Berichten der mit der Prüfung beauftragten Herren Mansion, Catalan, Le Paige besprochen worden (Belg. Bull. XX. 20-27. 1890). Folgendes sind die Grundgedanken. Es seien A und B zwei feste Punkte, $\varDelta$ eine feste Gerade, die AB in O trifft. Die Lage jedes Punktes M der Ebene $(AB, \varDelta)$ wird durch die positiven oder negativen

Abstände $m = OA'$, $n = OB'$ der Schnittpunkte A', B' von Δ mit AM und BM bestimmt. In dem Coordinatensysteme (m, n) besitzt eine Gerade eine Gleichung von der Gestalt $am + bn + cmn = 0$. Der Verf. sucht die Tangente und den Krümmungsradius einer Curve in diesem neuen Coordinatensystem und macht sehr schöne Anwendungen von ihm auf die Kegelschnitte und besonders auf die Curven dritter Ordnung. Mn. (Lp.)

H. Godefroy. Relation entre les rayons de courbure des développées des courbes réciproques. S. M. F. Bull. XIX. 109-113.

Die Tangenten zweier Curven in zwei Punkten L, L_1 mögen sich in A schneiden. Die Gerade LL_1 berühre eine dritte Curve in M. A erzeugt eine Curve, deren Normale AP sei. Es sei

$$LM = l, \quad L_1M = l_1,$$
$$\angle\, ALM = \lambda, \quad AL_1M = \lambda_1, \quad LAP = \alpha, \quad L_1AP = \alpha_1.$$

Dann ist nach Aoust, Analyse infinitésimale des courbes planes, L. II. Ch. IV. 294, die Relation bekannt:

$$\frac{r \sin^2\lambda \cos\alpha}{l} = \frac{r_1 \sin^2\lambda_1 \cos\alpha_1}{l_1},$$

wo r, r_1 die Krümmungsradien der Curven (L), (L_1) bezeichnen. Es wird der Fall betrachtet, wo AL mit AP zusammenfällt, und auf zwei Curven (A), (A') angewandt. Dann ergiebt sich die Relation:

$$(3) \qquad \frac{r \sin^2\lambda}{l \cos\alpha_1} = \frac{r' \sin^2\lambda'}{l' \cos\alpha'_1} = \frac{r_1 \sin^2\lambda_1}{l_1},$$

welche zu folgenden zwei Sätzen führt. Der erste lautet: „Ist eine Curve B so beschaffen, dass das Verhältnis $BA : BA'$ der Entfernungen jedes ihrer Punkte von zwei Curven (A) und (A') constant ist, so liegen die Krümmungsmittelpunkte von (A) und (A') in gerader Linie mit dem Punkte, wo AA' seine Enveloppe berührt". (Zu ergänzen ist vermutlich, dass dieser Punkt eben der obengenannte Punkt B sein soll.) Zweitens wird der Fall betrachtet, wo die Curven (L), (L') transformirte durch reciproke

Radienvectoren von einander sind. Gleichung (3) wird dann:

$$\frac{LD}{l} = \frac{L'D'}{l'},$$

wo

$$LD = r\sin^2\lambda, \quad L'D' = r'\sin^2\lambda'$$

ist, und D, D' die Fusspunkte der Lote aus den Krümmungsmittelpunkten der Evoluten von (A) und (A') auf LL' bedeuten. Der Satz sagt dann, dass D und D' mit dem Pole der Transformation in gerader Linie liegen. H.

Cl. Servais. Sur la courbure de la podaire et de la polaire réciproque d'une courbe donnée. Mathesis (2) I. 84-88.

Synthetischer Beweis einiger neuen oder alten Formeln nach einem sehr einfachen Verfahren. Mn. (Lp.)

G. de Longchamps. Les sommets dans les courbes planes. Assoc. Franç. Marseille XX. 23-37.

„Scheitel" (sommet) einer Curve sind die Punkte, in denen der Krümmungskreis eine vierpunktige Berührung mit ihr hat. Der Aufsatz beschäftigt sich zuerst mit den bekannten Eigenschaften der Scheitel und geht im zweiten Teile auf die Beziehungen der unendlich kleinen geometrischen Grössen in der Umgebung des Scheitels näher ein. Die Note soll nach Angabe des Verfassers das erste Capitel einer grösseren Untersuchung ausmachen. Lp.

G. Pirondini. Alcune questioni sulle evolute successive di una linea piana. Napoli Rend. (2) V. 139-150.

Die vier Paragraphen umfassende Mitteilung beschäftigt sich mit den aufeinander folgenden Evoluten einer ebenen Curve. Im § 1 wird jene Curve L gesucht, die so beschaffen ist, dass jeder ihrer Punkte mit den entsprechenden Krümmungscentren

der zweiten und vierten Krümmung auf je einer Geraden liegt. Dabei ergiebt sich durch einfache Rechnung folgendes Resultat: „Wenn dieser Fall eintritt, so enthält die betreffende Gerade nicht nur die Centren der zweiten und vierten Krümmung, sondern die sämtlichen zusammengehörigen Centren aller Evoluten gerader Ordnung; desgleichen liegen auch die entsprechenden Punkte aller Evoluten ungerader Ordnung in einer zweiten Geraden, die mit der entsprechenden ersten einen constanten Winkel einschliesst. Ferner sind die Evoluten gerader Ordnung sämtlich unter einander und mit der Curve L ähnlich, während die ungerader Ordnung unter sich ähnlich werden. Die einzig möglichen Curven dieser Gattung sind die Spiralen:

$$\text{(I)} \qquad \varrho = ae^{m\theta} + be^{-m\theta}$$

und die cykloidalen Curven:

$$\text{(II)} \qquad \varrho = a\cos(m\theta + b).$$

Im § 2 wird der specielle Fall behandelt, in welchem die vierte Evolute mit der ursprünglichen Curve L zusammenfällt. Diesem Fall entspricht nur jene Curvenfamilie, die man für $m = 1$ aus Gleichung (I) erhält.

§ 3. Soll die Curve L mit ihrer achten Evolute zusammenfallen, so dass die entsprechenden Punkte auf einander zu liegen kommen, so ergiebt sich nur eine Curvenfamilie, die dieser Eigenschaft genügt und durch die Gleichung gegeben ist:

$$\text{(III)} \qquad \varrho = Ae^{\theta} + Be^{-\theta} + Ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}\theta}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\theta + D\right) + Ee^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\theta}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\theta + F\right).$$

§ 4. Lässt man die Ebene, welche ein geschlossenes System von vier Curven des § 2 oder ein geschlossenes System von acht Curven des § 3 enthält, auf einer developpabeln Fläche rollen, so erhält man ein geschlossenes System von vier, resp. acht Flächen (surfaces moulures von Monge), in welchem jede Fläche jener Mantel der Krümmungscentrafläche der vorhergehenden ist, welcher den geodätischen Krümmungslinien entspricht. Bm.

Ph. Gilbert. Sur un cas singulier du problème des courbes enveloppes. Brux. S. sc. XV A. 37-39.

Die Hüllcurve der Curven mit den Gleichungen

$$F(x, y, c)\, f(x, y, c) = 0$$

enthält die Schnittpunkte der Curven

$$F(x, y, c) = 0, \quad f(x, y, c) = 0.$$

Mn. (Lp.)

J. Neuberg, G. de Longchamps, H. J. Woodall. Solution of question 10926. Ed. Times. LV. 91.

Eine Gerade wälzt sich auf einer gegebenen Curve. Die Winkelhalbirende zwischen jener beweglichen Geraden und einer fest gegebenen Geraden berührt ihre eigene Hüllcurve in ihrem Schnittpunkte mit der Normale der gegebenen Curve.

Lp.

B. Theorie der algebraischen Curven.

G. Torelli. Appunti sulla teoria delle forme. Annali del R. Istituto Tecnico e Nautico di Napoli.

1. Wir betrachten n binäre Formen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vom Grade n in den Variabeln x_1, x_2. Durch θ bezeichnen wir die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{d^{n-1} u_1}{dx_1^{n-1}} \frac{d^{n-1} u_2}{dx_1^{n-2} dx_2} \cdots \frac{d^{n-1} u_n}{dx_2^{n-1}}$$

und durch Θ die Determinante, welche aus den Formen n^{ten} Grades $U_1, U_2, \ldots, U_n$ wie θ aus den $u_1, u_2, \ldots, u_n$ entspringt. Bezeichnet man endlich durch $(fJ)_m$ die m^{te} Ueberschiebung von f über J, so ist identisch:

$$(n!)^{2n} \begin{vmatrix} (u_1 U_1)^n & (u_1 U_2)^n & \ldots & (u_1 U_n)^n \\ (u_2 U_1)^n & (u_2 U_2)^n & \ldots & (u_2 U_n)^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (u_n U_1)^n & (u_n U_2)^n & \ldots & (u_n U_n)^n \end{vmatrix} = \binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n-1}(\theta\Theta)^n.$$

2. **Setzt man**

$$(ab)^r(cd)^r+(ac)^r(db)^r+(ad)^r(bc)^r=(a,b,c,d)_r,$$

so kann man augenscheinlich die bekannte Identität

$$(ab)(cd)+(ac)(db)+(ad)(bc)=0$$

folgendermassen schreiben:

$$(a,b,c,d)_1=0;$$

hier ist die linke Seite die Quadratwurzel aus der Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & (ab) & (ac) & (ad) \\ (ba) & 0 & (bc) & (bd) \\ (ca) & (cb) & 0 & (cd) \\ (da) & (db) & (dc) & 0 \end{vmatrix},$$

d. h. die wohlbekannte Pfaff'sche Function

$$\left|\begin{array}{ccc} (ab) & (ac) & (ad) \\ & (bc) & (bd) \\ & & (cd) \end{array}\right|.$$

Hat man statt vier Symbolpaare deren sechs: a, b, c, d, e, f, so ist:

$$(ab)^3(c,d,e,f)_3+(ac)^3(d,e,f,b)_3+(ad)^3(e,f,b,c)_3$$
$$+(ae)^3(f,b,c,d)_3+(af)^3(b,c,d,e)_3=0,$$

dies kann auch folgendermassen geschrieben werden:

$$\left|\begin{array}{ccccc} (ab)^3 & (ac)^3 & (ad)^3 & (ae)^3 & (af)^3 \\ & (bc)^3 & (bd)^3 & (be)^3 & (bf)^3 \\ & & (cd)^3 & (ce)^3 & (cf)^3 \\ & & & (de)^3 & (df)^3 \\ & & & & (ef)^3 \end{array}\right|=0.$$

Hat man überhaupt $2r$ Symbolpaare $a, b, c, \ldots, l, m, n$, so hat man die Identität

$$(ab)^{2r-3}(c,d,e,\ldots,m,n)+(ac)^{2r-3}(d,e,\ldots,m,n,b)+\cdots=0$$

oder

$$\left|\begin{array}{cccccc} (ab)^{2r-3} & (ac)^{2r-3} & (ad)^{2r-3} & \ldots & (am)^{2r-3} & (an)^{2r-3} \\ & (bc)^{2r-3} & (bd)^{2r-3} & \ldots & (bm)^{2r-3} & (bn)^{2r-3} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & (lm)^{2r-3} & (ln)^{2r-3} \\ & & & & & (mn)^{2r-3} \end{array}\right|=0.$$

Setzt man darin $u_1 = x_2$ und $u_2 = -x_1$, so bekommt man eine Identität, welche die gewöhnliche Identität

$$(bc)a_x + (ca)b_x + (ab)c_x = 0$$

als besonderen Fall in sich enthält. La.

L. Berzolari. Sulla teoria dell'involuzione, specialmente dell'involuzione cubica. Napoli Rend. (2) V. 35-40.

L. Berzolari. Sull'involuzione cubica. Napoli Rend. (2) V. 71-79.

In der ersten Abhandlung geht Herr Berzolari von folgendem Satze aus: „$(n-1)$ beliebige binäre Formen n^{ten} Grades können als lineare Combinationen der partiellen Ableitungen $(n-2)^{ter}$ Ordnung einer Form $(2n-2)^{ten}$ Grades dargestellt werden; dieselbe ist die Gordan'sche Covariante Θ der beiden binären Formen n^{ten} Grades, durch welche der zu den $(n-1)$ Formen conjugirte Büschel bestimmt wird." Herr Berzolari benutzt diesen Satz, um aus einer gegebenen kubischen Involution ihre conjugirte, die mit ihr die Doppelpunkte gemein hat, abzuleiten. Nach einer anderen Methode hatte Herr Caporali zwei Paare der conjugirten Involution gefunden; Herr Berzolari bestimmt die Pole dieser Gruppe hinsichtlich der durch die Gordan'sche Covariante dargestellten Gruppe.

Eine weitere Betrachtung zeigt, dass zwei conjugirte kubische Involutionen aus den Polargruppen zweier apolaren biquadratischen Formen zusammengesetzt werden können. Diese beiden Gruppen gehören der von Hrn. Le Paige betrachteten Involution an, von der eine Gruppe aus den, beiden Involutionen gemeinsamen Doppelpunkten, zwei andere aus den zugehörigen Verzweigungspunkten der einen und der anderen Involution bestehen. Interessante Anwendungen davon lassen sich auf die rationale Raumcurve vierter Ordnung machen. E. K.

J. de Vries. Involutions cubiques dans le plan complexe. Palermo Rend. V. 289-300.

Versteht man in der Gleichung einer Involution n^{ten} Grades auf einer Geraden

$$(1)\qquad f(x)+3\lambda g(x)=0$$

unter $g(x)$ die Gruppe, welche den unendlich fernen Punkt enthält, und macht den Coefficienten von x^{n-1} in $g(x)$ gleich 1, so ist bei der Darstellung in der Zahlenebene der Parameter λ der Schwerpunkt der Gruppe. Herr de Vries weist zunächst nach, dass in einer kubischen Involution zwei Gruppen vorkommen, deren Punkte zwei gleichseitige Dreiecke bilden. Ihre Schwerpunkte sind die Doppelpunkte der „focalen" Involution

$$(2)\qquad f(x)+\lambda g'(x)=0.$$

Der Name focal wird gewählt, weil auch im allgemeinen Falle eine Gruppe von (2) aus den Brennpunkten einer Curve von der Klasse $(n-1)^2$ besteht, welche die Seiten des von der entsprechenden Gruppe der ersten Involution dargestellten n-Ecks in ihren Mitten berührt.

Die Nullpunkte der Hesse'schen Form einer binären Form dritten Grades liegen in der Zahlenebene mit jedem Gruppenpunkte auf einem Apollonius'schen Kreise der beiden anderen. Diese Punkte eines solchen „isodynamischen" Paares entsprechen einander in einer zwei-zweideutigen Verwandtschaft, und zwar enthält jede Gruppe einer zweiten kubischen Involution drei zusammengehörige Punktepaare. Diese Involution ist keine andere als die conjugirte der gegebenen. Herr de Vries betrachtet dann die bekannte biquadratische Involution, auf die conjugirte Involutionen dritten Grades führen, und giebt eine Verallgemeinerung dieses Theorems. Den Abschluss der Arbeit bilden Bemerkungen über die sich selbst conjugirte kubische Involution und diejenige mit einem dreifachen Punkte. E. K.

G. Castelnuovo. Alcune osservazioni sopra le serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII_2. 294-299.

Die Note umfasst zwei Paragraphen; im ersten wird der Riemann-Roch'sche Satz auch für den Fall irrationaler (nicht

linearer) einfach unendlicher Scharen von Punktgruppen bewiesen, wozu sich der Verf. einer von Hrn. Segre angegebenen Formel bedient (Rom. Acc. L. Rend. 1887). Diesem Beweise fügt Hr. Segre in einer Anmerkung noch einen zweiten bei. Im zweiten Paragraphen wird ein Zusammenhang zwischen den Doppelpunkten einer irrationalen Schar angegeben, zu dessen Ableitung der Verfasser sich eines Theorems des Hrn. Noether bedient (Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens. Math. Ann. VIII).

Bm.

W. Binder. Ueber absolute Elementensysteme auf ebenen Unicursalcurven vierter und dritter Ordnung. Schlömilch Z. XXXVI. 78.

Diese Arbeit schliesst sich an diejenigen des Herrn E. Weyr über Punktsysteme auf Curven eng an. Der Verfasser nennt absolute Systeme solche Punktsysteme einer Curve, welche durch die Curve selbst schon bestimmt sind oder, wie der Verfasser sagt, a priori vorhanden sind. In dieser Abhandlung werden die Punktsysteme betrachtet, welche durch die Tangenten der Curve auf ihr ausgeschnitten werden, in Zusammenhang mit dem System der Berührungspunkte der Tangenten, welche durch einen Punkt der Curve gelegt werden. Beide sind in obigem Sinne absolute Systeme. Mit Hülfe der Abbildung der Curve auf einen Kegelschnitt werden diese Systeme und ihre sogenannten Directionscurven näher untersucht. W. St.

E. Bertini. Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 1095-1115.

Bericht auf S. 210-211 dieses Bandes.

A. Cayley. On the notion of a plane curve of a given order. Mess. (2) XX. 148-150.

„Eine Curve von der Ordnung n ist eine Curve, welche

allein durch die Bedingung bestimmt ist, durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ gegebene Punkte zu gehen und ausserdem sich derartig zu verhalten, dass, wenn $n+1$ von diesen Punkten auf einer Geraden liegen, sie diese Gerade als einen Teil von sich einschliesst."

Lp.

A. Demoulin. Sur diverses conséquences du théorème de Newton. Belg. Mém. C. in 8°. XLV. 18 S.

Das Newton'sche Theorem kann so ausgesprochen werden: Das Verhältnis

$$\lambda = \frac{y_1 \cdot y_2 \cdots y_m}{x_1 . x_2 \ldots x_m}$$

der Abstände der Schnittpunkte einer Curve m^{ter} Ordnung mit zwei Secanten von dem Schnittpunkte dieser Secanten bleibt unveränderlich, wenn die beiden Secanten parallel mit sich verschoben werden. Hr. Demoulin folgert daraus die Beziehung

$$2\varrho \sin\varphi = \lambda \frac{y_1 y_2 \cdots y_{m-1}}{x_1 x_2 \ldots x_{m-1}}$$

in dem Falle, dass die eine der Secanten Tangente wird, falls φ der Winkel der x mit den y, ϱ der Krümmungsradius ist. Diese Formel wird in dem Falle, dass der Berührungspunkt ein vielfacher Punkt ist, auf eine geistvolle Art umgeformt. Hierauf macht der Verf. von den erhaltenen Formeln zahlreiche Anwendungen, indem er die eine der Secanten dreht oder ihren Schnittpunkt auf verschiedene Weisen beweglich macht.

Mn. (Lp.)

E. Catalan et P. Mansion. Rapport sur le mémoire de M. A. Demoulin intitulé: Sur diverses conséquences du théorème de Newton. Belg. Bull. (3) XXI. 315-321.

Besprechung dieser Abhandlung, die in den Denkschriften der Akademie in 8vo XLV (1891) erschienen ist. Mn. (Lp.)

W. C. L. GORTON. On centres and lines of mean position. Annals of Math. VI. 33-44.

Das Centrum mittlerer Entfernung einer Punktgruppe in einer Ebene bezüglich einer ihrer Geraden z fällt mit dem Schwerpunkte zusammen, sobald jenen Punkten Gewichte beigelegt werden, die umgekehrt proportional sind ihren Abständen von z, und letzteres die Grenze zwischen positiven und negativen Abständen bildet. Liegen nun von einer Curve n^{ter} Ordnung n Inflexionspunkte auf einer Geraden, so fällt das Centrum mittlerer Entfernung der Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte ausgehenden Tangenten bezüglich jener Geraden stets in den nämlichen Punkt. Werden von den Punkten einer Geraden g an eine Curve n^{ter} Ordnung die Tangenten gezogen, so bilden die jedesmaligen Berührungspunkte Punktgruppen, deren Centrum mittlerer Entfernung bezüglich g mit einem und demselben Punkte, dem Centrum mittlerer Entfernung der Pole von g bezüglich der Curve, zusammenfällt. Obiger Definition analog ist das Centrum mittlerer Entfernung einer räumlichen Punktgruppe bezüglich einer Ebene zu definiren; endlich geben die für das Centrum mittlerer Entfernung in trilinearen Coordinaten abgeleiteten Formeln ohne weiteres duale Sätze für die Centrale mittlerer Entfernung einer Gruppe von Geraden einer Ebene bezüglich eines ihrer Punkte, oder einer Gruppe von Ebenen bezüglich eines beliebigen Punktes. Js.

D. HILBERT. Ueber die reellen Züge algebraischer Curven. Math. Ann. XXXVIII. 115-138.

Der Verf. charakterisirt zunächst den Unterschied zwischen dem paaren und unpaaren Charakter eines ebenen Curvenzuges, indem er die homogenen Coordinaten eines Curvenpunktes als rechtwinklige Coordinaten eines Raumpunktes deutet und so der Curve einen Kegel zuordnet, dessen Spitze im Coordinatenanfang liegt. Kegel und Curvenzug heissen unpaar oder paar, je nachdem der erstere den Raum in zwei oder (mit Hinzufügung des Scheitelraumes) in drei Gebiete teilt. Dem Innen- und Aussen-

raume des Kegels entsprechen hierbei das Innere und Aeussere des Curvenzuges. Auf diese Bestimmungen gründen sich nun Untersuchungen über die verschiedenen Möglichkeiten, welche bei Curven mit der Maximalzahl reeller Züge hinsichtlich des Charakters und der Lage dieser Züge vorkommen. Es werden dabei Curven von gerader und ungerader Ordnung unterschieden und die Resultate für die Fälle $n = 6, 7, 8$ specialisirt. Sodann wird die von Harnack für algebraische ebene Curven beantwortete Frage nach der Maximalzahl ihrer reellen Züge auf Raumcurven ausgedehnt und festgestellt, dass diese Zahl bei einer irreduciblen Raumcurve n^{ter} Ordnung $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ oder $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$ ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Hierauf werden die Lagen- und gestaltlichen Verhältnisse dieser Curven untersucht und speciell für ihre unpaaren Züge die Maximalzahlen angegeben. Je nachdem $n = 4\nu$, $4\nu+1$, $4\nu+3$ ist, existiren höchstens $2\nu-2$, $2\nu-1$, $2\nu-1$ unpaare Züge. Ausnahmsweise gelten für $n = 3, 4, 5$ bezw. die Zahlen 1, 2, 3. Schliesslich wird bewiesen, dass ebene und Raumcurven mit den ermittelten Maximalzahlen wirklich existiren. Schg.

W. Stahl. Zur Erzeugung der ebenen rationalen Curven. Math. Ann. XXXVIII. 561-585.

Den geraden Schnitten einer rationalen Curve n^{ter} Ordnung R_n:

$$\varrho x_i = \varphi_i(\mu) = \sum_0^n {}_p\, a_{ip}\mu^{n-p} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sind $n-2$ linear unabhängige Functionen:

$$f_k(\mu) = \sum_0^n {}_p \binom{n}{p} b_{kp}\mu^{n-p} \qquad (k = 1, \dots, n-2)$$

conjugirt; den geraden Schnitten, die ein beliebiger Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte Z mit der Curve gemein hat, ausser diesen Functionen f_k noch eine weitere Function f_{n-1}, deren Coefficienten den Bedingungen:

$$\varrho z_i = \sum_0^n {}_p (-1)^p a_{ip} b_{n-1,n-p}$$

genügen. Ist Z ein Punkt von R_n mit dem Parameter λ, so

muss sich unter den Functionen f_k auch die Potenz $(\mu-\lambda)^n$ befinden und sich durch sie linear in der Form:

$$\sum_1^{n-1}{}_k h_k f_k(\mu) = (\mu-\lambda)^n$$

ausdrücken lassen, was unmittelbar zur Aufstellung der Gleichungen der ∞^{n-1} zu R_n perspectiven Strahlenbüschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung führt; entsprechende Elemente haben den gleichen Parameter λ. Jedem dieser Strahlenbüschel ist eine Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\overset{n-1}{F}(\lambda) = \sum_0^{n-1}{}_p \binom{n-1}{p} c_p \lambda^{n-1-p}$$

zugeordnet, deren invariante Eigenschaften sich für die zugehörigen Strahlenbüschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung als besonders wichtig erweisen (§ 3, 2).

Im allgemeinen giebt es ∞^{n-2r-3} zu R_n perspective Strahlenbüschel $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, wobei $2r \leqq n-3$ sein muss. Bei ungeradem n sind demnach ∞^2 Büschel $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung und ein Büschel $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung vorhanden, bei geradem ∞^1 Büschel $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung, die perspectiv zu R_n liegen. Für specielle R_n lässt sich die Ordnung der zu ihr perspectiven Strahlenbüschel weiter erniedrigen. Giebt es dann für $n-3 \geqq r \geqq \frac{n-3}{2}$ einen zu R_n perspectiven Strahlenbüschel $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, so absorbirt er alle zu R_n perspectiven Strahlenbüschel kleinerer Ordnung, als $r+2$; von dieser Ordnung sind hingegen ∞^{2r-n+5} vorhanden. Für den grössten Wert $n-3$ von r giebt es einen zu R_n perspectiven Büschel erster Ordnung und ∞^{n-1} Büschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung; letztere Büschel werden, wenn R_n nicht zerfällt, niemals beeinflusst. Die zu R_n perspectiven Strahlenbüschel $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmen Formen $(n+r)^{\text{ter}}$ Ordnung $\overset{n+r}{F}$, deren r^{te} Polaren den f_k angehören. Lässt sich eine Function $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ als eine Summe von v Potenzen linearer Functionen $(\lambda-\mu_p)$ darstellen, so kann durch die den μ_p zugehörigen Punkte von R_n eine zu R_n projective und zu dem $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ beigeordneten Strahlenbüschel $(n-r-2)^{\text{ter}}$

Ordnung perspective Curve $w=(v-r-2)^{ter}$ Ordnung C_w gelegt werden, die mit R_n jene Punkte entsprechend gemein hat. Analog gilt: Lässt sich eine Function $\overset{n-1}{F}(\lambda)$ darstellen als eine Summe von v Potenzen der linearen Functionen $(\lambda-\mu_p)$, so kann durch die den μ_p zugehörigen Punkte eine zu R_n projective und zu dem $\overset{n-1}{F}(\lambda)$ beigeordneten Strahlenbüschel $(n-1)^{ter}$ Ordnung perspective Curve $w=(v-1)^{ter}$ Ordnung C_w gelegt werden, die mit R_n jene Punkte entsprechend gemein hat. Im ersteren Falle reducirt sich C_w für $v=r+2$ auf einen Punkt, durch den die Strahlen des Büschels $(n-r-2)^{ter}$ Ordnung gehen; R_n hat einen $(r+2)$-fachen Punkt. Im letzteren Falle kann $\overset{n-1}{F}(\lambda)$, wenn n eine gerade Zahl, durch eine Summe von $v=\frac{n}{2}$ Potenzen dargestellt werden, und C_w wird die Erzeugende niedrigster Ordnung des Büschels; ist n eine ungerade Zahl, so ist diese Darstellung auf ∞^1 Weisen durch die Summe von $v=\frac{n+1}{2}$ Potenzen möglich, und es ergeben sich ∞^1 Curven $C_w\left(w=\frac{n-1}{2}\right)$, die perspectiv zum Büschel $(n-1)^{ter}$ Ordnung sind u. s. w.

Auf R_n können:

$$t_w=\frac{(n-w-1)(n-w-2)\dots(n-4w-2)}{(3w+2)!}$$

Curven C_w projectiv so bezogen werden, dass beide Curven $3w+2$ Punkte entsprechend gemein haben. Haben sie $3w+3$ Punkte entsprechend gemein, so besteht zwischen den dreireihigen Determinanten der a_{ip} eine Bedingungsgleichung von der Ordnung $\frac{2(n-w-1)(n-w-2)\dots(n-4w-3)(w+1)}{(3w+3)!}$, woraus für $w=0$ sich leicht schliessen lässt, dass die Fläche dreifacher Secanten einer rationalen Raumcurve von der Ordnung

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$$

ist. ∞^1 zu R_n projective Curven C_w haben mit ihr $3w+1$ Punkte gemein; zwischen den Parametern solcher Punkte besteht eine Be-

dingungsgleichung von der Ordnung

$$\frac{(n-w-1)(n-w-2)\ldots(n-4w)}{(3w-1)!}.$$

Anwendungen obiger Sätze auf rationale Curven bis zur fünften Ordnung schliessen diese Untersuchungen; ihnen ist eine nach gleichen Gesichtspunkten durchgeführte Besprechung der zu R_n perspectiven Curvenbüschel beigefügt. Js.

M. A. TICHOMANDRITZKY. Ueber singuläre Punkte der algebraischen ebenen Curven. Charkow Mitt. (2) II. 114-128. (Russisch, 1890.)

Es wird gezeigt, dass man durch nur rationale Operationen (Algorithmus des grössten gemeinschaftlichen Teilers) aus der gegebenen Gleichung einer algebraischen ebenen Curve $F(x, y) = 0$ eine Reihe von Gleichungspaaren $\varphi(x) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ ableiten kann, deren jedes die Coordinaten der singulären Punkte von einer gewissen Art giebt. Zu diesem Zwecke suche man den gemeinschaftlichen Teiler von $F(x, y)$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$. Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x, y)$ der letzte und der vorletzte Rest, dann bestimmen die Gleichungen $\varphi(x) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ alle singulären Punkte der Curve. Adjungirt man dann dem $\psi(x, y)$ die Grössen $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ und sucht ihren gemeinschaftlichen Teiler, so werden auch zwei Gleichungen $\theta(x) = 0$, $\psi_1(x, y) = 0$ erhalten. Giebt es gemeinschaftliche Lösungen von $\theta(x) = 0$ und $\varphi(x) = 0$ [sie werden bestimmt durch die Gleichung

$$D(\varphi(x), \theta(x)) = \varphi_1(x) = 0],$$

so giebt es auf der Curve höhere Singularitäten als Doppelpunkte. Letztere werden durch

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} \equiv \chi(x) = 0, \quad \psi(x, y) = 0$$

und erstere durch $\varphi_1(x) = 0$, $\psi_1(x, y) = 0$ bestimmt. Sie können dann in ähnlicher Weise weiter zerlegt werden.

Si.

Fr. Meyer. Ueber Discriminanten und Resultanten der Gleichungen für die Singularitäten der ebenen algebraischen Curven. Math. Ann. XXXVIII. 369-404.

Es seien die Punktcoordinaten einer ebenen rationalen Curve R_n durch die Parameterdarstellung $x_1 = f_1(\lambda)$, $x_2 = f_2(\lambda)$, $x_3 = f_3(\lambda)$ gegeben, wo f_1, f_2, f_3 ganze rationale Functionen n^{ten} Grades von λ sind; dann wird zunächst diejenige Gleichung $C(\lambda_1, \lambda) = 0$ aufgestellt, welche bei festgehaltenem λ die $n-2$ übrigen Schnittpunkte λ_1 der in λ gezogenen Tangente liefert. Aus dieser Gleichung ergeben sich die Gleichungen für die Parameter des Wendepunktes und der Berührungspunkte einer Doppeltangente: $\Omega(\lambda) = 0$ bezw. $M(\lambda) = 0$, wo Ω aus C durch Einsetzen von $\lambda_1 = \lambda$ entsteht, und M die in Bezug auf λ_1 genommene Discriminante von C ist. Die in Bezug auf λ genommene Discriminante von C zerfällt in zwei Factoren $\Delta(\lambda)P(\lambda)$, wo $\Delta = 0$ die Schnittelemente der Doppelpunkte und $P = 0$ die Restpunkte der Wendetangenten liefert. Die sämtlichen Bildungen hängen ausser von λ nur noch von den dreireihigen Determinanten δ ab, welche man aus den Coefficienten von f_1, f_2, f_3 bilden kann. Das Problem besteht nun darin, die drei Discriminanten $D(\Omega)$, $D(\Delta)$, $D(M)$ und die drei Resultanten $R(\Omega\Delta)$, $R(\Omega M)$, $R(\Delta M)$ in ihre irreducibeln Factoren zu zerlegen (vergl. F. d. M. XX. 1888. 155), und dieses Problem wird mit Zuhülfenahme der geometrischen Bedeutung der einzelnen Factoren vollständig erledigt. Unmittelbar folgt die Zerlegung $D(\Omega) = [\Delta\Delta][MM]$, wo die Ausdrücke rechts den Cuspidalfactor und den Undulationsfactor bedeuten, d. h. diejenigen Functionen von λ, deren Verschwinden die Bedingung für einen Rückkehrpunkt, bezw. für eine vierfach berührende Tangente liefert. Eine Reihe weiterer Invarianten von R_n wird direct, ohne dass eine Factorenabsonderung nötig ist, erhalten, wenn man statt der Formen f_1, f_2, f_3 die $n-2$ linear unabhängigen zu diesen conjugirten Formen $\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_{n-2}(\lambda)$ zu Grunde legt. So wird der Tritangentenfactor $[T_3]$ und Wendeberührfactor $[\Omega M]$, deren Verschwinden die Existenz einer dreimal berührenden Geraden,

bezw. einer noch einmal berührenden Wendetangente bedingt, endlich noch der Trinodalfactor $[\varDelta_3]$ erhalten, d. h. die irreducible Invariante, deren Verschwinden einen dreifachen Punkt bedingt. Zwecks gleicher Behandlung der noch übrigen Invarianten ist ein neues Verfahren notwendig, „das Hülfsprincip des Projicirens“. Dasselbe besteht darin, dass man zu den Coordinaten x_1, x_2, x_3 noch eine vierte x_4 und gleichzeitig zu den f_1, f_2, f_3 noch eine mit x_4 proportionale Form f_4 vom n^{ten} Grade in λ mit willkürlichen Coefficienten hinzufügt, wodurch sich die Zahl der conjugirten Formen um eine verringert. Die so definirte Raumcurve wird nun auf eine feste Projectionsebene projicirt; dann wird nach derjenigen Fläche gefragt, auf welcher man den Projectionsmittelpunkt annehmen muss, damit die entstehende ebene Curve gewisse Besonderheiten ihrer Singularitäten aufweist. Der Grad dieser Fläche giebt zugleich den Grad des entsprechenden invarianten Factors in Bezug auf die Determinanten δ an. Mittels dieses Satzes werden die früheren Gradzahlen wiedergefunden, und ausserdem der Grad für den Selbstberührungsfactor $[\varDelta_2 T_2]$, ferner für den Doppelpunktswendungsfactor $[\Omega \varLambda]$ und den Doppelpunktstangentenberührfactor $[\varLambda M]$ ermittelt. Hiernach wird nun die Zerfällung der oben genannten drei Discriminanten und drei Resultanten ausführbar. Die erhaltenen Formeln sind

$$\begin{aligned}
D(\Omega) &= [\varLambda\varLambda][MM],\\
D(\varLambda) &= [\varLambda\varLambda][\varDelta_2 T_2]^2[\varDelta_3]^6,\\
D(M) &= [\varLambda\varLambda]^{2(n-3)[2(n-3)-1]}[\varDelta_2 T_2]^2[MM][\Omega M]^4[T_3]^6,\\
R(\Omega\varLambda) &= [\varLambda\varLambda]^2[\Omega\varLambda],\\
R(\Omega M) &= [\varLambda\varLambda]^{2(n-3)}[MM]^2[\Omega M],\\
R(\varLambda M) &= [\varLambda\varLambda]^{2(n-3)}[\varDelta_2 T_2]^4[\varLambda M].
\end{aligned}$$

Zum Schluss formulirt der Verfasser das benutzte Princip des Projicirens algebraisch und bringt zugleich seine Entwickelungen mit dem Correspondenzprincip in Zusammenhang, wobei sich ergiebt, dass jedem Factor der erhaltenen Zerlegung die Coincidenz einer gewissen Correspondenz auf der Curve entspricht.

Ht.

M. J. M. Hill. On node and cusp-loci which are also envelopes. Lond. M. S. Proc. XXII. 216-236.

Ist $f(x, y, c)$ eine ganze rationale Function der Coordinaten x, y und des Parameters c, und ist $C=0$ die Gleichung einer Curve, deren jeder Punkt für eine gewisse Curve der Curvenschar $f(x, y, c)=0$ eine Spitze ist, so tritt, wie bekannt ist, C^3 als Factor in der bezüglich c genommenen Discriminante von $f(x, y, c)$ auf. Der Verfasser beweist nun, dass sogar C^4 notwendig als Factor auftreten muss, sobald noch $\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}$ für jede Spitze verschwindet, und ferner, dass in diesem Falle die an die Spitze gelegte Tangente zugleich die Curve $C=0$ berührt. Ferner zeigt der Verfasser, dass in der Discriminante N^3 als Factor auftritt, wenn $N=0$ der Ort der in der Curvenschar vorkommenden Doppelpunkte ist, und eine der beiden Tangenten im Doppelpunkte zugleich die Curve $N=0$ berührt. Ht.

M. J. M. Hill. On the locus of singular points and lines which occur in connexion with the theory of the locus of ultimate intersections of a system of surfaces. Lond. R. S. Proc. L. 180-186, Lond. Phil. Trans. CLXXXIII. (1892.) 141-278.

Die erste Schrift ist ein Auszug aus der zweiten. Die Untersuchungen haben den Zweck, die von Hrn. Cayley aufgestellten Sätze über die in Bezug auf a genommene Discriminante der Curvenschar $f(x, y, a)=0$ auf eine Flächenschar auszudehnen. Zunächst betrachtet der Verfasser die Flächenschar $f(x, y, z, a)=0$, wo f eine ganze rationale Function von den Coordinaten x, y, z und dem Parameter a ist. Von dieser Flächenschar gelten die Sätze: 1. Ist $E=0$ die Gleichung einer Fläche, welche alle Flächen der Schar berührt, so ist E einfacher Factor der in Bezug auf a genommenen Discriminante von $f(x, y, z, a)$. Ein Beispiel bietet die Flächenschar $(\varphi-a)^2+\chi=0$, wo φ und χ Functionen von x, y, z sind, und $\chi=0$ die berührende Fläche

darstellt. 2. Ist $B = 0$ eine Fläche, deren jeder Punkt, für eine gewisse Fläche der Schar, Knotenpunkt mit zerfallendem Tangentenkegel ist, so ist B^3 Factor in der Discriminante. Das einfachste Beispiel ist $(\varphi-a)^2+\chi\psi^3 = 0$, wo $\psi = 0$ die Gleichung jener Knotenfläche ist. 3. Ist $U = 0$ der Ort von Doppelpunkten, deren Tangentenkegel in eine Doppelebene ausartet, so ist U^3 Factor der Discriminante. Als Beispiel dient die Curvenschar $(\varphi-a)^2+\chi^3 = 0$. Entsprechende Sätze gelten für Scharen von Flächen $f(x, y, z, a, b) = 0$, wo a und b zwei willkürliche Parameter sind. Ist $E = 0$ eine alle Flächen der Schar berührende Fläche, so ist E ein Factor der in Bezug auf a und b genommenen Discriminante von f, d. h. der Resultante von $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$. Hierfür ist $z+(x-a)(y-b) = 0$ das einfachste Beispiel, wo die Ebene $z = 0$ in der That die genannte Eigenschaft besitzt. Sind ferner $C = 0$, $B = 0$ die Oerter der gewöhnlichen Knotenpunkte, bezüglich der biplanaren Knotenpunkte, so treten C^2, bezüglich B^3 als Factoren jener Discriminante auf. Es folgt eine grosse Zahl von ähnlichen Sätzen über die Flächenörter für höhere in der Flächenschar auftretende Singularitäten. Ht.

E. Bertini. Dimostrazione di uno teorema sulla trasformazione delle curve algebriche. Rivista di Mat. I. 22-24.

Einfacher Beweis des oft erwähnten, aber bisher nicht explicit bewiesenen Satzes, dass man eine beliebige, einfache oder zusammengesetzte ebene Curve mittels einer birationalen Transformation in eine andere überführen kann, die nur Doppelpunkte besitzt. Der Beweis wird mittels zweier Transformationen der Ebene erhalten. Bm.

A. Himstedt. Ueber Singularitäten algebraischer Curven. Pr. (No. 34) Progymn. Löbau i. Westpr. 24 S. 8°. 1 Tafel.

Discussion der bekannten möglichen Fälle von Doppelpunkten und dreifachen Punkten, durch Figuren und einfache Beispiele erläutert. R. M.

Cl. Servais. Sur la courbure des polaires en un poin d'une courbe d'ordre n. Belg. Bull. (3) XXI. 362-367.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. 324.

Zahlreiche Folgerungen aus dem vom Verf. einfach bewie senen folgenden Satze: In einem vielfachen Punkte p^{ter} Ordnun ist bei einer Curve n^{ter} Ordnung das Verhältnis zweier ent sprechenden Krümmungsradien der Curve und der $(n-p-1)$ Polare des Punktes constant. So ergiebt sich z. B. der folgend Zusatz: In einem Punkte einer beliebigen Curve bilden die Krüm mungen der Polaren eine arithmetische Progression. Mn. (Lp.)

Cl. Servais. Sur la courbure des courbes algébriques. Belg. Bull. (3) XXI. 587-594.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. 526-527.

Verallgemeinerung einer Mannheim'schen Formel bezüglich der Krümmung zweier in Bezug auf einen Kreis reciproken polaren Curven. Zahlreiche Folgerungen aus dieser Formel in Anknüpfung an verschiedene Sätze von Duhamel, Liouville etc.

Mn. (Lp.)

E. Catalan. Sur un théorème de M. Servais.

Cl. Servais. Sur la courbure des lignes algébriques. Belg. Bull. (3) XXII. 512-551.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. 434-435.

Der Liouville'sche Satz über die Summe der Krümmungen bezüglich der Berührungspunkte der zu einer gegebenen Richtung parallelen Tangenten findet auf die mit Singularitäten behafteten Curven keine Anwendung. Aus einem Jacobi'schen Satze, von dem der Liouville'sche ein besonderer Fall ist, kann man die folgenden Sätze ableiten: Wenn man an einer algebraischen Curve zu einer gegebenen Richtung parallele Tangenten zieht, so ist die Summe der reciproken Producte der durch die Curve auf jeder Tangente bestimmten Strecken der Null gleich. Wenn man durch die Berührungspunkte dieser Tangenten Secanten

zieht, die zu einander parallel sind, so ist die Summe der reciproken Producte der auf jeder Secante von der Curve bestimmten Strecken der Null gleich. Mn. (Lp.)

A. DEMOULIN. Sur la courbure des lignes d'ordre p possédant un point multiple d'ordre $p-1$. Belg. Bull. (3) XXII. 120-128.

Ausdehnung der in den akademischen Denkschriften in 8vo dargelegten Methode auf den Fall eines vielfachen Punktes.

Mn. (Lp.)

G. FOURET. Sur quelques propriétés relatives aux points d'incidence des droites issues d'un même point et rencontrant une courbe plane algébrique sous un même angle. Palermo Rend. V. 75-79.

Eine Verallgemeinerung des Normalensystems einer ebenen Curve besteht darin, dass man durch die einzelnen Punkte einer ebenen Curve unter einem constanten Winkel gegen die entsprechende Tangente Strahlen zieht. Diese nennt Hr. Fouret Einfallsstrahlen und den constanten Winkel Einfallswinkel und untersucht, an einen Satz von Liouville (Journ. de Math. (1) VI. 309) anknüpfend, ein System von solchen Strahlen, dessen sämtliche Individuen durch einen festen Punkt der Ebene gehen. Hierbei gelangt er zu drei nicht uninteressanten Sätzen über das Verhalten des Centrums der mittleren Entfernungen der Einfallspunkte solcher durch einen Punkt gehenden Linien, wenn die algebraische Curve unter Festhaltung ihrer Asymptoten deformirt wird. Bm.

Weitere Litteratur.

C. CRONE. Nogle hovedsaetninger af Functionslaeren og de algebraiske Ligningers Theori. Kjöbnhavn. 64 S. 8°.

H. Ruoss. Die metrischen Beziehungen der Krümmung reciproker Flächen und Curven sowie der Flächeninhalte der letzteren. Diss. Erlangen. 8°. [Bericht auf S. 799.]

G. Krohs. Die Serret'schen Curven sind die einzigen algebraischen vom Geschlecht Null, deren Coordinaten eindeutige doppeltperiodische Functionen des Bogens und der Curve sind. Diss. Halle. 8°.

F. Stosch. Ueber diejenigen Unicursalcurven, deren Bogen eine algebraische Function der rechtwinkligen Coordinaten ist. Diss. Erlangen. 8°.

G. Stiner. Ueber Curven vom Geschlecht Null. Zürich. 52 S. 8°. (1890.)

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

A. Poulain. Sur la distance de deux points. Mathesis (2) I. 184-186.

Beweis einer merkwürdigen Formel von Lagrange, die den Abstand zweier Punkte als Function der Abstände des einen derselben von n gegebenen Punkten und der Gewichte ausdrückt, welche man in diesen Punkten annehmen muss, damit der andere Punkt ihr Schwerpunkt sei. Diese Lagrange'sche Formel liefert die meisten in der neueren Geometrie betrachteten Abstände.

Mn. (Lp.)

A. Cayley. On the problem of tactions. Quart. J. XXV. 104-127.

Isaac Newton hat in seinen Principien (Buch I, Lemma XVI) eine geometrische Lösung des Apollonischen Problems entwickelt, einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Kreise berührt. Verfasser giebt nun hier eine elegante analytische Behandlung der von Newton gegebenen Lösung, eine Lösung, welche namentlich gestattet, die einzelnen speciellen Fälle der Aufgabe eingehend zu discutiren.

Bm.

K. Rückoldt. Der gerade Kreiskegel und die Ebene. Pr. (No. 666) Realgymn. Eisenach. 13 S. 4°.

Die Arbeit will zeigen, wie nach der Discussion der Gleichung II. Gr. die Kegelschnitte ganz allgemein aus dem geraden Kreiskegel hergeleitet werden können. Aus der für jeden Schnitt geltenden Scheitelgleichung

$$y^2 = 2A \operatorname{tang}\alpha . \sin\omega . x + \left[\frac{\cos^2(\omega-\alpha)}{\cos^2\alpha} - 1\right] x^2,$$

in welcher A den Abstand des Curvenscheitels T vom Mittelpunkt S des Kegels, 2α die Kegelöffnung und ω den Neigungswinkel von ST gegen den Schnitt bedeutet, ergeben sich durch Annahme bestimmter Werte für ω die besonderen Fälle. Bei der Parabel wird auch aus der aufgestellten Gleichung diejenige bestimmt, deren Flächeninhalt bei gegebener Kegelhöhe ein Maximum ist; auch für die anderen Curven werden bestimmte Beispiele durchgeführt und am Schluss aus Auf- und Seitenriss die Curven gezeichnet. Lg.

O. Schlömilch. Ueber die Durchschnitte einer Geraden und einer Curve zweiter Ordnung. Schlömilch Z. XXXVI. 190-191.

Einfache Construction der Durchschnitte der Geraden $x + y\cot g\beta = a$ mit dem Kegelschnitte $r = p/(1 + \operatorname{tg}\gamma\cos\omega)$, wenn r, ω Polarcoordinaten bedeuten. Lp.

J. S. Collin. Tangentes communes à deux coniques. Nouv. Ann. (3) X. 302-305.

Dem Verf. gelingt es, durch Einführung der Richtungscoefficienten eine ganz elementare Theorie der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte zu geben. Wbg.

P. H. Schoute. Sur les foyers des coniques. Mathesis (2) I. 129-132.

Der Verfasser erhält die Brennpunkte der Kegelschnitte ver-

mittelst der Bedingung, dass zwei rechtwinklige, durch einen Brennpunkt gezogene Geraden zu einander conjugirt sind. Aus den erhaltenen Ergebnissen leitet er leicht die Gleichung der kubischen Curve ab, die der Ort der Brennpunkte eines tangentialen Kegelschnittbüschels ist. Mn. (Lp.)

R. H. Pinkerton. On the condition that the straight line $lx+my+nz=0$ should be a normal to the conic $(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2=0$, the coordinates being trilinear. Edinb. M. S. Proc. IX. 1-4.

Folgendes ist die verlangte Beziehung:

$$(a, b, c, f, g, h)(l-m\cos C'-n\cos B', m-n\cos A'-l\cos C', n-l\cos B'-m\cos A')^2\times\Sigma$$
$$=\Delta(l^2+m^2+n^2-2mn\cos A'-2nl\cos B'-2lm\cos C')^2,$$

wo A', B', C' die Winkel des Bezugsdreiecks sind, Σ für $(A, B, C, F, G, H)(l, m, n)^2$ gesetzt ist, und wo Δ, A, B, ... die Bedeutung haben wie bei Salmon, Conic Sections, Cap. XVIII. Gbs. (Lp.)

G. de Longchamps. Expression du rayon de courbure dans les coniques inscrites à un triangle de référence. Assoc. Franç. Marseille XX. 11-23.

Die Gleichung des dem Bezugsdreiecke ABC eingeschriebenen Kegelschnittes laute in barycentrischen Coordinaten α, β, γ:

$$\alpha^2p^2+\beta^2q^2+\gamma^2r^2-2\alpha\beta pq-2\alpha\gamma pr-2\beta\gamma qr=0.$$

Dann wird der Krümmungsradius in dem Berührungspunkte A' der Seite BC durch die Formel gegeben:

$$\varrho=-pqr\frac{a^3}{\Delta(p+q)^3},$$

in der Δ den Inhalt von ABC bezeichnet. Diese Formel, welche zuerst von Hrn. Demoulin, einem belgischen Geometer, gefunden ist, wird zu Anfang durch den Verf. bewiesen. Danach wird ein Auszug eines Briefes von Hrn. Demoulin abgedruckt mit dem Beweise dieses Mathematikers sowie mit den angeknüpften Fol-

gerungen, welche sich besonders auf die Steiner'sche Ellipse beziehen. Lp.

V. Jamet. Sur le théorème de Joachimsthal. Mathesis (2) I. 105-108.

Beweis jenes Satzes und einiger ihm nahestehenden Sätze, z. B. des folgenden: Der Kreis durch die Fusspunkte dreier Normalen von einem Punkte an einen Kegelschnitt geht auch durch die Projection des Mittelpunktes auf die Tangente in dem diametral dem Fusspunkte der vierten Normale gegenüber liegenden Punkte des Kegelschnitts. Mn. (Lp.)

O. Schlömilch. Ueber die Krümmungskreise der Kegelschnitte. Hoffmann Z. XXII. 161-168.

Lösung einiger Aufgaben über die Krümmungskreise von Kegelschnitten, die auf Gleichungen dritten und vierten Grades führen, z. B. denjenigen Punkt eines Kegelschnittes zu finden, dessen Krümmungskreis eine Directrix berührt, oder dessen Krümmungskreis bei der Hyperbel eine Asymptote berührt.

Lp.

E. Cesàro. Étude intrinsèque des coniques et des cassinoïdes. Mathesis (2) I. 51-62.

Eine Studie über diese Curven und einige nahe stehende vermittelst der zwischen dem Bogen und dem Krümmungsradius bestehenden Beziehung. Mn. (Lp.)

Sollertinsky. Propriétés des coniques. Mathesis (2) I. 177-182.

Trägt man auf der Normale in einem Punkte D einer Ellipse nach beiden Seiten eine Strecke ab gleich dem geometrischen Mittel aus den Abständen dieses Punktes von den beiden Brennpunkten, so sind die Brennpunkte und die Endpunkte der abgetragenen Strecken die Ecken eines harmonischen Vierecks, d. h.

eines derartigen einschreibbaren, dass das Product zweier Gegenseiten gleich dem der beiden anderen ist. Dieser Satz und der gleichartige für die Hyperbel haben zahlreiche Folgerungen.

Mn. (Lp.)

R. W. Genese. Sur un cercle remarquable qui passe par deux points fixes d'une conique. Nouv. Ann. (3) X. 318-320.

Es sei *AB* eine feste Sehne eines Kegelschnittes, *C* ihr Pol und *P* ein beweglicher Punkt des Kegelschnittes: zieht man durch *C* eine Antiparallele zu *AB* in Bezug auf den Winkel *APB*, welche *PA* und *PB* beziehentlich in *Q* und *Q'* trifft, so liegen die vier Punkte *A*, *B*, *Q'*, *Q* auf einem Kreise, welcher für alle Lagen von *P* derselbe bleibt.

Wbg.

F. Lerch. Ueber Dreiecke, welche einem Kegelschnitt um- und einem anderen eingeschrieben sind. Pr. (No. 171) Friedrichs-Gymn. Breslau. 39 S. 8°.

Wenn einem Kegelschnitte zwei beliebige Dreiecke umgeschrieben werden, so liegen die sechs Eckpunkte bekanntlich wieder auf einem Kegelschnitt, und es giebt unzählige Dreiecke, welche dem einen Kegelschnitt umgeschrieben, dem anderen eingeschrieben sind. Man kann sich demnach eins der Dreiecke in Gestalt und Lage derart beweglich vorstellen, dass es die Schar der Dreiecke durchläuft. Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks beschreiben dabei Bahnen, und deren Natur ist es, mit der sich der Verf. beschäftigt. Es wird der Ort des Schwerpunktes, der Ort des Höhenschnittes, der Ort des Mittelpunktes des umgeschriebenen Kreises, der Ort des Mittelpunktes des Feuerbach'schen Kreises untersucht, und gezeigt, dass alle diese geometrischen Oerter Kegelschnitte sind. Zum Schluss werden noch einige Relationen abgeleitet, welche sich auf die Mittelpunkte der einem Dreieck ein- und umgeschriebenen Kegelschnitte beziehen, und welche Steiner ohne Andeutung eines Beweises seiner Zeit veröffentlicht hat.

Schn.

G. B. Mathews. Proofs of Steiner's theorems relating to circumscribed and inscribed conics. Lond. M. S. Proc. XXII. 18-27.

Die Beweise beziehen sich auf einige Theoreme, welche Steiner in Crelle's Journal Bd. XXX. 97-106, ohne Einsicht in ihre Herleitung zu geben, veröffentlicht hat. Diese Theoreme beschäftigen sich wesentlich mit denjenigen Kegelschnitten, welche unter den einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitten Maximalflächen haben, sowie mit denjenigen, welche unter den einem Viereck umgeschriebenen Kegelschnitten Minimalflächen besitzen. Das erste Problem findet in gewandten analytischen Formen seine Lösung. Zwei Kegelschnitte entsprechen der geforderten Bedingung, ihre Mittelpunkte werden als Schnitte eines Kegelschnitts und einer Geraden gefunden, und damit ist ihre Construction gegeben. Das zweite Problem führt auf drei eigentliche Lösungen, wenn man neun uneigentliche ausser Acht lässt, so dass seine rein geometrische Behandlung notwendig die Anwendung anderer Curven als Kegelschnitte und gerade Linien erfordert. Schn.

O. Richter. Ort der Kegelschnittssehnen, die von einem gegebenen Punkte aus unter rechtem Winkel erscheinen. Schlömilch Z. XXXVI. 49-56.

Die Sehnen umhüllen einen zweiten Kegelschnitt. H.

G. Rozzolino. Una proprietà metrica fu poli e polari in una conica dotata di centro. (2 S.; ohne Datum und Druckort.)

In der „Analytischen Geometrie der Kegelschnitte“ von Salmon wird als Anwendung der Theorie der conjugirten Diameter der folgende Satz ausgesprochen: Sind zwei Halbmesser eines Kegelschnitts gegeben, und betrachtet man die Tangenten in ihren Endpunkten und ihre Schnittpunkte mit den Halbmessern, so bekommt man zwei inhaltsgleiche Dreiecke. Hr. Rozzolino beweist dieses Theorem analytisch auf eine Weise, welche sogleich sehen lässt,

dass dasselbe, wie folgt, verallgemeinert werden kann: Verbindet man zwei Punkte der Ebene eines Kegelschnitts mit dem Mittelpunkte desselben und jeden mit dem Punkte, in dem seine Polare den durch den anderen gehenden Durchmesser schneidet, so bekommt man zwei inhaltsgleiche Dreiecke. La.

M. Liroux. Agrégation des Sciences mathématiques (concours de 1890). Solution géométrique de la question de Mathématiques spéciales. Nouv. Ann. (3) X. 264-267.

Lebel. Agrégation de Mathématiques. Concours de 1890. J. de Math. spéc. (3) V. 13-17.

„Alle Kegelschnitte, welche einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben sind und von einem Punkte P aus unter einem rechten Winkel gesehen werden, werden noch von einem zweiten Punkte P' aus unter einem rechten Winkel erblickt. Der geometrische Ort der Mittelpunkte dieser Kegelschnitte ist eine Gerade, nämlich das Mittellot von PP'. Verändert der Punkt P seine Lage, so bewegt sich der Punkt P' derart mit, dass die Gerade PP' stets durch einen festen Punkt J geht, und zwar den Höhenpunkt des gegebenen Dreiecks, und dass das Product $JP.JP'$ constant bleibt.“

Der Verf. des ersten Aufsatzes zeigt zunächst, dass alle einem gegebenen Dreiecke eingeschriebenen und von einem Punkte aus unter einem rechten Winkel gesehenen Kegelschnitte noch eine vierte feste Gerade berühren, also einem Vierecke eingeschrieben sind, und bedient sich dann zum Beweise der oben stehenden Sätze eines Theorems über die Monge'schen Kreise, sowie des bekannten Steiner'schen Satzes, dass die Directricen aller einem Dreiecke eingeschriebenen Parabeln durch den Höhenpunkt desselben gehen.

Der Verf. der zweiten Note behandelt dieselbe Aufgabe analytisch, ebenso wie ein Herr E. A. schon früher im J. de Math. spéc. (3) IV (1890), S. 221-224. Wbg.

LEMAIRE. Note sur la question précédente. Nouv. Ann. (3) X. 267-269.

Der Verfasser beweist die vorher besprochenen Sätze mit Hülfe der Theorie der Involutionen. Wbg.

MARCHAND. Remarques sur le même problème. Nouv. Ann. (3) X. 269-276.

Der Verfasser benutzt die Chasles'sche Methode der Charakteristiken, um das oben besprochene Problem in der allgemeineren Form zu erörtern, dass der Winkel, unter dem die einem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitte von einem Punkte aus gesehen werden, ein beliebiger ist. Wbg.

J. WOLSTENHOLME. Solution of question 6922. Ed. Times LV. 68-71.

Vier Punkte S, A', A, X liegen auf einer Geraden so, dass $SA' = AX$ ist. In X wird das Lot auf jener Geraden errichtet und „Directrix" genannt, während S der „Brennpunkt" heisst. Fällt man von irgend einem Punkte P der Ebene das Lot PM auf die Directrix, zieht SP und AM, die sich in Q schneiden, so hat man zwei sich entsprechende Punkte P und Q einer Verwandtschaft. Der Ort von Q ist von derselben Ordnung und Klasse wie eine von P beschriebene Curve. Die Tangenten der Curven in P und Q schneiden sich auf der Directrix. Der Fusspunkt N des Lotes von Q auf die Directrix liegt auf PA'. Anwendungen auf Kegelschnitte mit S als Brennpunkt, XM als Directrix. Lp.

E. GROSSETÊTE. Agrégation des Sciences mathématiques (concours de 1890). Solution de la question des Mathématiques élémentaires. Nouv. Ann. (3) X. 256-264.

Es sind zwei Gerade xOx' und yOy' gegeben, welche sich in einem Punkte O schneiden, ferner auf der ersteren ein Punkt A, auf der zweiten ein Punkt B. Eine bewegliche Gerade soll

xOx' in M und yOy' in N so treffen, dass die Strecke MN gleich der Summe oder gleich dem absoluten Werte der Differenz der Strecken AM und BN ist.

1) Es giebt in beiden Fällen zwei Reihen solcher Geraden; durch einen gegebenen Punkt gehen im allgemeinen von jeder dieser Reihen zwei Gerade.

2) Es sei MN eine Gerade, welche zu einer dieser beiden Reihen gehört: der geometrische Ort für den Mittelpunkt des dem Dreieck OMN umgeschriebenen Kreises ist ein Kegelschnitt, welcher einen Brennpunkt in O hat, und die Enveloppe dieses Kreises ist ein Kreis. Wbg.

M. d'Ocagne. Remarque sur la parabole. J. de Math. spéc. (3) V. 97-101.

Ein leicht zu findender Satz über den Schwerpunkt der vier Schnittpunkte einer Parabel mit einem beliebigen Kreise wird zur Aufstellung einiger Eigenschaften der Krümmungskreise einer Parabel benutzt. Lp.

A. J. Pressland. The triangle and its escribed parabolas. Edinb. M. S. Proc. IX. 4-10, 28-30.

Die Beziehungen zwischen einem Dreiecke und seinen angeschriebenen Parabeln treten bei der Aufgabe auf, eine gerade Linie zwischen zwei Seiten eines Dreiecks so einzufügen, dass das Zwischenstück gleich jeder der abgeschnittenen Strecken ist. Die Behandlung ist meistens analytisch, teilweise aber auch synthetisch, und es ergeben sich einige interessante Sätze, die mit bekannten Sätzen der Dreiecksgeometrie eng zusammenhängen. Gbs. (Lp.)

Balitrand. Sur la question 266. Solution et développements. J. de Math. spéc. (3) V. 249-251.

Einem gegebenen festen Dreiecke ABC beschreibt man alle Dreiecke $A'B'C'$ ein, welche denselben Schwerpunkt G haben.

Dann umhüllen die Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ drei Parabeln, nämlich die Artzt'schen (J. Neuberg). Zusammenhang mit der Dreiecksgeometrie. Lp.

J. Wolstenholme, Anderson, J. D. Williams. Solution of question 10594. Ed. Times LIV. 48-49.

Auf der Parabel $y^2 = 4ax$ werden zwei Punkte P, Q mit den Coordinaten am^2, $2am$ und $a(8+m^2)$, $-\frac{4}{m}am$ angenommen. Der Kreis mit Q als Mittelpunkt und QP als Radius schneidet die Parabel in drei neuen Punkten, die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind. Ferner ist QP stets Normale der Parabel $y^2 = 36a(x+12a)$. Lp.

J. Wolstenholme, T. Galliers, G. G. Storr. Solution of question 10298. Ed. Times LIV. 55.

Die Hüllcurve der Umkreise der gleichseitigen Dreiecke, welche der Parabel $y^2=4ax$ umgeschrieben sind, ist die Hyperbel $3(x+a)^2-y^2 = 12a^2$, welche dem Orte der Eckpunkte dieser Dreiecke $(3x+5a)^2-y^2= 3a^2$ ähnlich ist. Die Hüllcurve der Inkreise ist $3(x+a)^2-y^2 = 3a^2$. Lp.

J. Wolstenholme. Solution of question 7053. Ed. Times LV. 53-56.

Einem Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ wird ein Dreieck ABC von gegebenen Winkeln umgeschrieben, und ein anderes Dreieck abc mit Seiten, die denen von ABC parallel sind, wird $\alpha\beta\gamma$ eingeschrieben. Eine grössere Anzahl von gegenseitigen Beziehungen der Dreiecke ABC und abc wird aufgestellt, so besonders Oerter und Hüllcurven der mit ihnen zusammenhängenden Punkte oder Geraden und Curven. Lp.

Barisien. Concours d'admission à l'École Centrale en 1889. Solution. Nouv. Ann. (3) X. 228-235.

Es seien Ox, Oy zwei rechtwinklige Axen und LL' eine

Parallele zu Oy im Abstande a, welche Ox in A schneiden möge; es wird der Büschel von Parabeln betrachtet, welche durch den Punkt O gehen und die Gerade LL' zur Directrix haben.

1) Der geometrische Ort für die Brennpunkte dieser Parabeln ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius a; der Ort ihres Scheitels ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Mitte von OA, deren kleine Axe $OA = a$ ist, und deren grosse Axe die Länge $2a$ hat.

2) Durch jeden Punkt der Ebene xOy gehen zwei der betrachteten Parabeln; dieselben sind reell, wenn der Punkt innerhalb der Parabel $y^2+4ax-4a^2=0$ liegt; sie fallen in eine zusammen, wenn der Punkt auf dieser Parabel liegt, und sie sind imaginär, wenn er ausserhalb derselben liegt.

3) Der geometrische Ort S des Punktes M, für den die Tangenten in O an die beiden Parabeln des Büschels, welche durch M gehen, auf einander senkrecht stehen, ist die Parabel $y^2+2ax=0$.

4) Während sich der Punkt M auf der Parabel S bewegt, dreht sich die Verbindungslinie der Brennpunkte der beiden durch M gehenden Parabeln des Büschels um einen festen Punkt.

Wbg.

Barisien. Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1890. Solution. Nouv. Ann. (3) X. 251-256.

Es ist in einer Ebene eine gleichseitige Hyperbel H gegeben, deren Gleichung, bezogen auf ihre Axen als Coordinatenaxen, $x^2-y^2=a^2$ lautet. Von einem Punkte M der Ebene, dessen Coordinaten $x=p$, $y=q$ sind, werden die Normalen an diese Curve gezogen, und es soll durch die Fusspunkte dieser Normalen eine neue gleichseitige Hyperbel K gelegt werden, deren Normalen in diesen Punkten wieder durch einen Punkt gehen. Wenn der Punkt M sich ausserhalb der Ellipse $p^2+2q^2=4a^2$ befindet, giebt es zwei reelle Hyperbeln K; liegt er auf dieser Ellipse, so giebt es nur eine Hyperbel K; liegt er endlich innerhalb dieser Ellipse, so sind die Hyperbeln K imaginär. — Der geometrische Ort des Punktes M, für welchen die Hyperbeln H

und K zusammenfallen, setzt sich zusammen aus der gleichseitigen Hyperbel $p^2-q^2+2a^2=0$ und aus einer Curve 6[ter] Ordnung. — Eine andere Behandlung derselben Aufgabe steht im J. de Math. spéc. (3) IV. 157-161 (1890). Wbg.

Barisien. Concours d'admission à l'École Centrale en 1890. Solution. Nouv. Ann. (3) X. 243-251.

Es sind zwei rechtwinklige Axen $x'Ox$, $y'Oy$ und zwei in Bezug auf O symmetrische Punkte A, B gegeben:

1) Man nimmt auf der x-Axe einen beliebigen Punkt P an und betrachtet die Parabel (P), welche die Geraden PA und PB in A bez. B berührt: Während der Punkt P die x-Axe durchläuft, beschreibt der Brennpunkt von (P) eine Hyperbel, deren Centrum in O liegt, und deren eine Asymptote zur x-Axe parallel ist; und der Scheitel von (P) beschreibt eine Hyperbel mit denselben Eigenschaften, die zudem durch den Punkt A geht.

2) Man nimmt auf der y-Axe einen Punkt Q an und betrachtet die Parabel (Q), welche die Geraden QA und QB in A bez. B berührt: Die beiden Parabeln (P) und (Q) schneiden sich ausser in A und B noch in zwei Punkten C und D; wenn nun die Punkte P und Q sich auf der x- bez. y-Axe so bewegen, dass sie stets gleichen Abstand vom Ursprung haben, so beschreiben die Punkte C und D eine Ellipse mit den Axen Ox, Oy und dem Centrum O. — Eine andere Behandlung derselben Aufgabe findet sich im J. de Math. spéc. (3) V. 118-119.

Wbg.

E. Lampe, W. J. Greenstreet, G. Heppel. Solution of question 10965. Ed. Times LV. 115-116.

Wenn eine gleichseitige Hyperbel mit einer fest gegebenen Parabel eine vierpunktige Berührung hat, so ist der Ort ihres Mittelpunktes das Spiegelbild der Parabel gegen die Directrix; das Quadrat der Halbaxe der Hyperbel ist $a^2=Rp$, wenn R der Krümmungsradius der Parabel, p der halbe Parameter ist. Ist

statt der Parabel eine Ellipse gegeben, so ist der Ort des Mittelpunktes der vierpunktig berührenden Hyperbel die Fusspunktencurve der Ellipse $a^2x^2+b^2y^2=(a^2+b^2)^2$ für den Mittelpunkt als Pol, wie auch früher schon als Uebungsaufgabe gestellt war.

Lp.

E. LAMPE, ANDERSON. Solution of question 10559. Ed. Times LIV. 74-76.

Der vom Ref. zum Beweise vorgelegte Satz lautet: Setzt man die Declination der Sonne während eines Tages constant voraus, so ist die Curve, welche der Endpunkt des Schattens eines verticalen Stabes von der Länge l im Laufe eines Tages in unseren Breiten φ auf der Horizontalebene beschreibt, bekanntlich eine Hyperbel. Die Asymptoten aller dieser Hyperbeln für verschiedene Tage des Jahres umhüllen eine Parabel vom Parameter $4l\operatorname{tg}\varphi$, deren Scheiteltangente diejenige Gerade ist, welche von dem Endpunkte des Schattens an den Tagen der Aequinoctien beschrieben wird. Der Ort der Endpunkte der conjugirten Axen aller Hyperbeln ist eine andere Parabel vom Parameter $l\operatorname{tg}\varphi$. Lp.

B. CHAKRAVARTI, T. GALLIERS, BHATTARYA. Solution of question 9162. Ed. Times LIV. 40.

Die reciproke Polare der Evolute der Hypel $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ mit Bezug auf den Kreis, der den Abstand der beiden Brennpunkte zum Durchmesser hat, ist die Curve $a^2/x^2-b^2/y^2=1$.

Lp.

J. WOLSTENHOLME, ANDERSON. Solution of question 10494. Ed. Times LIV. 111-112.

Angaben von geraden Linien, deren Schnittpunkte die Lemoine'schen und die Brocard'schen Punkte der einer Ellipse eingeschriebenen grössten Dreiecke liefern. Lp.

W. J. Greenstreet, T. Gallies, M. Brierly. Solution of question 10288. Ed. Times LIV. 83-84.

Die Hüllcurve der Seiten eines Dreiecks, das der Ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ eingeschrieben ist und den festen Höhenschnitt X, Y besitzt, hat die Gleichung:

$$\left(2xX-\frac{a^2X^2+b^2Y^2-b^4}{a^2+b^2}\right)\left(2yY-\frac{a^2X^2+b^2Y^2-a^4}{a^2+b^2}\right)+x^2(X^2-a^2)+y^2(Y^2-b^2)=2xyXY.$$

Lp.

J.-G. Darboux. Solution de la question 276. J. de Math. spéc. (3) V. 136-144.

Zwei Gegenecken eines vollständigen Vierseits bleiben fest; zwei andere, nicht gegenüberliegende Ecken beschreiben einen Kegelschnitt. Die eine der beiden letzten Ecken beschreibt eine Gerade. Dann ist der Ort der sechsten Ecke ein Kegelschnitt. Analoger Satz, wenn der Kegelschnitt durch eine Fläche zweiter Ordnung, die Gerade durch eine Ebene ersetzt wird. Der Verf., Schüler des Lycée Louis-le-Grand, behandelt die letztere Aufgabe.

Lp.

Leinekugel. Solution de la question 272. J. de Math. spéc. (3) V. 166-167.

Zieht man in einem Punkte M der inneren von zwei concentrischen und ähnlichen coaxialen Ellipsen die Normale, welche die Axen in P und Q schneidet, ferner die Tangente, welche die äussere Ellipse in R und S schneidet, so sind die Winkel PRQ und PSQ von unveränderlicher Grösse. (Satz von J. Neuberg.)

Lp.

Rezeau. Solution de la question 221. J. de Math. spéc. (3) V. 91-95.

Analytische Lösung der Aufgabe, an einen gegebenen Kreis eine solche Tangente zu ziehen, dass die auf ihr von zwei festen Geraden ausgeschnittene Strecke eine gegebene Länge l hat.

Lp.

YALE, T. U. TAYLOR. Solutions of exercises. Annals of Math. V. 231-232.

Drei leichte Aufgaben der rechnenden Geometrie. H.

TH. MEYER. Ueber zwei merkwürdige Punktpaare auf einer Axe einer Curve zweiter Ordnung. Naturf. Ges. Halle LXIV. 542-546.

J. PUZYNA. Ueber einen Satz von F. Fohe. Krak. Denkschr. XVII. 24-45. (Polnisch, 1890.)

C. A. LAISANT. Interprétation géométrique d'une identité. Soc. Philom. Bull. (8) III. 51.

D. Andere specielle Curven.

W. W. ROUSE BALL. On Newton's classification of cubic curves. Lond. M. S. Proc. XXII. 104-143.

Die Enumeratio linearum tertii ordinis, welche Newton im Jahre 1704 als einen Anhang zu seiner Optik zuerst veröffentlicht hat, enthält die ersten Versuche, die Methoden der analytischen Geometrie auf eine erschöpfende Klassification der Curven dritter Ordnung anzuwenden. Die vorliegende Abhandlung enthält eine Uebersicht über den Inhalt dieser Schrift und vergleicht sie mit einer früheren von Newton gegebenen Behandlung dieses Gegenstandes, welche in einer Handschrift in der Portsmouth Sammlung sich findet. Es folgt eine kurze Angabe der Schriften, welche sich mit dem gleichen Gegenstande in der Folge beschäftigt und eine engere Beziehung zu der Newton'schen Methode haben, und an diese schliessen sich zwei Auszüge aus Newton's Manuscripten. Das eine führt den Titel: „Fragments concerning lines of the third order", das andere „Enumeratio curvarum trium dimensionum". Schn.

W. Burnside. On the form of closed curves of the third class. Mess. (2) XXI. 25-26.

Durch einfache Ueberlegungen werden als die beiden möglichen Formen ermittelt: 1) eine einzige geschlossene Curve mit drei Spitzen, 2) eine aus zwei Teilen bestehende Curve: der erste Teil hat die Form des ersten Falles, der zweite ist ein diesen Teil umschliessendes Oval. Lp.

H. von Jettmar. Analytische Untersuchungen der Curven zweiter und dritter Ordnung mittels numerischer Dreieckscoordinaten. Hoppe Arch. (2) X. 13-31.

Numerische Dreieckscoordinaten eines Punktes heissen die Verhältnisse seiner Abstände von den drei Seiten eines festen Grunddreiecks zu den entsprechenden Höhenloten. Nach Aufstellung der fundamentalen Relationen werden diejenigen Gebilde zweiten und dritten Grades, welche in symmetrischer Beziehung zum Grunddreieck stehen, dann auch die einaxigen discutirt und vier besondere Aufgaben gelöst. H.

F. H. Loud. A theorem in plane cubics. Annals of Math. VI. 5-6.

Der Satz ist folgender. Eine Curve dritten Grades wird von vier Geraden PQR, PGL, QHM, RKN in den neun bezeichneten Punkten geschnitten. Die Sehnen KM, GN, HL schneiden die Curve bezw. noch in A, B, C und die Sehnen GL, HM, KN in a, b, c; dann liegen A, B, C und a, b, c in zwei geraden Linien, welche die Sehne PQR in demselben Punkte schneiden.
H.

J. Valyi. Zur Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung und sechster Klasse. II. Ungar. Ber. IX. 143-150.

Verf. beweist mit Hülfe der Darstellung der Coordinaten einer solchen Curve durch Weierstrass'sche elliptische Functionen

den Satz: Wenn zwei r-Ecke A_k, B_k auf einer solchen Curve so liegen, dass alle Verbindungslinien $A_k B_k$ durch einen Punkt C_0, alle Verbindungslinien $A_k B_{k+1}$ durch einen Punkt C_1 gehen, so gehen auch alle Verbindungslinien $A_k B_{k+\lambda}$ durch einen Punkt C_λ; ferner alle $A_k C_{-k+\lambda}$ durch B_λ, alle $B_k C_{k-\lambda}$ durch A_λ. Er zeigt ferner, dass solche „r-fach perspectiven r-Ecke" wirklich existiren und bestimmt die Ordnungszahl der von ihnen gebildeten Mannigfaltigkeit. Bdt.

G. de Longchamps. Sur les cubiques unicursales. Progreso mat. I. 49-54.

Hr. Zahradnik hat gezeigt (vgl. F. d. M. V. 1873. 366, VI. 1874. 443), dass die einläufigen, durch einen Doppelpunkt gekennzeichneten Curven dritter Ordnung als Cissoiden erzeugt werden können, d. h. sich aus den Kegelschnitten herleiten lassen, wie die gemeine Cissoide aus dem Kreise. Hr. de Longchamps zeigt im gegenwärtigen Aufsatze, dass jener Satz eine Ausnahme erleidet, wenn die kubische Curve die Gerade im Unendlichen als dreifache Asymptote besitzt. Darauf beschäftigt sich der Verf. mit der Punkt-Construction der einläufigen kubischen Curven und mit der Construction der Tangenten an diesen Curven.

Tx. (Lp.)

Waroquier. École Normale supérieure. Concours de 1890. J. de Math. spéc. (3) V. 18-20.

Bei rechtwinkligen Axen nimmt man auf der x-Axe einen festen Punkt A, auf der y-Axe einen festen Punkt B an und legt durch den Ursprung O die Parallele zu AB. Drei Kreise, von denen der erste Ox in A, der zweite Oy in B, der dritte die Parallele durch O zu AB in O berührt, haben dieselbe Potenzlinie. Dieselbe geht durch einen festen Punkt. Die gemeinschaftlichen Punkte jener drei Kreise liegen auf der kubischen Curve

$$(x^2+y^2)(b^2x+a^2y)-2ab(bx+ay)^2+a^2b^2(bx+ay)=0,$$

deren Gestalten erörtert und abgebildet werden. Lp.

H. Brocard. Sur une classe particulière de triangles. Mathesis (2) I. 153-156.

Untersuchung einer gewissen Strophoide, die zu einer geometrischen Deutung der Functionen *sn*, *cn*, *dn* führt, wenn der Modul gleich 1 ist. Mn. (Lp.)

Jan de Vries. Polygones cycliques sur courbes cubiques planes. Arch. Néerl. XXV. 1-32.

Uebersetzung der Abhandlung: Amst. Versl. en Meded. (3) VII. 430-461 (F. d. M. XXII. 1890. 560). Mo.

T. Tuch. Eine Cremona'sche Punkt-Gerade-Verwandtschaft zweiter Ordnung nebst einer Untersuchung über die einer Curve dritter Ordnung gleichzeitig ein- und umgeschriebenen Dreiecke. Diss. Jena. 51 S. 8°. (1890.)

G. B. Mathews. On a certain class of plane quartics. London M. S. Proc. XXII. 173-176.

Die allgemeinste Curve vierter Ordnung kann erzeugt werden als Einhüllende der zu allen Punkten eines Kegelschnitts in Bezug auf eine feste Curve dritter Ordnung gehörenden ersten Polaren. Der Verf. legt eine specielle Curve dritter Ordnung zu Grunde $x^3+y^3+z^3=0$; er zeigt, dass alsdann die entstehende Quartic auch aus einem doppelt unendlichen System von Kegelschnitten und Curven dritter Ordnung hergeleitet werden kann und berechnet das vollständige System ihrer Doppeltangenten.

R. M.

E. Möcke. Ueber zweiaxig-symmetrische Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Pr. Gymn. Gross-Strehlitz 1891 (No. 204). 20 S. 4° u. 1892 (No. 206). 16 S. 4°.

In der leicht anzusetzenden Gleichung dieser Curven drückt der Verf. die Coefficienten durch vier Parameter *a*, *b*, *c*, *d* aus,

sodass ($\pm a$, 0) die beiden Doppelpunkte und (0, $\pm c$), (0, $\pm d$), ($\pm a$, $\pm b$) andere, anschaulich sofort hervortretende Punkte sind. Die Abhängigkeit der Curvengestalt von der Realität und den besonderen Wertverhältnissen dieser vier Grössen wird erschöpfend discutirt und durch 18 Figuren erläutert. R. M.

BALITRAND. Sur les courbes du quatrième ordre qui ont trois points doubles d'inflexion et en particulier sur la Kreuzcurve. Mathesis (2) I. 241-245.

Untersuchung der Curven mit der trilinearen Gleichung $ly^2z^2+mz^2x^2+nx^2y^2=0$. Mn. (Lp.)

H. BROCARD. Le trifolium. J. de Math. spéc. (3) V. 32-42, 56-64, 80-85, 106-115, 123-132, 149-157, 177-181.

Die Fusspunktencurve der dreispitzigen Hypocykloide in Bezug auf einen Punkt des sie dreifach berührenden Kreises ist eine Curve vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkte; dieselbe ist unter diesem Gesichtspunkte von Hrn. G. de Longchamps im J. de Math. spéc. (3) I. 203-205 und 220-223 (1887) untersucht worden und hat den Namen „schiefes Dreiblatt" erhalten. Hr. Brocard giebt zunächst eine neue Erzeugung: Durch einen Punkt P einer Kreislinie zieht man eine Sehne PR, durch R eine Parallele zu einer vorgegebenen festen Geraden f. Trägt man die Sehne RP von R aus auf dieser Parallele beiderseitig bis M und M' ab, so ist der Ort von M (oder M') ein schiefes Dreiblatt, dessen Gleichung für den durch P gehenden Durchmesser als x-Axe und die Tangente in P als y-Axe lautet:

$$(x^2+y^2)^2 = 2ax(x^2+y^2)+2ax(x^2-3y^2)\cos 2\theta + 2ay(3x^2-y^2)\sin 2\theta.$$

Die Arbeit entwickelt sodann eine grosse Anzahl von Eigenschaften dieser Curve unter den folgenden Ueberschriften: Merkwürdige Punkte des schiefen Dreiblatts. Das schiefe Dreiblatt und das regelmässige Dreiblatt. Tangente und Normale am schiefen Dreiblatt. Das schiefe Dreiblatt und die dreieckige

Hypocykloide. Eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. Dreiecke in Verknüpfung mit dem schiefen Dreiblatte. Krümmung des schiefen Dreiblatts. Gleichseitige Hyperbel in Verknüpfung mit dem schiefen Dreiblatte. Besondere Fusspunktcurven der dreieckigen Hypocykloide. Das gerade Dreiblatt. Das Zweiblatt. Andere Constructionen des schiefen Dreiblattes. Eine geometrische Transformationsart. Berührende gleichseitige Hyperbeln bei dem schiefen Dreiblatte. Verschiedene Fragen. Uebersicht und Schlussfolgerungen. Bibliographische Angaben.

Lp.

U. Bigler. Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche. Hoppe Arch. (2) X. 113-153.

Der Verfasser untersucht nicht nur die Brennlinie eines reflectirenden Kreises mit allen ihren Singularitäten für jede Lage des leuchtenden Punktes, sondern auch die Evolvente derselben, welche (sonst als secundäre Brennlinie bezeichnet) von ihm Wellenlinie genannt wird, weil in ihr alle Aetherteilchen gleiche Schwingungszustände haben. Der Verfasser giebt selbst an, dass die Brennlinie schon 1857 von Holditch, Quart. J. I, ausführlich untersucht ist, glaubt aber, dass seine Methode und die Resultate über die Wellenlinie neu seien; er hat dabei Cayley's Memoir upon Caustics von demselben Jahre (Philos. Transactions CXLII) übersehen. Vergl. auch Salmon-Fiedler, Höhere ebene Curven. Art. 115, 116.

R. M.

Balitrand. Sur la lemniscate. J. de Math. spéc. (3) V. 76-80.

Für die Schnittpunkte eines beliebigen Kreises und der Lemniskate, deren Coordinaten durch

$$x = \frac{at}{1+t^4}, \quad y = \frac{at^3}{1+t^4}$$

dargestellt werden, wird die biquadratische Gleichung in t aufgestellt; durch Discussion derselben erhält man eine Anzahl von Sätzen über „concyklische“ Punkte auf der Lemniskate.

Lp.

J. Wolstenholme, H. J. Woodall, Chakrivarti. Solution of question 10442. Ed. Times LV. 74-76.

Untersuchung der Curve:

$$y^4+8ay^2(x-3a)+16a^2(a-2x)=0.$$

Jede Sehne durch den Ursprung der Coordinaten wird von der Curve harmonisch geteilt. Die Mittelpunkte der Paare conjugirter Punkte liegen auf einer Parabel mit dem Ursprung als Brennpunkt und $4a$ als Parameter. Lp.

A. Filipowski. Ueber die Cassinische Curve. Pr. Lemberg 1891. 1-20. (Polnisch.)

Aufstellung und Discussion der Gleichung dieser Curve. Dn.

S. Hudler. Die Cassini'sche Curve. 2. Aufl. Wien. 28 S. gr. 8° u. 2 Taf.

H. Brocard. Remarque au sujet de la trisectrice de Mac-Laurin. J. de Math. spéc. (3) V. 245-246.

Eine geometrische Erzeugungsart der Curve. Lp.

G. Peeschke. Die negativen Fusspunktencurven der Kegelschnitte, dargestellt als Rollcurven. Diss. Rostock. 37 S. 8°. (1890.)

F. Machovec. Ueber die Krümmungsmittelpunkte der Dreieckscurven (courbes triangulaires). Prag. Ber. 83-96.

Dreieckscurven (courbes triangulaires) nennt Herr de la Gournerie Curven, welche in trimetrischen Coordinaten sich in der Form darstellen $\alpha x_1^n+\beta x_2^n+\gamma x_3^n=0$. Zwei solche Curven von der Form $\alpha_r x_1^r+\beta_r x_2^r+\gamma_r x_3^r=0$ und $\alpha_s x_1^s+\beta_s x_2^s+\gamma_s x_3^s=0$ mögen sich in einem Punkte berühren. Unter dieser Voraussetzung ist das Verhältnis ihrer Krümmungshalbmesser ϱ_r und ϱ_s in diesem Punkte nur von den Zahlen r und s abhängig und zwar ist $\frac{\varrho_r}{\varrho_s}=\frac{s-1}{r-1}$.

Für $s = -1$ stellt die zweite Gleichung einen dem Fundamentaldreieck umgeschriebenen Kegelschnitt dar, für $s = \frac{1}{2}$ einen Kegelschnitt, welcher dem Fundamentaldreieck eingeschrieben ist. Construirt man daher einen Kegelschnitt, welcher die Dreieckscurve $C^{(r)}$ in einem beliebigen Punkte berührt und dem Fundamentaldreieck um- oder eingeschrieben ist, so ist das Verhältnis der Krümmungshalbmesser beider Curven in ihrem Berührungspunkte für alle Punkte $C^{(r)}$ constant.

Mit der Entwickelung dieser Beziehungen beschäftigt sich die vorliegende Arbeit. Schn.

Barisien. Concours pour les bourses de Licence (Paris, 1889). Solution. Nouv. Ann. (3) X. 297-301.

Untersuchung der durch die Gleichung

$$y = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}$$

definirten Curve. Wbg.

Guimaraes. Sur une équerre cycloïdale propre à effectuer la rectification des arcs de cercle. S. M. F. Bull. XIX. 98-99.

Benutzt die Basis der Cykloide zur Ausmessung der Länge eines Bogens des erzeugenden Kreises. Lp.

A. Cayley. On the epitrochoid. Mess. (2) XX. 150-158.

Der Verf. beweist zuerst den Satz: „Wenn man in einem beliebigen Augenblicke den Kreis betrachtet, welcher den Krümmungshalbmesser der rollenden Curve in dem Berührungspunkte mit der geradlinigen Basis zum Durchmesser hat, so ist jeder Punkt dieses Kreises ein Wendepunkt auf derjenigen Epitrochoide, welche derselbe Punkt beim Rollen der Curve auf der Geraden beschreibt". Demnach entsprechen jedem Punkte eines rollenden Kegelschnittes zwei Punkte der Peripherie dieses Kegelschnittes, deren zugehörige Epitrochoiden in ihnen Wende-

punkte besitzen. Die bezüglichen Rechnungen werden für die Hyperbel, Ellipse und Parabel durchgeführt, wobei einzelne besondere Sätze sich ergeben. Lp.

J. Wolstenholme. Solution of question 7251. Ed. Times LIV. 68-70.

Untersuchung derjenigen logarithmischen Spirale, welche mit einer Epicykloide oder Hypocykloide eine vierpunktige Berührung hat. Z. B.: Der Berührungspunkt P und der Pol S der Spirale sind inverse Punkte in Bezug auf die Basis der Epicykloide; Berechnung der Bogenlänge des Ortes von S, des Krümmungsradius, der Wendepunkte. Lp.

A. Michalitschke. Die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale. Zum Gebrauche für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen. Zweite Auflage. Erster Teil. Prag. H. Dominicus. 79 S. u. 1 Taf. gr. 8°.

Der Inhalt des jetzt als „erster Teil" bezeichneten Bändchens stimmt, abgesehen von unwesentlichen Verbesserungen, mit dem der ersten Auflage überein, die in F. d. M. XX. 1888. 751 angezeigt ist. Als Fortsetzung der Darstellung der geometrischen Eigenschaften der betrachteten Curven soll ein zweiter Teil ihr Vorkommen in der Mechanik behandeln. Lp.

M. d'Ocagne. Sur une courbe définie par la loi de sa rectification. Nouv. Ann. (3) X. 82-90.

Das Problem der Rectification der Curven wird dahin umgekehrt, dass die Curve gesucht wird, wenn deren Bogen in Beziehung zu einer variabeln geraden Strecke gegeben ist. Hiervon wird ein einziges Beispiel behandelt. Die gegebene Beziehung ist zunächst die, dass der Abstand der entsprechenden Punkte der Curve und Geraden constant ist. Dabei würde indes

die Rotation ihrer Verbindungslinie willkürlich bleiben. Zu ihrer Bestimmung wird nachher angenommen, dass das momentane Rotationscentrum von beiden Punkten gleichen Abstand habe. Es ergiebt sich eine der Curven der Kategorie, welche Sylvester Syntractrix genannt hat. Von ihr werden manche Eigenschaften entwickelt. H.

Capitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

H. Resal. Exposition de la théorie des surfaces. Paris. Gauthier-Villars et Fils. XIII + 171 S. 8°. [Darboux Bull. (2) XV. 226-227, J. de Math. spéc. (3) V. 165-166.]

A. Ribaucour. Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes. Journ. de Math. (4) VII. 5-108, 219-270.

Der Verfasser setzt in dieser umfangreichen Abhandlung die Grundlagen einer eigenartigen Methode zu flächentheoretischen Untersuchungen auseinander, deren er sich schon wiederholt in früheren Arbeiten bedient hat, und die er als Geometrie um eine Bezugsfläche (Géométrie autour de la surface de référence) bezeichnet, welche gewissermassen die Stelle des Coordinatensystems vertreten soll.

Es sei etwa eine Fläche O durch die Parameter u und v gegeben, und es seien OX und OY die Tangenten der Parameterlinien, OZ die Normale dieser Fläche im Punkte $O(u, v)$. Wenn aber jedem Punkte O ein Punkt M des Raumes entspricht, so ist dessen Lage zu bestimmen durch seine Coordinaten ξ, η, ζ in Bezug auf die augenblicklich gewählten Axen. Man gehe nun von O zu irgend einem Nachbarpunkte $O'(u+du, v+dv)$ über; dann geht M über in M', die Zuwachse von ξ, η, ζ seien

$\varDelta\xi$, $\varDelta\eta$, $\varDelta\zeta$, während die Projectionen von MM' auf OX, OY, OZ seien $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$; diese drei Grössen lassen sich berechnen aus du, dv, $\varDelta\xi$, $\varDelta\eta$, $\varDelta\zeta$, so dass man Grösse und Richtung von MM' bestimmen kann.

Giebt man allgemeiner eine Gleichung von der Form $F(\xi, \eta, \zeta, u, v) = 0$, so wird für jeden Punkt $O(u, v)$ eine ihm entsprechende Fläche definirt, die sich, als Ganzes betrachtet, in gewisser Weise deformirt, wenn u und v um du und dv wachsen; auch diese Deformation lässt sich bestimmen. Hat man die hier angedeuteten Transformationen ein für allemal ausgeführt, so kann man alle Operationen der analytischen Geometrie „um eine Fläche herum" ebenso ausführen, wie mit cartesischen Coordinaten. Die Fläche O heisst die Bezugsfläche.

Der Umstand, dass die Parameterlinien auf $O(u, v)$ nicht orthogonal zu sein brauchen, veranlasst dazu, die Bestimmung der Axen OX und OY etwas allgemeiner als zwei beliebig bestimmte orthogonale Tangentenrichtungen einzuführen. In derselben Weise, wie von einer Bezugsfläche, kann man auch von einem dreifachen Flächensystem ausgehen, welches von drei Parametern ϱ, ϱ_1, ϱ_2 abhängt, und darauf einen anderen Raum beziehen. Dies Verfahren, welches bereits von Herrn Liouville in einem Falle durchgeführt ist, führt namentlich bei dreifach orthogonalen Flächensystemen zu bemerkenswerten Resultaten.

Es liegt auf der Hand, dass man durch passende Wahl der Bezugsfläche bei den Problemen der Flächentheorie sehr grosse Vereinfachungen sowohl hinsichtlich der Form der auftretenden Differentialgleichungen, als auch hinsichtlich der geometrischen Deutung der Resultate erlangen kann. Will man z. B. die Theorie der Kreissysteme untersuchen, welche auf einem Flächensystem normal stehen, und wählt man eine dieser Trajectorienflächen als Bezugsfläche, so findet man, dass das Problem sich zurückführen lässt auf die Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\varrho\,\partial\varrho_1} = \frac{\partial Z}{\partial\varrho}\,\frac{1}{H}\,\frac{\partial H}{\partial\varrho_1} + \frac{\partial Z}{\partial\varrho_1}\,\frac{1}{H_1}\,\frac{\partial H_1}{\partial\varrho},$$

welche in vielen Fällen eine Integration gestattet. Wählt man als Bezugsfläche die Eingehüllte der Kreisebenen, so erhält man

zwar eine Differentialgleichung von weniger einfacher Form, aus welcher aber gewisse Eigenschaften des Kreissystems unmittelbar in Evidenz treten, und die im Grunde doch als der einfachste Ausdruck des Problems betrachtet werden muss.

Ein anderes Beispiel bildet das Biegungsproblem. Sucht man alle Flächen, welche sich auf eine gegebene biegen lassen, so wählt man als Bezugsfläche etwa die gegebene Fläche, und man wird auf eine Differentialgleichung geführt, die nur in wenigen Fällen eine vollständige Integration gestattet.

Stellt man sich aber das Problem, alle Paare von Flächen zu suchen, welche auf einander abwickelbar sind, und wählt man als Bezugsfläche den Ort der Mitten der Verbindungslinien der einander entsprechenden Punkte, so kommt man auf eine Gleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} = \lambda Z.$$

Die Vereinfachungen, welche die Methode bietet, beruhen wesentlich darauf, dass, wenn die Bezugsfläche gegeben ist, gewisse Integrationen bereits als vollzogen anzusehen sind.

Den Plan der Untersuchung giebt der Verfasser folgendermassen an: Im ersten Teile werden die grundlegenden Formeln entwickelt, im ersten Capitel für den Fall, dass die Parameterlinien der Bezugsfläche orthogonal sind, im zweiten für nicht orthogonale Parameterlinien, im dritten Capitel ist ein dreifach orthogonales räumliches System zu Grunde gelegt. Im zweiten Teile sind Anwendungen gegeben, welche sich auf Systeme von Geraden und auf Evolutenflächen (développées, nach der vom Verfasser eingeführten Benennung) beziehen; es soll weiter folgen die Untersuchung der Paare von Flächen, welche auf einander abwickelbar sind; ferner von Flächen, welche sich orthogonal entsprechen, der cyklischen Systeme und der allgemeinsten Bewegung eines Körpers, der vier Bedingungen unterworfen ist. Daran soll sich schliessen die Untersuchung von Systemen ebener Curven, welche ein Flächensystem normal durchschneiden. Als Fortsetzung dieser Art von Anwendungen käme dann die Untersuchung der Eigenschaften der ebenen Schnitte einer Fläche,

welche durch die Tangentialebenen einer zweiten gebildet sind, oder specieller durch diejenigen der Fläche selbst. Hierbei ergeben sich einige neue Eigenschaften, u. a. eine Verallgemeinerung eines Beltrami'schen Satzes.

Den Schluss soll die Untersuchung der dreifachen Orthogonalsysteme bilden.

Indessen ist der Stoff derartig angewachsen, dass die angegebenen Anwendungen bisher nur zum kleineren Teile erledigt sind. A.

J. KNOBLAUCH. Ueber die geometrische Bedeutung der flächentheoretischen Fundamentalgleichungen. Acta Math. XV. 249-257.

Zwischen den Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung existiren bekanntlich drei Gleichungen, deren geometrische Bedeutung meist gar nicht berücksichtigt wird. Für die erste derselben wird gewöhnlich allein die Deutung gegeben, dass das Krümmungsmass K einer Fläche nur von den Fundamentalgrössen erster Ordnung abhängt, ohne dass die geometrische Bedeutung des Ausdruckes, den man für K erhält, weiter betrachtet wird. Indessen hat bereits im Jahre 1848 O. Bonnet (Journ. de l'Éc. Polyt. Heft XXXII, S. 52) für K folgende Formel entwickelt:

$$K = g_{uv}+g_{vu}-g_u^2-g_v^2.$$

Hierin bedeutet g_u die geodätische Krümmung der Parameterlinie $u =$ const. und

$$g_{uv} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial g_u}{\partial v},$$

wo G die dritte der Fundamentalgrössen erster Ordnung bezeichnet, wie bei Gauss, und $F=0$ angenommen ist. Diese Gleichung für K vertritt die erste der drei betrachteten Relationen; aber eine Deutung der beiden anderen ist bisher nicht in befriedigender Weise gelungen, wenn auch Bour (Journ. de l'Éc. Polyt. Heft XXXIX. 1862) für ein bestimmtes Parametersystem eine solche gegeben hat. Dieselbe würde aber für andere Parameter unbequem sein und die Hinzuziehung von Grössen erfordern, welche für die Flächentheorie sonst von geringem Nutzen sind. Der Ver-

fasser sucht diesen Uebelstand dadurch zu vermeiden, dass er die beiden Evolutenflächen (Krümmungsmittelpunktsflächen) und deren Hauptkrümmungen benutzt; hierdurch gelingt es ihm, eine geometrische Deutung der beiden anderen Gleichungen aufzufinden. Diese Gleichungen nehmen nämlich die Form an:

$$[H_1(\varrho_1-\varrho_2)+\varrho_2 g_2]\varrho_2 g_2+K_1(\varrho_1-\varrho_2)^2(1+\varrho_1^2 g_1^2) = 0,$$
$$[H_2(\varrho_2-\varrho_1)+\varrho_1 g_1]\varrho_1 g_1+K_2(\varrho_1-\varrho_2)^2(1+\varrho_2^2 g_2^2) = 0.$$

Hierin bedeuten H_i ($i = 1,2$) und K_i die Summe und das Product der Hauptkrümmungen der zum Krümmungsradius ϱ_i gehörigen Evolutenfläche, und g_i die geodätische Krümmung der entsprechenden Krümmungslinie der Urfläche.

Die Einführung der eben definirten Grössen ermöglicht die geometrische Deutung derjenigen partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung, durch welche irgend eine Flächengattung definirt ist, und umgekehrt, wie dies in der Abhandlung weiter erläutert wird. A.

R. Hoppe. Ueber die sphärische Darstellung der asymptotischen Linien einer Fläche. Hoppe Arch. (2) X. 443-446.

Der Verfasser entwickelt gewisse Formeln, welche Herr Guichard in einer Abhandlung: Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques etc. (Ann. de l'Éc. Norm. (3) VI. 333, F. d. M. XXI. 1889. 764) gewonnen hatte, auf etwas einfachere Weise, wozu ihn gewisse methodische Bedenken gegen dessen Behandlungsweise veranlasst haben. A.

V. Rouquet. Formules générales de la théorie des courbes gauches. Applications. Toulouse Mém. (9) III. 117-132.

Der Theorie der Raumcurven legt der Verfasser 3 Systeme von Formeln zugrunde, die er „allgemeine Formeln der Perimorphie" nennt. Der erzeugende Punkt O der Curve s ist Anfang der Coordinaten X, Y, Z in den Richtungen der Tangente, Haupt- und Binormale. Relativ zu diesen hat ein Punkt A die Coordi-

naten ξ, η, ζ. Das erste Formelsystem ist die Bedingung dafür, dass A im Raume fest ist; das zweite dafür, dass eine beliebige Gerade $X:l = Y:m = Z:n$ im Raume fest ist (den unbestimmten Factor in l, m, n hat der Verfasser nicht beachtet; es muss $l^2+m^2+n^2 = 1$ sein). Das dritte System bestimmt die momentane Bewegung eines beliebigen Punktes (X, Y, Z). Von diesen Grundformeln wird Anwendung gemacht auf die Bestimmung einer Curve, deren Krümmung und Torsion als Functionen des Bogens gegeben sind. Die Resultate enthalten nur das Elementarste des Bekannten. H.

G. Koenigs. Sur les systèmes conjugués à invariants égaux. C. R. CXIII. 1022-1024.

Der Verfasser fragt nach der geometrischen Bedeutung der Bedingung, dass die auf eine Fläche F mit conjugirten Parameterlinien $u =$ const., $v =$ const. bezogene Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v} + cx = 0$$

gleiche Invarianten besitzt, d. h. dass $\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v}$ ist.

Es lassen sich Congruenzen G angeben, deren Developpabeln das Parameternetz (u, v) aus der Fläche F ausschneiden.

Durch jeden Punkt P der Fläche geht eine Gerade g, die einer solchen Congruenz angehört; ihre Brennpunkte seien F_1, F_2. Man construire den zu P in Bezug auf F_1, F_2 zugeordneten harmonischen Punkt P'. Die Punkte P' erfüllen eine neue Fläche F', die zu F „conjugirte harmonische" Fläche. Dann sagt das gemeinte Kriterium aus, dass das dem Parameternetze (u, v) auf F entsprechende Curvennetz auf F' ebenfalls ein conjugirtes ist.

My.

R. v. Lilienthal. Zur Krümmungstheorie der Curvenscharen. Math. Ann. XXXVIII. 429-451.

Die Arbeit ist eine Fortsetzung einer Abhandlung „Ueber die Krümmung der Curvenscharen" (Math. Ann. XXXII. 545,

F. d. M. XX. 1888. 770). Während dort die Veränderlichkeit der drei Variabeln durch die Bedingung des Fortschreitens in der Normalebene einer Curve der Schar an der betrachteten Stelle beschränkt war, sind dieselben hier unbeschränkt veränderlich angenommen. Hierdurch treten neue Invarianten auf, welche bei geradlinigen Strahlensystemen nicht vorkommen, durch welche sich aber gewisse Integrabilitätsbedingungen einfach ausdrücken lassen. Nach Transformation der Lamé'schen Differentialparameter in Bezug auf die Curvenschar werden die Beziehungen der Schar zur Einheitskugel betrachtet, und es stellt sich der reciproke Quotient aus dem Querschnitt eines Tangentenbündels und dem parallelen Kugeloberflächenelement als Invariante des Quadrates des durch die Curvenschar bestimmten Linienelementes dar. Den Schluss der Untersuchungen bilden Folgerungen für die Flächentheorie. In dieser Weise giebt der Verfasser in der Einleitung den Inhalt seiner Arbeit an, auf deren Detail ohne grösseren Formelapparat nicht eingegangen werden kann. A.

V. Kommerell. Beiträge zur Gauss'schen Flächentheorie. Diss. Tübingen. Fr. Fues. III+46 S. mit 1 Taf. (1890.)

A. Voss. Zur Theorie der Krümmung der Flächen. Math. Ann. XXXIX. 179-256.

In der Theorie der Krümmung der Flächen kann man als Grundlage die Betrachtung der Normalen in den einem Flächenpunkte benachbarten Punkten ansehen, durch welche man auf die Hauptkrümmungen, die Krümmungen der Normalschnitte und auf den Begriff des Krümmungsmasses u. s. w. geführt wird. So fruchtbar diese Betrachtungsweise nun auch ist, weil alle Bestimmungen in Zusammenhang gebracht sind mit den Massverhältnissen auf der zweidimensionalen Fläche, so vermisst der Verfasser darin eine gewisse Beziehung zum dreidimensionalen Raume. Er hat deshalb einen anderen Ausgangspunkt gewählt, nämlich die Eigenschaft, dass vier Punkte der Fläche nicht in

einer Ebene liegen, und fragt, wie das Volumen gewisser unendlich kleiner Tetraeder, deren Eckpunkte auf der Fläche liegen, mit den Krümmungseigenschaften der Fläche zusammenhängt. Ist P ein durch die Parameterwerte u_0, v_0 bestimmter gewöhnlicher Flächenpunkt, und sind die Nachbarwerte $u = u_0 + h$, $v = v_0 + k$ Parameter des Punktes P_3, so hat man zwei Paar Parameterlinien u_0, $u_0 + h$, v_0, $v_0 + k$, wo h und k in erster Ordnung verschwinden, die sich in vier Punkten schneiden: P, P_1, P_2, P_3, und der Inhalt des durch sie bestimmten Tetraeders T ist von der vierten Ordnung unendlich klein. Dividirt man deshalb zunächst T durch die zweite Potenz des doppelten Dreiecks $2PP_1P_2 = \Omega$, so entsteht ein Grenzwert, der im allgemeinen von Null verschieden und von der Richtung PP_3 unabhängig ist, aber in keinem Zusammenhange mit den Krümmungsverhältnissen steht. Bilden aber die Parameterlinien ein conjugirtes System, so ist jener Grenzwert Null, und T verschwindet von der sechsten Ordnung. Um zu einem Grenzwert zu gelangen, dividirt der Verfasser noch durch das Quadrat von $OP_3 = ds$. Diesen Grenzwert, nur aus gewissen naheliegenden Gründen mit 72 multiplicirt, der im allgemeinen noch von der Wahl der conjugirten Parameter abhängt, nennt der Verfasser „Parameterkrümmung" der Fläche, und findet dafür den Ausdruck:

$$\frac{1}{P} = \lim\left(\frac{72T}{S^2\Omega^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{eg-f^2}} \frac{E\left(\frac{\partial B}{\partial u} - B_1 B\right)du^2 + G\left(\frac{\partial B_1}{\partial v} - BB_1\right)dv^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}.$$

Hierin sind e, f, g, E, F, G die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung in der bekannten Hoppe'schen Bezeichnung, während A, B, C, A_1, B_1, C_1 die Coefficienten sind, die sich aus den Identitäten ergeben:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = A\frac{\partial x}{\partial u} + A_1\frac{\partial x}{\partial v} + Ep,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = B\frac{\partial x}{\partial u} + B_1\frac{\partial x}{\partial v} + Fq,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = C\frac{\partial x}{\partial u} + C_1\frac{\partial x}{\partial v} + Gr,$$

wo statt x auch y oder z gesetzt werden kann, und in denen p, q, r die Richtungscosinus der Normale bedeuten. (Man vergleiche Hoppe, Flächentheorie § 5). Die drei obigen Differentialgleichungen, denen jede der drei Coordinaten genügt, werden vom Verfasser als die partiellen Differentialgleichungen der Fläche bezeichnet. Die Grössen A, B, C, A_1, B_1, C_1 sind durch die Fundamentalgrössen erster Ordnung und ihre Ableitungen darstellbar. Es ist z. B.

$$2B(eg-f^2) = g\frac{\partial e}{\partial v} - f\frac{\partial g}{\partial w},$$

$$2B_1(eg-f^2) = e\frac{\partial g}{\partial w} - f\frac{\partial e}{\partial v}.$$

Die sechs Grössen A, A_1, u. s. w. werden vom Verfasser die charakteristischen Coefficienten genannt. Da im vorliegenden Falle conjugirte Parameter vorausgesetzt sind, ist $F = 0$.

Die Parameterkrümmung hat unter anderen folgende Eigenschaften, die denen der gewöhnlichen Normalkrümmung analog sind: Es giebt stets zwei reelle, zu einander senkrechte Richtungen, für welche die Parameterkrümmungen ein Maximum und ein Minimum werden. Das Product dieser Hauptparameterkrümmungen ist gleich

$$\frac{K\left(\frac{\partial B}{\partial u} - B_1 B\right)\left(\frac{\partial B_1}{\partial v} - BB_1\right)}{eg-f^2} = \frac{K\alpha.\beta}{eg-f^2},$$

wo K das Krümmungsmass bedeutet; es hängt also auch jenes Product nur von den Fundamentalgrössen erster Ordnung ab. Jede andere Parameterkrümmung kann aus den beiden Hauptkrümmungen in analoger Weise abgeleitet werden, wie dies bei den gewöhnlichen Normalkrümmungen durch den Euler'schen Satz geschieht. Es giebt zwei reelle oder imaginäre Richtungen, für welche die Parameterkrümmung Null ist, sie sind den asymptotischen Richtungen zu vergleichen; das Tetraeder T verschwindet für sie von der siebenten Ordnung.

Da die oben benutzten Ausdrücke α und β nur von den Fundamentalgrössen erster Ordnung abhängen, so bleiben sie bei jeder Biegung der Fläche ungeändert. Da sie aber anderer-

seits mit dem Tetraederinhalt zusammenhängen, so ist zu vermuten, dass sie bei einer collinearen Transformation, bei welcher ja conjugirte Richtungen wieder in solche übergehen, gewisse invariante Eigenschaften haben. Um diese aufzusuchen, unternimmt nun der Verfasser zunächst eine allgemeine Untersuchung über die collineare Transformation der Flächen und ihre Differentialinvarianten. Diese Untersuchung hat eine von der vorigen Betrachtung ganz unabhängige, selbständige Bedeutung und führt zu sehr interessanten Resultaten, welche sich freilich ohne grösseren Formelapparat nicht mitteilen lassen, obwohl die Entwickelung überaus durchsichtig ist. Es genüge der Hinweis darauf, dass bei dieser Transformation die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung bis auf einen Factor ungeändert bleiben, ebenso das Krümmungsmass, und dass die Richtungscosinus der Normale und die charakteristischen Coefficienten der transformirten Fläche sich in einfacher Weise bestimmen. An diese Transformation knüpfen sich mancherlei Probleme, deren eines, eine Fläche so collinear zu transformiren, dass das Krümmungsmass bis auf einen constanten Factor ungeändert bleibt, eingehend behandelt wird. Hinsichtlich der Parameterkrümmung zeigt sich nun, dass die Grössen α und β bei jeder collinearen Transformation ungeändert bleiben, und dass bei noch speciellerer Wahl der conjugirten Parameter, nämlich wenn $E = \pm G = P$, bei positiv oder negativ gekrümmten Flächen, auch die Ausdrücke

$$C \mp (A - 2B_1) \quad \text{und} \quad C_1 \mp (A - 2B)$$

absolut invariant sind. Ist endlich $E = G = 0$, sind also die Parameterlinien Haupttangenten (mithin nicht conjugirt), so sind A_1 und C absolut invariant, und $\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}$, $\frac{\partial C_1}{\partial u} = \frac{\partial A}{\partial v}$.

Eine bemerkenswerte Folgerung aus diesen Resultaten ist, dass gewisse rein metrische Eigenschaften bei projectivischen Transformationen unverändert bleiben. Hierfür werden mehrere interessante Beispiele gegeben. Es folgt eine Betrachtung der Flächen mit der Parameterkrümmung Null, bei der besonders wichtig der Fall $\alpha = \beta = 0$ ist, in welchem die abwickelbaren Tangentenflächen, welche die Fläche längs den Parameterlinien

berühren, und zu welchen die Lie'schen Translationsflächen gehören, in Kegel übergehen. Weiter wendet sich die Untersuchung zur Bestimmung solcher conjugirten Parametersysteme, für welche die Parameterkrümmungen den Normalkrümmungen entsprechen. Für diese muss $\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}$ sein, also $\alpha = \beta$, so dass die Eigenschaft bei projectiven Transformationen erhalten bleibt. Diese Bestimmung wird auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt und dann bei einigen speciellen Flächengattungen vollständig durchgeführt. Im letzten Teil wird die Parameterkrümmung in dualistisch entsprechender Weise durch die Betrachtung des von vier benachbarten Tangentialebenen gebildeten Tetraeders definirt. Hierbei ergiebt sich, dass zwar die Parameterkrümmung keine dualistisch sich selbst entsprechende Grösse ist; es zeigt sich aber, dass auf gewissen Flächen dualistische Parametersysteme existiren, für welche die Parameterkrümmung in beiderlei Sinn mit der Normalkrümmung übereinstimmt, und dass auch diese Eigenschaft bei gewissen Transformationen erhalten bleibt. Aus dieser Inhaltsangabe wird man ersehen, dass die Arbeit reich ist an fruchtbaren Ideen und interessanten Resultaten. A.

E. Catalan. Sur la courbure des surfaces. Lettre adressée à M. Casorati. Acta Math. XV. 191-192.

Herr Catalan äussert gegenüber dem von Herrn Casorati eingeführten Begriff des Krümmungsmasses „suivant l'idée commune“:

$$C = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right]$$

(Lomb. Ist. Rend. (2) XXII. 335 u. Acta Math. XIV. 95; F. d. M. XXI. 1889. 749) dasselbe Bedenken, welches der unterzeichnete Referent bereits in dem angeführten Bericht am Schlusse geäussert hatte, dass nämlich der Unterschied zwischen positiv und negativ gekrümmten Flächen, der auch für jeden Nichtmathematiker evident ist, in diesem Werte gar nicht zum Ausdruck kommt. A.

R. Mehmke. Ueber zwei, die Krümmung von Curven und das Gauss'sche Krümmungsmass von Flächen betreffende charakteristische Eigenschaften der linearen Punkttransformationen. Schlömilch Z. XXXVI. 206-213.

Der erste Satz, um welchen es sich handelt, ist vom Verfasser bereits ohne Beweis in Böklen Mitt. IV. 38 (vergl. das Referat unten S. 799) veröffentlicht. Er lautet: Es berühren sich mehrere Curven in demselben Punkte, und es ist auf der Hauptnormale eine Strecke abgetragen, deren Länge der Krümmung proportional ist, die sogenannte Krümmungsstrecke. Wird das Gebilde einer beliebigen Punkttransformation unterworfen, so bilden die Endpunkte der Krümmungsstrecken der ursprünglichen und der transformirten Curven zwei affine Punktsysteme. Beiläufig ergiebt sich hierbei auch der Satz: Wird eine Curve C in einem Punkte mit der Krümmung Null von zwei Curven berührt, welche gemeinschaftliche Schmiegungsebenen besitzen, so bleibt bei einer Transformation, bei welcher die transformirte Curve die Krümmung Null behält, das Verhältnis der Krümmungen der beiden anderen Curven ungeändert.

Der andere Satz bezieht sich auf Flächen und lautet: Wird eine Fläche F, die einen „ebenen" Punkt x (d. h. mit der Krümmung Null) hat, so transformirt, dass der Punkt eben bleibt, so wird das Verhältnis der Krümmungsmasse irgend zweier Flächen, die F in x berühren, bei der Transformation nicht geändert.

Die Beweisführung ist insofern interessant, als sie mit Hülfe der Grassmann'schen Ausdehnungslehre geschieht und sich ohne weiteres auch auf mehrdimensionale Räume erstreckt. Man vergleiche in Betreff der Transformation die Arbeit des Herrn Voss: „Zur Theorie der Krümmung der Flächen", Referat oben S. 793. A.

R. Mehmke. Einige Sätze über die räumliche Collineation und Affinität, welche sich auf die Krümmung von Curven und Flächen beziehen. Schlömilch Z. XXXVI. 56 - 60.

Der Satz von Gauss, nach welchem das Krümmungsmass einer Fläche bei deren Biegung sich gleich bleibt, ist nur einer unter vielen, welche sich über die Unveränderlichkeit gewisser bestimmenden Grössen für Flächen und Curven bei deren Variation aufstellen lassen. Der Verfasser zieht 25 Fälle ans Licht, wo Grössen, die mit Krümmungen in Zusammenhang stehen, bei projectiver und affiner Transformation unveränderlich sind. Die einfachsten sind folgende. Die Bedingung des Gauss'schen Satzes ist projective Transformation der Fläche. Berühren zwei Flächen eine Ebene in zwei verschiedenen Punkten, so ist allen affinen Transformationen gegenüber das Verhältnis ihrer Krümmungsmasse unveränderlich. Haben zwei Curven einen Punkt und in diesem die Schmiegungsebene gemein, so wird bei keiner projectiven Transformation der Curven das Verhältnis ihrer Torsionen geändert. Bei affiner Transformation können die Osculationspunkte auch verschieden sein. H.

R. Mehmke. Krümmungseigenschaften der räumlichen Inversion. Böklen Mitt. IV. 36-43.

In weiterem Verfolg des im vorigen Bericht dargelegten Gedankens findet der Verfasser mehrere Sätze über die Unveränderlichkeit gewisser mit der Krümmung der Curven und Flächen in Zusammenhang stehenden Grössen bei Transformation durch reciproke Radien. Voraus gehen einige neue Relationen solcher Grössen bezüglich auf die inversen Curven und Flächen. H.

H. Ruoss. Die metrischen Beziehungen der Krümmung reciproker Flächen und Curven, sowie der Flächeninhalte der letzteren. Böklen Mitt. IV. 46-69, 73-92; Diss. Erlangen.

Unter den zahlreichen Ergebnissen der hier mitgeteilten Untersuchungen hebt der Verfasser folgende als besonders bemerkenswert hervor: „Das Product der Torsionen in einem Punkt einer Raumcurve und dem entsprechenden der Rückkehrkante

ihrer reciproken Developpabeln ist gleich dem Quadrat des Sinus ihrer Polhöhe.“ „Das Product der Flächenkrümmungen in entsprechenden Punkten einer Fläche und ihrer Reciprocalfläche ist gleich der vierten Potenz des Sinus ihrer Polhöhe.“ „Die Differenz der Flächeninhalte der Fusspunktscurve einer gegebenen, im Endlichen geschlossenen Curve und der Fusspunktscurve ihrer Evolute ist constant für jeden beliebigen Pol, und zwar gleich dem Inhalt der gegebenen Curve.“ Der erste Artikel bezieht sich auf die Ebene, der zweite auf den Raum. H.

Sir William Thomson. On a theorem in plane kinetic trigonometry, suggested by Gauss's theorem of curvatura integra. Phil. Mag. (5) XXXII. 471-473.

Folgendes ist der betreffende Satz: Sind *LABM*, *NBCQ*, *RCAS* drei Wege eines Massenpunktes, der sich unter der Einwirkung einer Kraft $\left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ frei in einer Ebene bewegt, uud der von irgend drei Orten aus nach einer beliebigen Richtung in der Ebene mit solchen Geschwindigkeiten geschleudert wird, dass die Summe der kinetischen und potentiellen Energie in jedem einzelnen Falle denselben Wert E hat, so übertrifft die Summe der drei Winkel A, B, C die Grösse π um einen Betrag, der gleich dem Oberflächenintegral von $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\log\sqrt{E-V}$ ist, erstreckt über den Flächenraum *ABC*. [In Bezug auf den Ausdruck „kinetische Trigonometrie“ vergleiche man Thomson und Tait, „Natural Philosophy“, §§ 361 a), b), c), d).] Gbs. (Lp.)

P. Adam. Sur le lieu des centres de courbure d'une courbe gauche et sur les courbes gauches à courbure constante. Nouv. Ann. (3) X. 142-152.

Es wird zuerst der Satz bewiesen: Der Ort σ des Krümmungsmittelpunktes O' einer Curve C (Ort des Punktes M) berührt (in

O') den Kreis, welcher um den Radius $OM (= R_1)$ der osculirenden Kugel als Durchmesser in der Normalebene beschrieben ist. Dann folgt noch weiter die Formel:

$$\frac{d\sigma}{R_1} = \frac{ds}{T} \ (= d\varphi),$$

wo T den Torsionsradius (mithin φ den Torsionswinkel) bezeichnet. Alles Fernere beruht auf Irrtum. Es wird das Lot MN auf MO in der Normalebene betrachtet und ohne Begründung behauptet, dass MN eine Enveloppe zuliesse. Bedingung dafür würde sein

$$R + \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} = 0,$$

wo R Krümmungsradius von C, eine Gleichung, die ausdrückt, dass O fest ist. Ausserdem wird, mit Berufung auf eine bekannte Formel, $\varphi =$ Winkel NMO' gesetzt, worin sich eine Verwechselung der Einhüllenden der Krümmungsaxe mit der Evolute verrät. Diese zwei irrigen Aufstellungen liegen aber allem, was folgt, zu Grunde. H.

W. P. Ermakow. Geodätische Linien. Mosk. Math. Samml. XV. 576-580. (Russisch, 1891.)

Referat F. d. M. XXII. 1890. 760.

P. G. Ssuslow. Ueber die Krümmung der Flächen. VIII. Vers. Russ. Naturf. u. Aerzte. (Russisch, 1890.)

Einfachere Darstellung der von Thomson und Tait herrührenden, von der gewöhnlichen etwas abweichenden Theorie der Krümmung der Flächen und einige daraus folgende Sätze.

Si.

L. Bianchi. Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane. Annali di Mat. (2) XIX. 177-199.

Die Aufgabe, ein dreifaches Orthogonalsystem zu bestimmen, welches eine Schar von Flächen mit einem System ebener Krüm-

mungslinien enthält, lässt sich zurückführen auf die bekannte Bestimmung der cyklischen Systeme, und es genügen, um eines dieser Systeme zu bestimmen, folgende charakteristischen Elemente:

1) Eine Fläche Σ_0, welche orthogonal zu den ebenen Curven C ist, 2) eine dieser ebenen Curven C_0, 3) die Krümmungskreise der Curven C in ihren Durchschnittspunkten mit Σ_0. Sind diese Elemente gegeben, und bilden die gegebenen Kreise ein Normalensystem, d. h. lassen sie eine Reihe von orthogonalen Flächen zu, so existirt das entsprechende dreifach-orthogonale System und kann durch Quadraturen bestimmt werden. Jede Fläche, welche ein System ebener Krümmungslinien besitzt, gehört einem derartigen dreifachen Orthogonalsystem an.

Zwei specielle Fälle sind besonders ausgezeichnet. Der erste tritt ein, wenn für alle Flächen Σ_1 der einen der beiden Scharen, welche die ebenen Krümmungslinien C haben, der Winkel, unter dem sie von den Ebenen dieser Curven geschnitten werden, constant ist. Die Bestimmung dieser speciellen Systeme lässt sich zurückführen auf die infinitesimale Deformation der Flächen mit constanter Krümmung.

Der zweite Fall ist der, dass für jede einzelne Fläche Σ_1 jener Winkel constant ist, aber von einer Fläche zur anderen variirt. Die Bestimmung dieser allgemeineren Systeme lässt sich zurückführen auf die infinitesimale Deformation der Flächen, welche ein System von asymptotischen Linien mit constanter Torsion haben.

In diesen beiden Fällen genügen Quadraturen, um beliebig viele dreifache Orthogonalsysteme der entsprechenden Art zu erhalten. A.

L. Bianchi. Sulle superficie le cui sezioni, fatte con un sistema di piani paralleli, tagliano le linee di curvatura sotto angolo costante. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII, 4 - 13.

Die Flächen Φ, deren Schnitte mit einem Systeme paralleler Ebenen die Krümmungslinien unter constantem Winkel schneiden,

gehören einer Klasse an, welche der Verfasser bereits früher untersucht hat (u. a. Annali di Mat. (2) XVIII. 301, F. d. M. XXII. 1890. 766). Sie bilden aber einen Ausnahmefall, dessen directe Untersuchung vorzuziehen ist. Die Bestimmung dieser Flächen kommt auf die Integration einer Gleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} + \varrho = 0,$$

welche bekannt ist, zurück, und aus jeder Lösung derselben ergiebt sich eine Fläche Φ durch Quadraturen. Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Flächen Φ ist, dass sie in Reihen geordnet werden können, welche einem dreifachen Orthogonalsystem angehören. In dieser Hinsicht bildet die vorliegende Arbeit eine Ergänzung zu dem im vorangehenden Referate besprochenen Aufsatze des Verfassers. Die Flächen Φ stehen ferner in einem wichtigen Zusammenhange mit einem Doppelsystem ebener Curven, durch welche die Ebene in unendlich viele flächengleiche Parallelogramme zerlegt wird. A.

A. Petot. Sur certains systèmes de coordonnées sphériques et sur les systèmes triples orthogonaux correspondants. C. R. CXII. 1426-1429.

Es wird gezeigt, dass die Bestimmung der Flächen Σ, welche eine Lamé'sche Familie bilden, wenn man sie einer geeigneten geradlinigen Translation unterwirft, sich auf die der orthogonalen sphärischen Systeme reducirt, für welche die Differentialparameter q^2, p^2 des Linienelements der Kugel die Relation

$$\frac{\partial q^2}{\partial v} = \frac{\partial p^2}{\partial u}$$

verificiren. Legt man nämlich durch jeden Punkt M von Σ normal zu der Geraden, welche die zwei geodätischen Krümmungsmittelpunkte der zwei Krümmungslinien in M verbindet, eine Ebene, so bleibt diese einer festen Geraden parallel. Diese Gerade ist es eben, in deren Richtung die oben genannte Translation stattfinden muss, um eine Lamé'sche Familie zu erzeugen. Daraus folgt unmittelbar der Satz: Ist eine Fläche eine solche Σ für drei ge-

radlinige, nicht einer und derselben Ebene parallele Translationen, so kann sie nur eine Ebene oder eine Kugel sein; sind hingegen die Translationen parallel einer Ebene, so hat man, um alle entsprechenden Σ zu erhalten, zu Ebene und Kugel noch alle zu dieser Ebene normalen Cylinder hinzuzufügen. H.

DE SALVERT. **Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme.** Brux. S. sc. XV B. 201-394.

Fortsetzung der in F. d. M. XXI. 1889. 756 und XXII. 1890. 768 besprochenen Arbeit. Im V. Cap. erledigt Hr. de Salvert die Lösung der Aufgabe, die er sich gesteckt hatte, nämlich ausser in den Ausnahmefällen (die vorher behandelt sind) die rechtwinkligen Coordinaten als Function der krummlinigen Coordinaten durch die Bedingungen zu bestimmen, gleichzeitig sechs nicht linearen partiellen Differentialgleichungen zu genügen. Zuerst lehrt er zwei, so zu sagen, zu einander inverse Methoden, welche zum gesuchten Resultate führen; dann skizzirt er eingehender die erste dieser beiden Methoden, indem er mit der grössten Sorgfalt nachweist, wie alle Teile logisch in einander greifen. Darauf ermittelt er 1) das System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen in dem allgemeinsten Falle des orthogonalen Systems jede der drei krummlinigen Coordinaten einzeln genügt; 2) für den allgemeinsten Fall des orthogonalen Systems die simultanen totalen Differentialgleichungen zwischen den drei ersten Ableitungen einer und derselben rechtwinkligen Coordinate. Nunmehr integrirt er dieselben, bestimmt die willkürlichen überschiessenden Constanten durch die nachträgliche Verification der vorgelegten Gleichungen erster Ordnung, bildet endlich die endgültige Lösung und giebt die geometrische Definition der das orthogonale System bildenden Oberflächen. Zuletzt schliesst er mit einer eingehenden Prüfung des Verfahrens, welches zu demselben Ergebnisse geführt hat. Diese ganzen Untersuchungen zeigen, dass Lamé in Wahrheit nicht bewiesen hat, dass er die Frage vollständig gelöst habe;

das so zu sagen divinatorische Verfahren, welches ihn zu der vollständigen Lösung geführt hat, ist von dem Gesichtspunkte der strengen Logik her nicht ausreichend.

In dem auf das Capitel V folgenden Anhange vervollständigt es Hr. de Salvert in drei ziemlich umfangreichen Noten. In der ersten findet er „systematisch" das allgemeinste orthogonale System unter der Annahme, dass es unter seinen drei Familien den allgemeinsten Typus der isothermen Familien zweiter Ordnung begreife. Durch die Verbindung der Ergebnisse dieser Note mit einem Teile derer aus dem V. Capitel gelangt er abermals zur vollständigen Lösung des Problems, welches er sich gestellt hatte.

Die zweite Note enthält die zweite Bestimmungsart der das System in dem allgemeinsten Falle ausmachenden Familien. Die dritte Note endlich bringt die folgerichtige Anwendung und den Vergleich der beiden dargelegten Methoden (vorangehende Note und Cap. V) auf den besonderen, dem sphärischen System entsprechenden Fall.

Die zuweilen etwas lange Darstellung des Hrn. de Salvert ist dafür auch immer sehr klar, und die Rechnungen sind mit der grössten Eleganz durchgeführt. Mn. (Lp.)

K. Zorawski. Ueber Deformation der Flächen. Krakau Abh. (2) I. 225-291. (Polnisch, 1891.)

Die Abhandlung enthält eine Anwendung der Lie'schen Transformationstheorie auf die von Lie selbst in den Math. Annalen XXIV (über Differentialinvarianten, S. 574-775, vergl. F. d. M. XVI. 1884. 91) angeregte Frage: Bringt man das Bogenelement einer Fläche auf die Form

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdx\,dy + Gdy^2,$$

und führt man neue Variabeln

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y)$$

in, so erhält das Bogenelement die neue Form

$$ds^2 = E_1dx_1^2 + 2F_1dx_1dy_1 + G_1dy_1^2;$$

dabei werden E_1, F_1 und G_1 als Functionen von E, F, G, x, y

durch gewisse Relationen bestimmt, die, mit $x_1 = X$, $y_1 = Y$ vereinigt, eine unendliche Gruppe bilden. Die Differentialinvarianten dieser Gruppe, welche bei jeder Biegung der Fläche ihren ursprünglichen Wert behalten, nennt der Verfasser Biegungsinvarianten. Dieselbe Benennung wurde von Herrn Weingarten in der Abhandlung: „Ueber die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von constantem Krümmungsmass" (J. für Math. XCIV, F. d. M. XV. 1883. 637) in einer speciellen Bedeutung eingeführt. Zu den Biegungsinvarianten gehören z. B.: das Gauss'sche Krümmungsmass, die Beltrami'schen Parameter und Minding's geodätische Krümmung. Die Abzählung der Biegungsinvarianten verschiedener Ordnungen bildet den Hauptinhalt dieser Arbeit.

Es werden zuerst (Abschnitt I) Hauptsätze der Lie'schen Transformationstheorie mitgeteilt, dann (Abschnitt II) einige allgemeine, für die zu behandelnde Frage wichtigen Theoreme aufgestellt, so z. B. die Aufgabe gelöst: „Aus den gegebenen Incrementen

$$dx = \xi(x, y)\delta t, \quad dy = \eta(x, y)\delta t$$

der Veränderlichen x und y und aus dem Incremente einer gewissen Function $\psi(x, y)$ die Incremente aller ihrer Differentialquotienten nach x und y zu bestimmen." Wir heben noch die folgenden Theoreme hervor:

Theorem I. „Besitzt die allgemeine infinitesimale Transformation einer unendlichen continuirlichen Gruppe in den Veränderlichen $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ die Form

$$Zf = \sum_1^{p+r} \zeta_k(x_1, \dots, x_n) Z_k f,$$

wo

$$Z_k f = \sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \dots, p),$$

$$Z_l f = \sum_1^m {}^i \eta_{li}(y_1, \dots, y_m) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (l = p+1, \dots, p+r)$$

gegebene Ausdrücke sind und die ζ_k ganz willkürliche Functionen, so bilden die infinitesimalen Transformationen

$$Z_{p+1} f, \quad Z_{p+2} f, \quad \dots, \quad Z_{p+r} f$$

eine endliche Gruppe."

Theorem IV. „Sind die Gleichungen

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

von einander unabhängig, dann sind es auch die Gleichungen

$$Z_k f = X_k f + \sum_1^m {}_\mu\, \zeta_{k\mu}(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_\mu} = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, q),$$

wo $\zeta_{k\mu}$ ganz willkürliche Functionen ihrer Argumente bezeichnen."

Theorem V. „Sind die Gleichungen

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

von einander unabhängig, so sind die Gleichungen

$$Z_k f = X_k f + \sum_1^m {}_\mu\, \xi_{k\mu}(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_\mu} = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, q),$$

$$Z_l f = \sum_1^m {}_\nu\, \xi_{l\nu}(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_\nu} = 0$$

$$(l = q+1, \ldots, q+\varrho)$$

($\xi_{k\mu}$ und $\xi_{l\nu}$ sind ganz willkürliche Functionen) dann, und nur dann, von einander abhängig, wenn die Gleichungen

$$Z_l f = 0 \qquad (l = q+1, \ldots, q+\varrho)$$

von einander unabhängig sind."

Es wird dann (Abschnitt III) die eigentliche Aufgabe der Arbeit formulirt und auf die Berechnung der Differentialinvarianten der oben genannten unendlichen Gruppe zurückgeführt. Die allgemeinste infinitesimale Transformation dieser Gruppe lautet

$$Gf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} - 2(E\xi_{10} + F\eta_{10}) \frac{\partial f}{\partial E}$$

$$- (F\xi_{10} + E\xi_{01} + G\eta_{10} + F\eta_{01}) \frac{\partial f}{\partial F} - 2(F\xi_{01} + G\eta_{01}) \frac{\partial f}{\partial G}.$$

(Die $\xi_{10}, \eta_{10}, \ldots$ bedeuten hier die partiellen Differentialquotienten der Functionen ξ, η der Bezeichnung $\frac{\partial^{i+k} \Phi(x, y)}{\partial x^i \partial y^k} = \Phi_{ik}$ gemäss.)

Die unendliche Gruppe kann aber auf verschiedene Weisen erweitert werden. Erweitert man sie in Bezug auf die Differentialquotienten von E, F, G nach x und y, so gelangt man zu der „Gauss'schen n^{ten} erweiterten Gruppe“:

$$G^{(n)}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\sum_0^n{}_i\sum_0^{n-i}{}_k\left(\frac{\delta E_{ik}}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial E_{ik}}+\frac{\delta F_{ik}}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial F_{ik}}+\frac{\delta G_{ik}}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial G_{ik}}\right).$$

Erweitert man sie in Bezug auf die Differentialquotienten der willkürlichen Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$ der Veränderlichen x und y, so bekommt man die „Beltramische n^{te} erweiterte Gruppe“

$$B^{(n)}f = G^{(n-1)}f+\sum_1^m{}_s\sum_0^n{}_i\sum_0^{n-i}{}_k\frac{\delta\varphi^s_{ik}}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial\varphi^s_{ik}}.$$

Erweitert man sie noch in Bezug auf die Differentialquotienten von y nach x, wenn y als Function von x betrachtet wird, so erhält man die „Minding'sche n^{te} erweiterte Gruppe“

$$M^{(n)}f = G^{(n-1)}f+\sum_1^n{}_l\frac{\delta y^{(l)}}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial y^{(l)}}.$$

Endlich wird die Gruppe

$$A^{(n)}f = G^{(n-1)}f+\sum_1^m{}_s\sum_0^n{}_i\sum_0^{n-1}{}_k\frac{\delta\varphi^s_{ik}}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial\varphi^s_{ik}}+\sum_1^n{}_l\frac{\delta y^{(l)}}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial y^{(l)}}$$

„allgemeine n^{te} erweiterte Gruppe“ genannt.

Das Problem für die erweiterte Gauss'sche Gruppe wird also auf die Bestimmung derjenigen Functionen f zurückgeführt, für welche

$$G^{(n)}f = 0;$$

da aber ξ und η ganz willkürlich sind, so muss man, um die Differentialgleichungen zu erhalten, deren Lösungen die Biegungsinvarianten sind, die Coefficienten aller Functionen ξ, η, $\xi_{\mu,\nu}$, $\eta_{\mu,\nu}$ gleich Null setzen. Dasselbe gilt auch für die anderen erweiterten Gruppen.

Es wird dann (Abschnitt IV) die Anzahl der Gauss'schen Biegungsinvarianten bestimmt; dieselben ergeben sich als Lösungen gewisser Systeme linearer homogener partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer abhängigen Veränderlichen. Es zeigt sich dann, dass es keine Gauss'schen Biegungsinvarianten erster und zweiter Ordnung giebt; die Anzahl der

Gauss'schen Biegungsinvarianten dritter Ordnung ist gleich 1, die der vierter Ordnung gleich 1, und allgemein die der n^{ten} Ordnung ($n > 4$) gleich $n-2$.

Eine analoge Untersuchung führt den Verfasser zur Bestimmung der Anzahl der übrigen Biegungsinvarianten. Die Anzahl der Beltrami'schen Biegungsinvarianten von der ersten bis zur n^{ten} Ordnung ($n > 3$) ist gleich $\frac{n(n+3).m}{2}$, die der Minding'schen ist 1 für $n = 2$, 1 für $n = 3$, 2 für $n = 4$ und gleich 1 für $n > 4$. Die Resultate stellt der Verfasser in folgender Tabelle zusammen:

Ordnung	Anzahl der Biegungsinvarianten: Gauss'sche	Beltrami'sche	Minding'sche	Sämtliche
1	0	m	0	m
2	0	$3m$	1	$3m+1$
3	1	$4m$	1	$4m+2$
4	1	$6m$	2	$6m+3$
5	3	$6m$	1	$6m+4$
6	4	$7m$	1	$7m+5$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	$n-2$	$(n+1)m$	1	$(n+1)m+n-1$
Summe bis zur n^{ten} Ordnung inclusive	$\frac{1}{2}n(n-3)$	$\frac{1}{2}n(n+3)m$	n	$\frac{1}{2}n(n+3)m + \frac{1}{2}n(n-1)$

Im letzten (VI.) Abschnitte giebt der Verfasser eine allgemeine Methode zur Berechnung der Biegungsinvarianten und wendet sie auf die Bestimmung einiger Biegungsinvarianten niedrigster Ordnungen an, nämlich des Gauss'schen Krümmungsmasses, der Beltrami'schen Differentialparameter erster und zweiter Ordnung und der Minding'schen geodätischen Krümmung. Diese Methode des Verfassers beruht auf einigen allgemeinen Sätzen, welche die Anwendung der Jacobi'schen Methode auf die Integration allgemeiner vollständiger Systeme von Differentialgleichungen ermöglichen. Ueber diese Erweiterung der Jacobi'schen Methode hat der Verfasser im III. Bande der „Prace

matematyczno-fisyczne" einen Aufsatz erscheinen lassen, über welchen wir im nächsten Jahrgange des Jahrbuches referiren werden. Dn.

J. Weingarten. Sur la théorie des surfaces applicables. (Extrait d'une lettre à M. Darboux). C. R. CXII. 607-610.

J. Weingarten. Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. C. R. CXII. 706-707.

E. Goursat. Sur la théorie des surfaces applicables. C. R. CXII. 707-710.

1) Der erste Brief betrifft Flächen, deren Linienelement durch die Gleichung

$$ds^2 = du^2 + (u+\alpha v)dv^2$$

gegeben ist. Führt man als Parameter ein das halbe Quadrat des Abstandes des Punktes von O und die Länge des von O auf die Tangentialebene gefällten Lotes, setzt man also

$$q = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2), \quad p = xc+yc'+zc'',$$

so ergeben sich $\frac{\partial x}{\partial p} = -\varrho\varrho'\frac{\partial c}{\partial q}$, $\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial c}{\partial p} + (\varrho+\varrho')\frac{\partial c}{\partial q}$ und analoge Gleichungen, wo ϱ und ϱ' die Hauptkrümmungsradien bedeuten. Genügt diese Fläche der Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + (\varrho+\varrho')\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} + \varrho\varrho'\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0,$$

wo φ eine gegebene Function von p und q bedeutet, so sind die Ausdrücke

$$xd\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right) + cd\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) = d\xi$$

und die analogen vollständige Differentiale. Alle diese Flächen sind auf einander abwickelbar. Durch Anwendung auf die Function

$$\varphi = pq - \tfrac{1}{2}p^2\beta - \tfrac{1}{6}p^3$$

ergiebt sich eine auch von Herrn Darboux betrachtete Fläche. Hieran schliessen sich einige weitere Bemerkungen.

2) In der zweiten Note wird allgemeiner gesetzt

$$\varphi = pq + P,$$

wo P Function von p allein ist, und es wird untersucht, wann die betreffenden Flächen Liouville'sche werden. Man kommt so zu einer neuen Klasse auf einander abwickelbarer Liouville'scher Flächen, für welche

$$ds^2 = (\alpha-\beta)\left[\frac{d\alpha^2}{\alpha^2}(\alpha-2)-\frac{d\beta^2}{\beta^2}(\beta-2)\right]$$

ist; zu denselben gehören als Grenzfälle die früher von Herrn Weingarten gefundenen Flächen, für welche

$$ds^2 = (\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}})(d\alpha^2+d\beta^2).$$

3) Herr Goursat giebt auch eine Erweiterung des in dem ersten Briefe angedeuteten Weingarten'schen Theorems, indem er setzt

$$\varphi = pq-\tfrac{1}{2}p^2\beta-\tfrac{1}{3}\alpha p^3.$$

Es ergiebt sich dann das Resultat, dass auf unendlich viele Arten die Constante k so bestimmbar ist, dass man die Flächen, für welche

$$ds^2 = du^2+(u+kv^2+lv)dv^2$$

ist, durch Quadraturen bestimmen kann; die geodätischen Linien dieser Flächen lassen sich einfach darstellen. A.

E. Goursat. Sur le théorème de M. Weingarten et sur la théorie de surfaces applicables. Toulouse Ann. V. E. 1-34.

Der Satz des Herrn Weingarten, durch welchen die Bestimmung der auf eine gegebene Fläche abwickelbaren Fläche auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung von einfacher Form zurückgeführt wird, ist in dem vorhergehenden Referat besprochen. Herr Goursat giebt in dem ersten Teile der vorliegenden Arbeit einen ausführlichen Beweis dieses Satzes. In dem folgenden Teile werden Anwendungen auf Flächen gemacht, für welche

$$ds^2 = du^2+2(u+\Phi(v))dv^2$$

ist, und specieller auf solche, für welche $\Phi(v) = 0$ ist, wobei sich viele interessante Resultate ergeben. A.

E. Goursat. Sur un problème relatif à la déformation des surfaces. American J. XIV. 1-8.

Es ist bekannt, dass sich sowohl die Umdrehungsflächen, als auch allgemeiner die Gesimsflächen (moulures) so biegen lassen, dass sie in Flächen derselben Art übergehen, und dass dabei die Krümmungslinien einander entsprechen, deren eines System, nämlich die Parallelkreise bezw. Trajectorien, in parallelen Ebenen liegen.

Der Verfasser stellt sich nun die allgemeine Frage: Welche Flächen S kann man so biegen, dass ein System ebener paralleler Schnittlinien in ein ebensolches System übergeht? Es ist bekannt, dass, wenn man x und y als Parameter wählt, jede der drei Coordinaten der gebogenen Fläche S' die partielle Differentialgleichung erfüllen muss:

$$(s^2-rt)(P^2+Q^2-1)+(S^2-RT)(p^2+q^2+1) \\ +(rT-2sS+tR)(Pp+Qq)=0.$$

[Diese Formel enthält in der Abhandlung mehrere Druckfehler]. In ihr sind $p, q, r, s, t, P, Q, R, S, T$ die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von z und von X, Y oder Z. Sollen nun die Schnitte senkrecht zur x-Axe in der gebogenen Fläche wieder in parallele Schnitte übergehen, so kann man setzen X Function von x allein; dann kommt man auf die Bedingung, dass

$$s^2-rt = tpF(x)$$

sein muss, wo $F(x)$ eine willkürliche Function von x bedeutet. Diese Gleichung lässt sich durch die Methode von Monge und Ampère integriren. Es ergiebt sich, dass die Flächen S, welche eine Biegung der verlangten Art gestatten, durch folgende Eigenschaft charakterisirt sind:

Es seien in der Ebene der yz zwei beliebige Curven C und C' gegeben, und M und M' seien zwei Punkte derselben mit parallelen Tangenten. Man verbinde diese beiden Punkte und teile die Verbindungslinie nach einem Verhältnis k durch den Punkt M_k. Der Ort von M_k ist eine Curve C_k; bei variirendem k erhält

man ein ganzes System solcher Curven. Man verschiebe nun jede Curve C_k parallel zur x-Axe um die Strecke x, wo x eine willkürliche Function von k ist. Die so verschobenen Curven bilden die Schnitte einer Fläche S.

Die Aufsuchung der Flächen S' ist dann durch Quadraturen möglich. Wählt man für C und C' concentrische Kreise, so sind S und S' Umdrehungsflächen. Sind C und C' irgend zwei Parallelcurven, so sind die Flächen S und S' Gesimsflächen. Ist C' aus C durch Translation entstanden, so sind auch S und S' Translationsflächen. Sind C und C' ähnlich und ähnlich liegend, so sind es auch die Curven C_k; sind es ähnlich und ähnlich liegende Kegelschnitte, so kann man das Verschiebungsgesetz so wählen, dass S eine beliebige Fläche zweiter Ordnung wird. So entsteht eine Reihe specieller Fälle, in denen sich auch die Flächen S' verhältnismässig einfach ausdrücken lassen.

Bei dem Interesse, welches dieses Biegungsproblem verdient, möge dem Referenten der Hinweis gestattet sein, dass man die Curven C_k auch auffassen kann als Parallelschnitte einer beliebigen abwickelbaren Fläche. Um also die Fläche S zu erhalten, braucht man nur ein beliebiges System paralleler Schnitte einer beliebigen abwickelbaren Fläche nach einem beliebigen Gesetze lotrecht zu ihren Ebenen zu verschieben. Ist z. B. $x = f(y, z)$ die Gleichung einer beliebigen abwickelbaren Fläche, so ist $\varphi(x) = f(y, z)$ die Gleichung einer Fläche S. A.

E. Padova. Di alcune classi di superficie suscettibili di deformazioni infinitesime speciali. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 821-829.

Der Verfasser betrachtet eine Fläche, welche durch unendlich kleine Biegungen so deformirt wird, dass die von den einzelnen Punkten beschriebenen Wege bestimmte Eigenschaften haben, und stellt sich die Aufgabe, hieraus die Fläche zu bestimmen. Er löst dies Problem in zwei Fällen:

1) dass die Projectionen aller Wege auf die betreffenden Flächennormalen einander gleich sind,

2) dass die Wege gleich geneigt zu den betreffenden Flächennormalen sind.

Im ersteren Falle ergiebt sich u. a. der Satz, dass die Flächen mit constantem negativen Krümmungsmass ∞^2 solcher Biegungen gestatten.

Im zweiten Falle ergiebt sich: Es lassen sich der Bedingung entsprechend auf ∞^1-fache Art solche Flächen biegen, bei welchen die Linien constanter Krümmung geodätische Parallelen sind, welche auf Umdrehungsflächen abwickelbar sind, und für welche die Normalkrümmung jener geodätischen Parallelen Null ist.

A.

B. Mlodzieiowski. Sur la déformation des surfaces. Darboux Bull. (2) XV. 97-101.

Im Journal der math. Gesellschaft zu Moskau hat Herr Peterson im Jahre 1866 die Biegung von zwei Klassen von Flächen besprochen, deren Gleichungen sind:

$$(1) \qquad x = a(u)\alpha(v), \qquad y = a(u)\beta(v), \qquad z = b(u);$$
$$(2) \qquad x = a(u)+\alpha(v), \qquad y = \beta(v), \qquad z = b(u).$$

Diese letzteren sind Translationsflächen.

Jede Fläche zweiter Ordnung gehört zur ersten Klasse, das Paraboloid ausserdem auch zur zweiten. Man erhält also durch die Peterson'schen Formeln unendlich viele Flächen, welche abwickelbar sind auf Flächen zweiter Ordnung. Diese Formeln sind allgemein 1) für die Flächen:

$$(3) \quad \begin{cases} x = a\sqrt{\alpha^2+\beta^2+h-1}\cos J, \quad y = a\sqrt{\alpha^2+\beta^2-h-1}\sin J, \\ z = \int_{u_0}^{u} \sqrt{b'^2-(h-1)a'^2}\,du, \\ \text{wo} \\ \qquad J = \int_{v_0}^{v} \frac{\sqrt{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2+(h-1)(\alpha'^2+\beta'^2)}}{\alpha^2+\beta^2+h-1}\,dv, \end{cases}$$

und h eine willkürliche Constante ist; 2) für die Flächen:

$$(4)\quad \begin{cases} x = ah + \frac{\alpha}{h}, \quad y = \int_{v_0}^{v} \sqrt{\beta'^2 - \left(\frac{1}{h^2} - 1\right)\alpha'^2}\, dv, \\ z = \int_{u_0}^{u} \sqrt{b'^2 - (h^2-1)a'^2}\, du. \end{cases}$$

Auf den Flächen (3) gehen die Ebenen der Linien $v = \text{const.}$ durch die z-Axe, auf den Flächen (4) sind sie parallel der xz-Ebene. Die Ebenen der Linien $u = \text{const.}$ sind für beide Flächenarten parallel der xy-Ebene. Die Abbildungen besitzen folgende Eigenschaften:

Bezieht man die Flächen (3) auf cylindrische Coordinaten, so erkennt man, dass die Linien $v = \text{const.}$ aus einer einzigen entstehen, indem die Entfernungen von der z-Axe im Verhältnis $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+h-1} : 1$ gestreckt werden. Bei der Biegung deformiren sie sich nach demselben Gesetze wie die Meridiane einer Umdrehungsfläche.

Ferner gehen die Flächen (3) in die Flächen (4) über, wenn die z-Axe ins Unendliche rückt.

Zum Schluss giebt der Verfasser noch eine allgemeinere Klasse von Flächen an, auf welche die Peterson'sche Biegung sich anwenden lässt: sie sind

$$(8)\quad \begin{cases} x = a\varrho\cos\varphi + \int_{v_0}^{v} \gamma \cdot \frac{d(\varrho\cos\varphi)}{dv}\, dv, \\ y = a\varrho\sin\varphi + \int_{v_0}^{v} \frac{d(\varrho\sin\varphi)}{dv}\, dv, \quad z = b, \end{cases}$$

wo a und b Functionen von u sind, ϱ, φ und γ dagegen von v. Die gebogenen Flächen sind hieraus zu bilden, indem man ϱ, φ und b durch ϱ_1, φ_1 und b_1 ersetzt, wo

$$(9)\quad \begin{cases} \varrho_1 = \sqrt{\varrho^2+h-1}, \quad \varphi_1 = \int_{v_0}^{v} \frac{\sqrt{\varrho^4\varphi'^2 + (h-1)(\varrho'^2+\varrho^2\varphi'^2)}}{\varrho^2+h-1}\, dv, \\ b_1 = \int_{u_0}^{u} \sqrt{b'^2-(h-1)a'^2}\, du. \end{cases}$$

Für $\varrho = \text{const.}$ werden diese Flächen Gesimsflächen, für $\gamma = 0$ entstehen die oben betrachteten Flächen (3). A.

A. Ribaucour. Sur les systèmes cycliques. C. R. CXIII. 304-307, 324-326.

Der Verfasser hatte im Februar 1890 der Pariser Akademie eine Mitteilung über Congruenzen von Kreisen gemacht, welche orthogonal zu Flächen stehen und von ihm cyklische Systeme genannt worden waren. Inzwischen haben sich andere Mathematiker mit diesen Congruenzen beschäftigt, so z. B. Herr Bianchi in mehreren Arbeiten (F. d. M. XXII. 1890. 766). Dies giebt Herrn Ribaucour Veranlassung, auf den Gegenstand zurückzukommen und seine früheren Mitteilungen in einigen Punkten zu vervollständigen. In der ersten Note wird die Theorie der cyklischen Systeme entwickelt; die zweite Note zeigt den Zusammenhang, in welchem die cyklischen Systeme mit einem kinematischen Problem stehen, nämlich mit dem der Bewegung eines Körpers, der vier Bedingungen unterworfen ist, und zwar in dem speciellen Falle, dass die Schönemann-Mannheim'schen Geraden sich immer schneiden. A.

E. Cosserat. Sur les systèmes conjugués et sur la déformation des surfaces. C. R. CXIII. 460-463.

E. Cosserat. Ses les systèmes cycliques et sur la déformation des surfaces. C. R. CXIII. 498-500.

Der Verfasser entwickelt in der ersten Note mehrere von den Herren Ribaucour, Darboux und Bianchi aufgefundene Sätze über cyklische Systeme und ihren Zusammenhang mit dem Biegungsproblem, indem er die Betrachtung der Congruenzen von Geraden anknüpft an die sphärischen Abbildungen ihrer abwickelbaren Flächen. Den Satz von Herrn Ribaucour, nach welchem auf zwei auf einander abwickelbaren Flächen stets ein System von conjugirten Linien der einen einem solchen der anderen entspricht, und zwar so, dass ein solches System auf Σ zu den Krümmungslinien der Trajectorienflächen der cyklischen Systeme gehört, welche durch Σ' bestimmt sind, ergänzt er dahin, dass die sphärische Abbildung dieser einander entsprechenden con-

jugirten Systeme diejenige der abwickelbaren Flächen einer cyklischen Congruenz ist.

Durch einige weitere Untersuchungen gelangt er schliesslich zu folgendem Resultat: Wenn eine Fläche mehr als eine Biegung zulässt, bei welcher die Krümmungslinien erhalten bleiben, so gestattet sie unendlich viele. Ihre Normalen bilden eine cyklische und Ribaucour'sche Congruenz, und umgekehrt. Sie gehört zu den Gesimsflächen.

Wenn eine Fläche nur eine solche Biegung zulässt, so bilden ihre Normalen eine cyklische Congruenz, und umgekehrt; ihre sphärische Abbildung ist diejenige einer Fläche mit constanter Krümmung.

Die zweite Note enthält einige weitere Ausführungen, welche sich u. a. auf Flächen mit constanter Krümmung und auf Minimalflächen beziehen. A.

A. Adam. Note sur les surfaces de révolution applicables sur une surface de révolution donnée et plus généralement sur les surfaces dont les lignes de courbure d'une famille sont situées dans des plans parallèles et qui sont applicables sur une surface de même nature. Nouv. Ann. (3) X. 18-23.

1) Man kann bekanntlich eine ebene Curve in ihrer Ebene auf unendlich viele Weisen so biegen, dass die Umdrehungsflächen, welche sämtliche Curven bei Drehung um eine Axe der Ebene beschreiben, auf einander abwickelbar sind, so dass die Meridiane, bezw. die Parallelkreise, einander entsprechen.

Diese Eigenschaft bleibt bestehen, wenn man sämtliche Curven um eine beliebige, zur ursprünglichen Axe parallele Gerade der Ebene sich drehen lässt.

2) Die Umdrehungsflächen gehören zu den Flächen, deren eines System von Krümmungslinien (die Parallelkreise) in parallelen Ebenen liegt. Die allgemeinsten Flächen dieser Art sind die Gesimsflächen (moulures — nach Monge), das sind diejenigen Flächen, welche von einer ebenen Curve, dem Querschnitt, be-

schrieben werden, wenn ihre Ebene sich auf einer beliebigen Cylinderfläche abrollt.

Man kann eine solche Gesimsfläche auf unendlich viele Weisen so biegen, dass sie wieder in eine Gesimsfläche übergeht, und dass die Krümmungslinien wieder in Krümmungslinien übergehen. Hierbei ist nicht nur eine Deformation des Querschnittes, sondern auch eine solche des Cylinders erforderlich; aber die Deformation des Querschnittes ist unabhängig von der Form des Cylinders, wofern nur die Geraden der Ebene, welche nach einander den Cylinder berühren, dasselbe System von Parallelen in dieser Ebene bilden. Es ist dann nur nötig, den neuen Cylinder nach demselben Gesetz zu deformiren, wie früher den alten. Diese Deformation ist also insbesondere ganz dieselbe, wie wenn die Ebene um eine den Erzeugenden des Cylinders parallele Gerade rotirte. A.

L. Raffy. Sur certaines surfaces, dont les rayons de courbure sont liés par une relation. S. M. F. Bull. XII. 158-169.

Es wird folgender Satz bewiesen: Soll eine Fläche auf eine Umdrehungsfläche abwickelbar und einer ihrer Hauptkrümmungsradien eine Function des andern sein, so ist sie eine Schraubenfläche oder eine Fläche mit constanter Total-Krümmung, abgesehen von einem Specialfalle, der besonders untersucht wird.

A.

P. Stäckel. Ueber bedingte Biegung krummer Flächen. Naturf. Ges. Halle LXIV. 16.

A. Wangerin. Ueber die Abwickelung von Rotationsflächen mit constantem negativen Krümmungsmass auf einander. Naturf. Ges. Halle LXIV. 16-17.

L. Raffy. **Détermination de toutes les surfaces moulures applicables sur des surfaces de révolution.** S. M. F. Bull. XIX. 34-37.

Nach einem Satze von Massieu ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Fläche auf eine Umdrehungsfläche abwickelbar sei, die, dass die Differentialgleichung der Kürzesten ein lineares und homogenes Integral zulasse (Darboux, Théorie des surfaces III. 29). Das Linienelement ds einer Gesimsfläche (moulure) genügt der Gleichung

$$ds^2 = du^2 + (U-V)^2 dv^2.$$

Es muss also, um obige Bedingung zu erfüllen, eine Function C von u und v und eine Function W' von v allein existiren, so dass

$$(1) \qquad W'U' + \frac{\partial}{\partial v} C(U-V) = 0,$$

$$(2) \qquad W'' + (U-V)^2 C'_u = 0.$$

Nach einer Discussion gewisser besonderer Fälle, welche ausgeschlossen werden können, gelangt der Verfasser zu der allgemeinen Lösung

$$U-V = e^{au} - \frac{b}{v},$$

durch welche eine Klasse von Gesimsflächen bestimmt ist, welche schon Herr Dini als Lösung eines weniger allgemeinen Problems gefunden hatte. A.

L. Raffy. **Sur les surfaces moulures dont les lignes d'égale courbure sont parallèles.** S. M. F. Bull. XIX. 54-57.

Es wird bewiesen, dass das Quadrat des Linienelementes derjenigen Gesimsflächen, bei denen die Linien gleicher Krümmung parallel sind, die Form hat:

$$ds^2 = du^2 + \left(e^{au} - \frac{b}{v}\right)^2 dv^2.$$

Es sind dies die bereits von Herrn Dini betrachteten Flächen. (Vgl. das vorige Referat.) A.

H. Molins. De la détermination des surfaces de révolution ayant un même axe donné et qui sont coupées par une sphère donnée suivant une ligne géodésique. Toulouse Mém. (9) III. 296-317.

Es ist eine Kugel und eine Gerade gegeben. Man sucht eine Umdrehungsfläche, welche die gegebene Gerade zur Axe hat und von der Kugel in einer geodätischen Linie geschnitten wird.

Die Bestimmung dieser Fläche wird zurückgeführt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, deren allgemeine Integration indessen auf Schwierigkeiten führt. Es werden deshalb nur einige specielle Fälle näher betrachtet. A.

Ch. Bioche. Remarques sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire. S. M. F. Bull. XIX. 39-42.

Die kurze Note enthält einige Bemerkungen und weitere Ausführungen, welche sich auf gewisse Eigenschaften der Regelflächen beziehen, deren Erzeugende einer linearen Congruenz angehören. Diese Eigenschaften sind von Herrn Picard (Ann. de l'Éc. Norm. (2) VI. 329, F. d. M. IX. 1877. 574) gefunden, und auch Halphen hat einen Teil derselben untersucht (S. M. F. Bull. V. 134, F. d. M. IX. 1877. 529.) A.

Ch. Bioche. Sur les surfaces gauches dont les lignes de courbure possèdent une propriété donnée. S. M. F. Bull. XIX. 42-44.

Bezeichnet man mit r den Abstand eines Punktes einer Regelfläche von dem Strictionspunkte der Erzeugenden, auf der er liegt, mit s den Bogen der Strictionslinie bis zu diesem Strictionspunkte, so ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+\varphi(r)\frac{dr}{ds}+\psi(r)=0,$$

φ und ψ sind Polynome zweiten Grades in r, deren Coefficienten

Functionen von s sind. Sollen die Ausdrücke für $\frac{dr}{ds}$ rational in r sein, so muss $\psi(r)$ identisch gleich Null sein (Man vergl. S. M. F. Bull. XVI. 119, F. d. M. XX. 1888. 815). Die Flächen sind dann solche, für welche der Verteilungsparameter constant ist und die Strictionslinie Krümmungslinie. Sie werden kurz als Flächen Σ bezeichnet.

Besitzt ein System von Krümmungslinien einer Regelfläche eine Eigenschaft, welche durch eine in r rationale Differentialgleichung erster Ordnung ausdrückbar ist, so gehört sie zu den Flächen Σ.

Mit Hülfe dieser Bemerkung kann man z. B. die Frage beantworten: Alle Regelflächen zu bestimmen, deren eines System von Krümmungslinien aus Trajectorien der Erzeugenden besteht. Es ergiebt sich, dass die einzigen Flächen dieser Art sind: das einschalige Umdrehungshyperboloid und die Minimalschraubenfläche. A.

Ch. Bioche. Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe et coupent sous un angle constant la développable des tangentes. S. M. F. Bull. XIX. 124-125.

Betrachtet man diejenigen abwickelbaren Flächen, welche die abwickelbare Tangentenfläche einer Curve c unter einem constanten Winkel schneiden, so findet man, dass der Ort der Erzeugenden dieser Flächen, welche durch einen Punkt von c gehen, ein Kegel zweiter Ordnung ist. Dieser Kegel hat zur Hauptebene die rectificirende Ebene, zu Haupt-Erzeugenden die Tangente und die Binormale, seine Kreisschnitte sind senkrecht zu diesen Geraden.

Damit eine Gerade, die mit dem aus Tangente, Hauptnormale und Binormale gebildeten Trieder einer Curve starr verbunden ist, eine abwickelbare Fläche beschreibe, muss jener Kegel von constanter Grösse sein und die Gerade auf dem Kegel liegen. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist die Curve eine Helix.

Diese Betrachtungen werden in eigentümlicher Weise auf geradlinige Flächen übertragen. A.

G. Pirondini. Sulle linee di stringimento e di allargamento di un sistema di curve qualunque. Bologna Mem. (5) I. 631-649.

Ist auf einer Fläche eine Curvenschar v = const. gegeben, und betrachtet man die Senkrechten AC, welche von einem Punkte A der Nachbarcurve auf diese gefällt werden, so ist $AC = \sqrt{\frac{eg-f^2}{e}}\,dv$, wenn $ds^2 = edu^2+2f\,du\,ds+g\,dv^2$. Wenn nun der Punkt A die Curve v durchläuft, so wird AC^2 bei constantem v und dv im allgemeinen an gewissen Stellen ein Minimum, an anderen ein Maximum haben, und diese Punkte heissen Verdichtungs- und Verbreiterungspunkte. Der Ort derselben ist die Verdichtungs- und die Verbreiterungslinie. Die Verdichtungslinie ist bereits früher von Herrn Brioschi (1857 im Giorn. Ist. Lomb. Bd. IX) betrachtet, aber mehr hinsichtlich gewisser Transformationen ihrer Gleichung, während der Verfasser ihre geometrischen Eigenschaften im Zusammenhange mit denen der Verbreiterungscurven eingehender untersucht. Ist $\frac{eg-f^2}{e}$ unabhängig von u, so verändert sich AC nicht; es giebt also weder einen Verdichtungs- noch einen Verdünnungspunkt, und die Curve v und ihre Nachbarcurve sind geodätische Parallelen. Im allgemeinen sind beide Arten von Linien bestimmt durch die Gleichung

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(e-\frac{f^2}{g}\right)=0 \quad\text{oder}\quad e^2\frac{\partial g}{\partial u}-2ef\frac{\partial f}{\partial u}+f^2\frac{\partial e}{\partial u}=0.$$

Im Zusammenhange mit diesen Linien betrachtet der Verfasser solche Linien L, welche die Eigenschaft haben, dass sie Strictionslinien sind für diejenigen geradlinigen Flächen, welche erzeugt werden von den Tangenten der Curven v = const. in den Punkten, wo sie von L geschnitten werden. Für diese ergiebt sich

die Gleichung:

$$\left(2e\frac{\partial f}{\partial u}-e\frac{\partial e}{\partial v}-f\frac{\partial e}{\partial u}\right)du+\left(e\frac{\partial g}{\partial u}-f\frac{\partial e}{\partial v}\right)dv=0.$$

Nun ist aus der Flächentheorie bekannt, dass die geodätische Krümmung $\frac{1}{R}$ einer beliebigen Linie L sich folgendermassen ausdrücken lässt:

$$\frac{1}{R}=-\frac{di}{ds}+\frac{1}{2(eg-f^2)\sqrt{e}}$$
$$\times\left[\left(f\frac{\partial e}{\partial v}-e\frac{\partial g}{\partial u}\right)\sin i-\left(2e\frac{\partial f}{\partial u}-e\frac{\partial e}{\partial v}-f\frac{\partial e}{\partial u}\right)\sin(w-i)\right],$$

wo w den Winkel der Parameterlinien, i den Winkel der Linie L mit den Parameterlinien $v=$ const. bedeutet.

Ist nun $i=0$, so fällt die Linie L mit der Parameterlinie $v=$ const. zusammen.

Ist aber diese Parameterlinie geodätisch, also $\frac{1}{R}=0$, so ist auch:

$$(6)\qquad 2e\frac{\partial f}{\partial u}-e\frac{\partial e}{\partial v}-f\frac{\partial e}{\partial u}=0.$$

Dann geht die Gleichung über in:

$$(7)\qquad e\frac{\partial g}{\partial u}-f\frac{\partial e}{\partial v}=0.$$

Sind also zwei der Gleichungen (1), (6), (7) erfüllt, so ist es auch die dritte, und die Parameterlinien $v=$ const. sind geodätische Linien.

Sind aber die Parameterlinien nicht geodätische Linien, so ist (6) die Gleichung einer Linie, welche Verdichtungs- oder Verbreiterungslinie für diejenigen Linien $t=$ const., welche orthogonal zu $v=$ const. stehen.

Ist die Gleichung (7) auf der ganzen Fläche erfüllt, so sind die Linien $u=$ const. Strictionslinien für die Regelflächen, deren Erzeugende die Tangenten der Linien v längs der Linie $u=$ const. sind.

Ist eine Linie L zugleich eine Linie, die der Gleichung (1)

genügt, und zugleich Strictionslinie der geradlinigen Fläche, welche von den Tangenten an v gebildet ist, so wird sie Hauptlinie genannt, und es zeigt sich, dass dieselbe Linie auch Hauptlinie für die Curven ist, welche orthogonal zu den Curven v = const. stehen. Hieran knüpfen sich viele Untersuchungen ähnlicher Art. A.

G. Pirondini. Alcuni teoremi sulle superficie sviluppabili. Annali di Mat. (2) XIX. 247-253.

1. Die Rückkehrkanten einer Schar paralleler abwickelbarer Flächen S liegen auf einer abwickelbaren Fläche Σ und bilden auf ihr ein System geodätischer Parallelen. Der geodätische Abstand je zweier ist gleich dem Abstande der entsprechenden Parallelflächen. Die Fläche Σ ist die rectificirende abwickelbare Fläche der Rückkehrkante von S.

Diese Sätze werden entwickelt, auf specielle Fälle angewandt, und es wird dann der Beweis für gewisse singuläre Fälle geführt. A.

G. Kobb. Sur les surfaces développables. S. M. F. Bull. XIX. 1-3.

Es wird der Satz bewiesen: Durch eine geschlossene Curve gehen nie benachbarte abwickelbare Flächen ohne singuläre Punkte. H.

W. Jung. Asymptotische Curven auf windschiefen Flächen. Casop. XX. 294. (Böhmisch.)

Enthält eine Fortsetzung der analytischen Studien des Autors, auf welche im Bd. XXI dieser Fortschritte hingewiesen wurde, wobei er die genannten Curven unter Intervention von zwei Leitlinien sowie einer Leitlinie und einer Leitebene ableitet. Std.

G. Pirondini. Sulla determinazione delle linee di cui il rapporto della curvatura alla torsione è una funzione nota dell'arco. Annali di Mat. (2) XIX. 213-232.

Bekanntlich ist nach einem Satze von Bertrand jede Curve, bei welcher das Verhältnis des Krümmungsradius ϱ zum Torsionsradius r constant ist, eine Helix.

Der Verfasser sucht allgemeiner diejenigen Curven L auf, bei welchen $\frac{\varrho}{r}$ eine gegebene Function des Bogens s ist. Man lege durch L die abwickelbare rectificirende Fläche Σ und nenne i den Winkel, welchen deren Erzeugende mit der Curve L bildet. Man wickele danach Σ in eine Ebene ab. Dann geht die Rückkehrkante L_0 von Σ in eine ebene Curve Λ_0 und die Curve L in die Gerade Λ über. Wählt man diese zur x-Axe, und zur y-Axe die dazu Senkrechte, welche durch den Anfang des Bogens s geht, so ist s die Subtangente von Λ_0, also $s = x - \frac{y\,dx}{dy}$. Andererseits ist aber $\frac{\varrho}{r} = \operatorname{ctg} i = \frac{dx}{dy}$; die gestellte Bedingung $\frac{\varrho}{r} = \varphi(s)$ geht also über in die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{dx}{dy} = \varphi\left(x - y\frac{dx}{dy}\right),$$

und die Integration dieser Gleichung ergiebt die Lösung des Problems.

Ist umgekehrt $y = \psi(x)$ die Gleichung der Linie Λ_0, so ergiebt sich $s = x - \frac{\psi(x)}{\psi'(x)}$, $\frac{r}{\varrho} = \psi'(x)$. Löst man die zweite dieser Gleichungen nach x auf, und ergiebt sich $x = f\left(\frac{r}{\varrho}\right)$, so geht die erste über in:

$$s = f\left(\frac{r}{\varrho}\right) - \frac{\varrho}{r}\psi\left[f\left(\frac{r}{\varrho}\right)\right].$$

Diese einfachen Betrachtungen werden zunächst auf den Fall $\frac{\varrho}{r} = \frac{s}{a} + b$ angewandt, wodurch man auf geodätische Linien von Kegelflächen geführt wird (für $a = \infty$ auf solche von Cylindern). Dann wird die Gleichung

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^m = \frac{a}{s}$$

zu Grunde gelegt, und es ergiebt sich für $\varDelta_0$ die Gleichung

$$a\left(\frac{y}{m}\right)^m = \left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1},$$

was für $m = 1$, $m = -2$ auf Parabeln und für $m = -\frac{1}{2}$ auf eine gleichseitige Hyperbel führt.

Nach diesen Anwendungen beschäftigt sich der Verfasser mit der Bestimmung der Krümmung und Torsion von L_0 und mit weiteren Ausführungen. A.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

Fr. Meyer. Ueber Realitätseigenschaften von Raumcurven. Gött. Nachr. 1891. 88-100.

Die in früheren Abhandlungen (vergl. F. d. M. XXII. 1890. 175) vom Verfasser gewonnenen, auf rationale Raumcurven bezüglichen Resultate werden in der vorliegenden Note für das Studium der Realitätseigenschaften beliebiger analytischer Raumcurven verwertet. Die Singularitäten der Curve sind dadurch charakterisirt, dass von den Schnittpunkten einer Ebene oder einer Geraden mit der Raumcurve eine gewisse genügende Anzahl zusammenfällt. Bezeichnet man getrennte Schnittpunkte mit verschiedenen Buchstaben α, β, γ, δ und die Anzahl an einer Stelle zusammengerückter Schnittpunkte durch einen Exponenten, so kommen fünf derartige Singularitäten in Betracht, nämlich die Ebenen α^4, $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ und die Geraden $\alpha^2\beta$, $\alpha\beta\gamma\delta$. Nunmehr handelt es sich um die Frage, in wie weit die Anzahlen der bei einer Curve auftretenden reellen Singularitäten eine Aenderung erfahren, wenn während der Variation der Curve ein Zusammenrücken zweier Singularitäten stattfindet. Dabei darf man sich auf solche Zusammenrückungen beschränken, für deren Zustandekommen das Erfülltsein einer einzigen Bedingung zwischen den Coefficienten der Curve hinreicht. Diese Bedingungen erhält man nach den früheren Untersuchungen des Verfassers durch Nullsetzen gewisser Factoren der Discriminanten und Resultanten der zu einer rationalen Raumcurve gehörigen Singu-

laritätenformen. Die in Betracht kommenden Factoren bilden ein System von 14 Invarianten, welche der Verfasser einzeln vermöge geeigneter Variation der Curve durch Null passiren lässt; er erhält dadurch Aufschluss über die Realität der ein- und austretenden Singularitäten und gelangt dadurch schliesslich zu dem folgenden zusammenfassenden Satze: Wird die Anzahl der reellen Ebenen α^4 mit w', der reellen Ebenen $\alpha^2\beta^2$ mit t', der reellen Geraden $\alpha^2\beta$ mit d', sowie endlich die Anzahl der reellen Ebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ mit nur einem einzigen reellen Berührungspunkte mit T'' bezeichnet, dann bleibt bei beliebigen Deformationen der Curve das Aggregat $w'+d'-t'-2T''$ entweder ganz unverändert, oder es erfährt eine Zu- (resp. Ab-) nahme um ganze Vielfache von 4, während es immer Fälle giebt, in denen einzelne Bestandteile des Aggregates nur um 2 sich ändern. Schliesslich vergleicht der Verfasser dieses Resultat mit der bekannten von Hrn. F. Klein herrührenden Relation zwischen Realitätsanzahlen von Singularitäten ebener Curven und deckt den Grund auf, warum der eingeschlagene Weg zu einem entsprechenden Ergebnis für Raumcurven nicht führen kann.

Ht.

K. Th. Vahlen. Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumcurven. J. für Math. CVIII. 346-347.

Kronecker hat in seinen Vorlesungen und in § 10 seiner „Festschrift" darauf hingewiesen, dass eine algebraische Raumcurve im allgemeinen nicht durch drei, sondern erst durch vier Flächen rein dargestellt werden kann, wenn man nämlich alle fremden isolirten Punkte ausschliessen will. Soviel Ref. weiss, war aber bisher kein Beispiel für diese aus der Theorie der Elimination geschöpfte Erkenntnis vorhanden. Herr Vahlen liefert ein solches in der Raumcurve fünfter Ordnung vom Geschlechte Null mit einer Quadrisecante. R. M.

F. H. Loud. Tangents touching a surface in two points. Annals of Math. V. 229.

Boyd hat den Berührungspunkt einer Tangente an eine Fläche einen dreifachen Punkt genannt. Der Verfasser weist nach, dass dieser nur ein Doppelpunkt heissen darf. H.

M. J. M. Hill. On the locus of singular points and lines which occur in connexion with the theory of the locus of ultimate intersections of a system of surfaces. Lond. R. S. Proc. L. 180-186; Lond. Phil. Trans. CLXXXIII. 141-278. (1892).

Bericht auf S. 760 dieses Bandes.

S. Rindi. Sulle normali comuni a due superficie algebriche. Palermo Rend. V. 106-108.

Die Anzahl der gemeinsamen Normalen zweier Flächen, die bezüglich vom Grade m und n sind, ist:

$$N = mn(m^2n^2 - m^2n - mn^2 + m^2 + n^2 + mn - 2m - 2n + 2).$$

Bm.

M. Pieri. A proposito della Nota del sig. Rindi „Sulle normali comuni a due superficie algebriche“. Palermo Rend. V. 323.

Der Verfasser bemerkt, dass das im vorhergehenden Referate angeführte Resultat über die Anzahl der gemeinsamen Normalen zweier Flächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung bereits von Herrn Fouret (S. M. F. Bull. VI, F. d. M. X. 1878. 423) erhalten worden sei, und giebt eine noch allgemeinere Formel für zwei Mannigfaltigkeiten $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension im Raume S_n an, die das Fouret'sche Resultat in sich schliesst. Bm.

F. P. Ruffini. Delle superficie algebriche, che hanno potenza in rispetto a ogni punto dello spazio ovvero in rispetto ad alcuni dei loro proprii punti. Bologna Mem. (5) I. 235-252.

Es sei eine algebraische Fläche S^m gegeben und ein beliebiger Punkt O ausserhalb derselben. Legt man durch letzteren eine Gerade p, welche die Fläche in m Punkten schneidet, deren Entfernungen von O mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ bezeichnet werden, so kann man das Product $\pi = \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_m$ bilden. Der Verfasser nennt nun π die Potenz der Fläche hinsichtlich des Punktes O, wenn dieses Product von der Richtung der Geraden p unabhängig ist.

Liegt der Punkt O auf der Fläche S^m, so begegnet die Gerade p der Fläche ausserdem in $m-1$ Punkten, deren Entfernungen von O durch $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{m-1}$ bezeichnet werden. Ist nun das Product $\pi = \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{m-1}$ unabhängig von der Richtung der Geraden p, so hat die Fläche die Potenz π hinsichtlich dieses Punktes.

Diese beiden Fälle werden von dem Verfasser untersucht und führen ihn zu folgenden Resultaten: Nur diejenigen algebraischen Flächen gerader Ordnung, deren Gleichungen als Glied höchster Ordnung $a_0(x^2+y^2+z^2)^k$ enthalten, haben eine Potenz bezüglich jedes Punktes des Raumes, und die Flächen ungerader Ordnung, deren Gleichungen als Glied höchster Ordnung

$$a_0(ax+by+cz)(x^2+y^2+z^2)^k$$

enthalten, haben eine Potenz in Bezug auf einen oder mehrere Punkte, und zwar sind diese die Berührungspunkte der Fläche mit jeder ihrer Tangentialebenen, welche durch die unendlich ferne Gerade der Fläche geht. Diese Flächen müssen aber nicht, wie der Verfasser angiebt, eine Asymptotenebene und k Asymptotenkegel zweiter Ordnung besitzen. In einigen Beispielen, welche sich auf Flächen vierter und dritter Ordnung beziehen, wird das Obige näher erläutert. W. St.

GENTY. Mémoire sur les surfaces gauches rationnelles.
S. M. F. Bull. XIX. 70-93.

Die Gerade

$$\frac{x-x_1}{u} = \frac{y-y_1}{v} = \frac{z-z_1}{w}$$

ist durch Angabe der sechs Liniencoordinaten:

$$u,\ v,\ w,$$

$$\xi = wy_1 - uz_1,\quad \eta = uz_1 - wx_1,\quad \zeta = vx_1 - uy_1$$

(in der letzten Coordinate steht in Folge eines Druckfehlers y statt y_1) vollständig gegeben. Sind nun diese sechs Grössen rationale Functionen einer Variable t, etwa vom n^{ten} Grade, so durchläuft die Gerade eine rationale Regelfläche n^{ter} Ordnung C_n. Auf dieser Grundlage wird nun zunächst gezeigt, dass die Fläche von $4n+1$ Bedingungen abhängt, dass eine gegebene Erzeugende der Fläche drei Bedingungen, und eine gegebene Leitlinie derselben $n+1$ Bedingungen entspricht (im Falle $n>3$). Eine Fläche C_3 hat im allgemeinen zwei reelle Leitlinien, eine Fläche C_2 unendlich viele.

Hierauf werden die Fälle untersucht, in welchen zwei Leitlinien zusammenfallen, oder eine Leitlinie ganz im Unendlichen liegt; eine Fläche, bei welcher der letztere Fall eintritt, hat eine Leitebene, und die Zahl der zur Bestimmung einer solchen Fläche notwendigen Bedingungen ist $3n+2$. Als Beispiel werden dann die Gleichungen einer Regelfläche zweiten Grades, die durch drei gegebene Gerade, und einer Regelfläche dritten Grades, die durch vier Gerade geht, in Liniencoordinaten aufgestellt.

Dann folgt die Bestimmung der Doppelcurve, welche den Grad $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ hat, falls die Fläche vom Grade n ist, sowie die Aufsuchung der $2(n-2)$ singulären Geraden der Fläche, ferner die Bestimmung der Strictionslinie, des Centralpunktes und der Centralebene sowie des Parameters, der die Verteilung der Tangentialebenen längs einer Erzeugenden angiebt. Des weitern werden die Gleichungen der Tangentialebene und des von den Normalen längs einer Geraden der Fläche gebildeten Paraboloides und die des osculirenden Hyperboloides aufgestellt.

Zum Schlusse wird noch gezeigt, wie sich aus den gefundenen Resultaten die Schwarz'sche Klassification der rationalen Developpabeln der ersten sieben Ordnungen ergiebt, und eine obere Grenze für die Anzahl der Rückkehrpunkte einer unicursalen Raumcurve angegeben.

Wenn auch die Resultate grösstenteils bekannt sind, so muss

doch zugegeben werden, dass die Einführung der Plücker'schen Liniencoordinaten die ganze Betrachtung sehr elegant gestaltet.
Bm.

K. Stoltz. Beitrag zur Kenntnis der algebraischen Flächen mit Mittelpunkt. Schlömilch Z. XXXVI. 308-311.

1) „Die Ortsfläche der Mittelpunkte sämtlicher Flächen von gerader ($n = 2\mu^{\text{ter}}$) Ordnung, welche durch $\frac{1}{6}(\mu+1)(\mu+2)(4\mu+3)$ gegebene Punkte gehen, ist im allgemeinen eine Fläche von der Ordnung

$$\tfrac{1}{3}\mu[(\mu^2+5)(\mu+1)-3] = \tfrac{1}{48}n[(n^2+20)(n+2)-24].$$

Auf dieser Oberfläche liegen auch die Mitten der Verbindungslinien der gegebenen Punkte."

2) „Die Ortsfläche der Mittelpunkte aller Flächen von ungerader ($n = (2\nu-1)^{\text{ter}}$) Ordnung, welche durch $\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(4\nu+5)$ gegebene Punkte gehen, ist im allgemeinen eine Fläche von der Ordnung

$$\tfrac{1}{3}\nu[(\nu^2+5)(\nu-1)+3] = \tfrac{1}{48}(n+1)[(n+1)^2+20)(n-1)+24].$$

Diese Fläche geht durch die gegebenen Punkte selbst sowie durch die Mitten der Verbindungslinien der gegebenen Punkte."
Wbg.

G. Pittarelli. Sulle linee assintotiche delle superficie gobbe razionali di Cayley. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII₁. 452-456.

Das Resultat der Untersuchung, betreffend die Regelfläche Ψ vom Geschlecht 0 mit zwei unendlich nahen Leitlinien, lautet: „Eine willkürliche asymptotische Linie der Fläche Ψ wird in einem einzigen Punkte A von jeder Erzeugenden geschnitten. Lässt man einem beliebigen Punkte L der Erzeugenden den harmonisch conjugirten Punkt L' in Bezug auf A und auf den Schnitt der Erzeugenden mit der geraden Leitlinie entsprechen, so wird der repräsentative Punkt λ von L auch die Berührungsebene in L' repräsentiren." H.

G. Pittarelli. Sulle linee assintotiche di una classe di superficie di genere zero. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII_1. 391-396.

Das Resultat der Untersuchung in Betracht der von Clebsch in Bd. V der Math. Ann. aufgestellten Regelfläche Φ lautet: „Eine willkürliche asymptotische Linie der Fläche wird in zwei Punkten A, A' von jeder Erzeugenden geschnitten. Lässt man einem beliebigen Punkte L einer Erzeugenden den harmonisch conjugirten Punkt L' in Bezug auf das Punktepaar A, A' entsprechen, so wird der repräsentative Punkt λ von L auch der repräsentative Punkt der Berührungsebene im Punkte L' sein."

H.

S. Mangeot. Des surfaces qui possèdent la symétrie courbe des systèmes de plans. C. R. CXII. 1497-1500.

Durch Verallgemeinerung bildet der Verf. aus dem Begriff der Symmetrieebenen den der Symmetrieflächen. Diese stehen zu den polyedrischen Flächen in derselben Beziehung wie die Symmetrieebenen zu den regelmässigen Polyedern. Es wird die allgemeine Gleichung der Symmetrieflächen in rechtwinkligen Coordinaten aufgestellt und ebenso die Form der Gleichung für diejenigen allgemeinen Flächen, für welche dieselben Symmetrieflächen existiren.

Schg.

S. Pincherle. Sopra certe superficie razionali che s'incontrano in questioni d'analisi. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 354-357.

D. Montesano. Su due superficie omaloïdi che si presentano in questioni analitiche. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 889-907.

Ist eine algebraische Gleichung mit zwei complexen Variabeln W und Z gegeben, so können die Variationen des Moduls von W mit Vorteil durch eine rationale Fläche dargestellt werden. Diese Beziehungen werden in der ersten Abhandlung

erörtert und durch das Beispiel

$$W^{m+n} - ZW^n + 1 = 0$$

mit den speciellen Werten $m = 1, 2$ und $n = 1$ erläutert.

In der zweiten Abhandlung werden die beiden den genannten Werten von m und n entsprechenden Flächen genauer untersucht und eine grössere Anzahl ihrer Eigenschaften ermittelt.

Schg.

Lelieuvre. Sur les surfaces à génératrices rationnelles. C. R. CXIII. 635-637.

Auch diese Note ist eine Fortsetzung von früheren Mitteilungen. Die letzte derselben war enthalten in C. R. CXI. 568 (F. d. M. XXII. 1890. 786). Es wird in ihr eine neue Untersuchungsmethode für Flächen mit rationalen Erzeugenden mitgeteilt, welche die Lösung verwickelterer Probleme gestattet. Diese Methode besteht in der Einführung eines beweglichen Coordinatentrieders, gebildet aus Tangente, Normale und Binormale der rationalen Erzeugenden. Der Verfasser teilt kurz einige Resultate mit, welche er durch seine Methoden erhalten hat:

1) Die asymptotischen Linien der Flächen, welche beschrieben werden durch einen Kegelschnitt, der eine Gerade und vier Ebenen berührt, lassen sich durch Quadraturen bestimmen.

2) Ein ähnlicher Satz besteht für den Fall, dass die Erzeugenden kubische Raumcurven sind.

3) Die einzigen cyklischen Flächen, für welche die kritichen Punkte des Integrals der Krümmungslinien fest sein können, haben entweder eine Enveloppe der kreisförmigen Erzeugenden, oder es giebt auf ihnen zwei Linien, nämlich: entweder Nabellinien oder gewisse Linien doppelter Krümmung ($1 + p^2 + q^2 = 0$). In gewissen Fällen lassen sich ihre Krümmungslinien durch Quadraturen bestimmen. A.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

HJ. TALLQVIST. Bestimmung der Richtungscosinus einer Geraden, welche mit zwei gegebenen Geraden Winkel von gegebener Grösse einschliessen soll. Acta Soc. Fennicae (Helsingfors). XVII. 467-472.

Herleitung der allgemeinen Formeln für die Lösung der fraglichen Aufgabe. Bdn.

G. FAZZARI. Volume di un tetraedro e superficie di un triangolo nello spazio in coordinate quadriplanari. Batt. G. XXIX. 247-256.

G. FAZZARI. Della sfera in coordinate quadriplanari. Ibid. 257-275.

Der Inhalt der ersten Arbeit ist wohl durch den Titel genügend gekennzeichnet. In der zweiten wird zunächst der Abstand zweier Punkte berechnet; hierdurch kann die Gleichung einer Kugel sofort angesetzt werden, und man gewinnt die Bestimmungsstücke der dem Fundamental-Tetraeder umbeschriebenen Kugel. Nachdem alsdann die Bedingungen aufgestellt sind, unter welchen die allgemeine Gleichung zweiten Grades eine Kugel darstellt, geht der Verfasser zu speciellen Kugeln über; er behandelt die dem Fundamental-Tetraeder einbeschriebene Kugel und diejenige, welche durch die Schwerpunkte seiner Seitenflächen geht. Wenn im besondern die gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders normal zu einander sind (die Höhen sich also in einem Punkte schneiden), so geht diese Kugel auch noch durch die Fusspunkte der Höhen, ihr Radius ist $\frac{1}{3}$ des Radius der umbeschriebenen Kugel. Bei demselben Tetraeder ist noch bemerkenswert diejenige Kugel, welche aus jeder Seitenfläche den zugehörigen Kreis der neun Punkte ausschneidet (vergl. das Referat über Bénézech oben S. 720). R. M.

S. L. RĂVIER. Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques et sur une génération mécanique des quadriques. Nouv. Ann. (3) X. 371-373.

Nach einigen Bemerkungen, welche das Princip der Transformation durch reciproke Radien von der Kugel auf eine beliebige Oberfläche zweiter Ordnung verallgemeinern, giebt der Verfasser die folgende Erzeugungsweise einer solchen Fläche: Man nehme in einer Ebene E einen Kreis K mit dem Mittelpunkte C an, lege durch C eine beliebige Gerade und nehme auf ihr zwei Punkte A und A' an. Ein Punkt M in E werde mit A verbunden, der aus M durch Inversion entsprungene Punkt M' mit A'; dann beschreibt der Schnittpunkt μ von AM und $A'M'$ eine Oberfläche F_2 zweiter Ordnung, wenn M die Ebene E durchläuft. Der Kreis K ist ein Kreisschnitt, die Punkte A und A' sind (reelle) Nabelpunkte von F_2. Lp.

FR. MACHOVEC. Ueber orthocentrische Poltetraeder der Flächen zweiter Ordnung. Monatsh. f. Math. II. 451-457.

Die einer Ordnungscurve des Axencomplexes einer Fläche zweiter Ordnung φ_2 eingeschriebenen Poltetraeder von φ_2 sind orthocentrisch, ihre Orthocentra fallen in den Pol der Ordnungscurve. Je drei Eckpunkte eines orthocentrischen Poltetraeders von φ_2 bilden mit dem zugehörigen Orthocentrum ein orthocentrisches Poltetraeder einer mit φ_2 confocalen Fläche zweiter Ordnung, dessen Orthocentrum der vierte Eckpunkt des ersteren Tetraeders ist. Ein beliebiger Punkt ist Eckpunkt von ∞^1 orthocentrischen Poltetraedern von φ_2, ihre übrigen Punkte liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel. Eine Axe von φ_2 ist Kante von ∞^1 orthocentrischen Poltetraedern, ihre Orthocentra liegen auf der Linie kürzesten Abstandes zwischen jener Axe und ihrer Polare bezüglich φ_2. Einer im Complex enthaltenen Regelschar zweiter Ordnung sind ∞^2 orthocentrische Poltetraeder eingeschrieben, ihre Orthocentra liegen auf einem Strahle der zugehörigen Leitschar. Js.

F. Machovec. Beiträge zu den Eigenschaften der Normalen der Flächen zweiter Ordnung. Prag. Ber. 1891. 11 S. (Böhmisch.)

Humbert. Étude des cônes passant par l'intersection de deux quadriques. J. de Math. spéc. (3) V. 5-9, 25-29, 49-53.

Die Behandlung setzt die Gleichung der einen Fläche in der Form $x^2+y^2+z^2+t^2=0$ voraus und discutirt die geometrische Bedeutung der möglichen Fälle der Gleichheit von Wurzeln bei der biquadratischen Gleichung, von welcher die Lösung der Aufgabe abhängt. Am Schlusse werden die Resultate übersichtlich zusammengestellt. Auf die Unterscheidung der Fälle nach der Realität der Wurzeln ist nicht eingegangen. Lp.

L. Lévy. Intersection de deux quadriques. Nouv. Ann. (3) X. 65-76.

Im weiteren Verfolg von Carvallo's Methode (Contact de deux quadriques. Nouv. Ann. (3) IX. 586, F. d. M. XXII. 1890. 79?) untersucht der Verfasser den Büschel von Flächen zweiten Grades

$$f(x, y, z, t)+\lambda\varphi(x, y, z, t)=0$$

von gemeinsamer Schnittcurve in Betreff derjenigen Fläche, welche ein Kegel ist, ausgedrückt durch die Gleichung $\Delta(\lambda)=0$, und unterscheidet die Fälle: 1) wo keine erste Unterdeterminante von Δ Null ist, 2) wo alle ersten, aber nicht alle zweiten Unterdeterminanten Null sind, 3) wo alle ersten und zweiten, aber nicht alle Elemente Null sind, 4) wo alle Elemente Null sind, 5) wo Δ identisch Null ist. In den Fällen 2), 3) und 4) degenerirt der Kegel in eine oder zwei Ebenen. Im ersten entspricht jeder einfachen Wurzel von $\Delta=0$ ein Kegel mit einer Spitze ausserhalb des Flächenbündels, jeder doppelten ein Kegel, dessen Spitze auf allen Flächen liegt, jeder dreifachen desgleichen; überdies berühren die Tangentialebenen aller Flächen in der Spitze hier auch den Kegel. H.

C. Lolli. Sulla relazione dei due metodi di soluzione sintetico ed algebrico-geometrico del problema degli assi delle superficie di 2° ordine. Batt. G. XXIX. 87-91.

Die in der synthetischen Geometrie übliche Construction der Hauptaxen einer Fläche zweiter Ordnung mittels der Schnittgeraden zweier Kegel zweiter Ordnung wird hier in analytischer Weise auf Grundlage des Polarsystems für den Mittelpunkt der Fläche gefunden und discutirt. W. St.

G. Méténier. Sur l'équation en S des quadriques en coordonnées tangentielles. J. de Math. spéc. (3) V. 121-123, 145-149, 173-177.

Indem von dem Satze ausgegangen wird, dass die Haupt-ebenen einer Fläche zweiter Ordnung und die unendlich ferne Ebene das dieser Oberfläche und dem als Fläche zweiter Ordnung betrachteten imaginären Kreise im Unendlichen gemeinsame Poltetraeder bilden, findet das Hauptaxenproblem für die Flächen zweiter Klasse in homogenen Ebenencoordinaten eine vollständige Erledigung. Im letzten Artikel wird dieselbe Aufgabe für Tetraedercoordinaten behandelt. Lp.

C. Antomari. Détermination des axes d'une section plane d'une quadrique. J. de Math. spéc. (3) V. 169-173.

1) Bestimmung der Lage der Axen, 2) Berechnung ihrer Länge, wenn der Schnitt einen Mittelpunkt besitzt, 3) Berechnung des Parameters eines parabolischen Schnitts. Lp.

I. B. Newson. A pair of curves of the fourth degree and their application in the theory of quadrics. American J. XIV. 87-94.

Gegeben ein Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $a>b>c$. Zieht man parallel zur z-Axe eine Gerade mit den Coordinaten (m, n)

und macht sie zum Träger eines Ebenen-Büschels, so kann man für alle so entstehenden ebenen Schnitte den Ort der Brennpunkte suchen. Dies ist die erste der hier behandelten Curven. Die Directrices der ebenen Schnitte bilden einen Cylinder, seine Leitcurve in der xy-Ebene ist die zweite der fraglichen Curven. Beide sind vierter Ordnung, besitzen in (m, n) einen Doppelpunkt, haben mit einander und mit dem Hauptschnitt $z = 0$ des Ellipsoids doppelte Berührung. Besondere Eigenschaften und charakteristisches Zerfallen findet man, wenn (m, n) ins Unendliche wächst, wenn (m, n) mit einem Brennpunkte oder einem Scheitel des Hauptschnitts zusammenfällt, im speciellen, wenn die Fläche eine Rotationsfläche wird. Nimmt man statt des Ellipsoids einen Kegel, so gelangt man zu besonderen Curven dritter Ordnung, die schon von Quetelet und anderen belgischen Mathematikern studirt sind. R. M.

J. Neuberg. Sur les moments d'inertie. Mathesis (2) I. 226-233.

Gedrängte Uebersicht der Untersuchungen von Reye, Hesse, Darboux über die Beziehungen der Theorie der Trägheitsmomente zu derjenigen der Oberflächen zweiten Grades. Mn. (Lp.)

R. Marcolongo. Osservazione alla Nota „Sulle geodetiche tracciate sulle quadriche prive di centro". Napoli Rend. (2) V. 32-33.

Darstellung der geodätischen Linien eines elliptischen Paraboloides durch die Weierstrass'schen Functionen $\wp$ und σ.

Bm.

A. R. Johnson. Solution of question 9088. Ed. Times LIV. 64-66.

Die von dem Verf. behandelte Aufgabe verlangt, 1) vermittelst der fundamentalen Invarianten und Covarianten eines Systems dreier Kegelschnitte die Covariante auszudrücken, welche, gleich Null gesetzt, den Ort desjenigen Punktes giebt, von dem

die sechs an jene Kegelschnitte gezogenen Tangenten in Involution sind; 2) die Gleichung der Oberfläche zu finden, welche durch die gemeinschaftlichen Tangenten dreier Oberflächen zweiter Ordnung erzeugt wird; 3) vermittelst der fundamentalen Invarianten dreier Oberflächen zweiter Ordnung diejenige Invariante auszudrücken, deren Verschwinden die Bedingung dafür ist, dass die drei Flächen ein gemeinschaftliches, zu sich selbst conjugirtes Pentaeder besitzen. Lp.

Rezeau. Solution de la question 271. J. de Math. spéc. (3) V. 259-261.

Drei Gerade *a*, *b*, *c* seien einer und derselben Ebene parallel; man betrachte alle Dreiecke *ABC*, deren Ebenen auf diesen Geraden liegen und die denselben Schwerpunkt *G* haben. Die Seiten dieser Dreiecke sind die Erzeugenden dreier Paraboloide, und die Ebenen *ABC* hüllen einen Kegel zweiten Grades ein. (Satz von J. Neuberg). Lp.

Genty. Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1889). Solution de la question de mathématiques spéciales. Nouv. Ann. (3) X. 204-208.

Lösung der Aufgaben, welche in F. d. M. XXII. 1890. 798 abgedruckt sind. F.

Marchand. Remarques sur le problème de Mathématiques spéciales pour l'agrégation en 1889. Nouv. Ann. (3) X. 322-325.

Die Note behandelt die Sätze, welche aus den in der Aufgabe angeführten durch Transformation nach dem Dualitätsprincip entstehen, mit der Specialisirung, dass als Flächen zweiter Ordnung Kugeln genommen werden. F.

---

3. Mangeot. Surfaces de symétrie du troisième ordre d'une quadrique. Nouv. Ann. (3) X. 235-242.

Symmetrieflächen einer Fläche zweiter Ordnung sind Flächen, von deren Normalen die Fläche zweiter Ordnung gleiche Stücke, vom Fusspunkte aus gerechnet, abschneidet; für die Flächen zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte, deren Gleichung, auf ihre Axen bezogen,

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=K$$

lautet, stellt jeder gleich Null gesetzte Ausdruck, welcher in Bezug auf die drei Grössen x^a, y^b, z^c homogen ist, die Gleichung einer Symmetriefläche dar. — Der Verfasser giebt nun eine allgemeine Methode für die Bestimmung derjenigen Symmetrieflächen an, welche algebraisch sind, und stellt insbesondere eine Tabelle der verschiedenen Formen auf, welche die Gleichung der algebraischen Symmetrieflächen dritter Ordnung annehmen kann. Wbg.

S. Mangeot. Sur les surfaces de symétrie communes à plusieurs quadriques. Assoc. Franç. Marseille XX. 224-232.

Damit zwei Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung, von denen die eine die Gleichung

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=d$$

hat, in Bezug auf eine und dieselbe krumme Oberfläche beide symmetrisch seien, ist es nötig und hinreichend, dass sie dieselben Hauptebenen besitzen. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so besitzen beide Flächen unendlich viele gemeinsame Symmetrieoberflächen. Die Gleichung $x^m y^n z^r=$ const. stellt solche Flächen dar, falls m, n, r der Bedingung genügen:

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{r}{c}\Big| = 0.$$

Einige Eigenschaften und geometrische Constructionen, welche auf die Oberflächen $x^m y^n z^r=$ const. Bezug haben und aus dem Symmetrie-Verhältnisse derselben zu gewissen Oberflächen zweiter Ordnung fliessen, werden aufgestellt. Lp.

F. Lucas. Note sur les intersections de trois quadriques. S. M. F. Bull. XIX. 118-119.

Schneiden sich drei Flächen zweiten Grades in acht Punkten, so gehören ihre 28 gemeinsamen Sehnen einer Fläche dritten Grades an, welche der Ort der Mittelpunkte aller Flächen zweiten Grades ist, die durch dieselben acht Punkte gehen. Ausserdem ist sie der Ort der Mitten der 28 Sehnen, wenn allein die constanten Terme in den Gleichungen jener drei Flächen variiren.

H.

H. v. Jettmar. Analytische Untersuchungen der einem Tetraeder zugeordneten Flächen zweiter und dritter Ordnung mittelst numerischer Tetraedercoordinaten. Hoppe Arch. (2) X. 398-419.

In homogenen Coordinaten ist die allgemeine symmetrische Gleichung zweiten Grades $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2 = n$, die des dritten Grades $m\Sigma\alpha_1^3+n\Sigma\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = p$; der Verf. discutirt die beiden hierdurch dargestellten Flächen, danach sechs specielle Flächen, deren Gleichungen nur in dreien der Coordinaten symmetrisch sind, und noch zwei andere, bei welchen sich zwei Paare von Coordinaten vertauschen lassen.

R. M.

Fr. Deruyts. Sur un procédé de génération de la surface cubique. Belg. Bull. (3) XXII. 35-55.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. 4-5.

Der Verf. stellt zuerst den Satz auf: Wenn ein Dreieck sich so umgestaltet, dass zwei seiner Seiten sich auf zwei Paare von festen Geraden stützen, während die dritte Seite einen Kegel mit fester Spitze beschreibt, so beschreibt die Gegenecke eine mehrfache kubische Oberfläche; der Grad der Mehrfachheit ist gleich der Ordnung des Kegels. Wenn der Kegel eine Ebene ist, so ist die kubische Fläche einfach. Darauf werden die Folgerungen aus diesem Satze für die Erforschung der 27 Geraden der Oberfläche und der auf der Oberfläche gezogenen Curven erläutert.

Mn. (Lp.)

W. J. C. Sharp, S. Sircom. Solution of question 10607. Ed. Times LIV. 59-61.

Einige Eigenschaften der Fläche

$$\frac{\varDelta_1}{x}+\frac{\varDelta_2}{y}+\frac{\varDelta_3}{z}+\frac{\varDelta_4}{w}=0,$$

wenn $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$, $\varDelta_4$ die Inhalte der Dreiecksflächen des Coordinatentetraeders bezeichnen. Ausführlich ist diese Fläche untersucht von Eckardt in Math. Ann. V (vergl. F. d. M. IV. 1872. 394ff.). Lp.

R. Mehmke. Ueber die Torsion der Raumcurven dritter Ordnung. Böklen Mitt. IV. 69-70.

Der Torsionsradius einer Curve dritter Ordnung in beliebigem Punkte ist

$$r=\frac{h^2+c^2}{c}=\frac{2h}{\sin 2\varphi}=\frac{c}{\sin 2\varphi},$$

wo h den Abstand dieses Punktes von der „Hauptaxe der Curve" d. h. der Centralaxe des durch sie bestimmten Nullsystems, φ den Winkel zwischen der Hauptaxe und der Schmiegungsebene bezeichnet, und c constant ist. H.

E. Waelsch. Ueber Formen fünfter Ordnung auf der kubischen Raumcurve. Wien. Ber. C. 803-821.

Eine Form f fünfter Ordnung sei durch fünf Punkte einer kubischen Raumcurve repräsentirt. Die niedrigen Covarianten sind dann durch Elementargebilde des Raumes fixirt: die kubischen Covarianten durch Ebenen, die quadratischen durch Sesecanten und die biquadratische Covariante dadurch, dass eine Gerade angegeben wird, welche die vier Tangenten in den Punkten der Covariante schneidet. Ausserdem liegen die beiden wichtigen Covarianten H und T auf einfachen covarianten Flächen der fünf Punkte. Der Verfasser löst nun die Aufgabe, die Covarianten eines vollständigen Systems der Form fünfter Ordnung zu construiren. Für die Invarianten werden diejenigen

Flächen angegeben, welche die Curven dritter Ordnung enthalten, die durch die fünf festen Punkte gehen, und auf welchen diese Punkte eine dem Systeme angehörende, verschwindende Invariante haben. Das hier angenommene vollständige Formensystem weicht nur unwesentlich von dem sonst üblichen ab.

Es ist nicht möglich, hier auf die Details der interessanten Arbeit einzugehen. Doch mögen einige Sätze Platz finden. Vor allem sind drei Flächen zweiter Ordnung von Wichtigkeit, welche sich durch die Involution vierter Ordnung der ersten Polaren der Form fünfter Ordnung ergeben: 1) das „Begleithyperboloid", von welchem die Geraden einer Schar je vier Tangenten der C_3 schneiden, welche nie ein Quadrupel berühren; 2) der Hauptkegel, dessen Erzeugende vier Tangenten von C_3 treffen, welche in den Nullpunkten der Hesse'schen Form eines der Quadrupel berühren; 3) die Hauptfläche, für welche alle durch die Quadrupel der Involution bestimmten Tetraeder Poltetraeder sind. Diese drei Flächen schneiden auf C_3 die Hesse'sche Covariante H der Form f aus und gehören zu einem Büschel.

Durch den Mittelpunkt des Hauptkegels (den Hauptpunkt) gehen alle Ebenen, welche auf C_3 die gemischten zweiten Polaren ausschneiden. Zu jeder solchen zweiten Polare gehört eine Form zweiter Ordnung, nach welcher polarisirt wurde, also eine Sehne von C_3. Die Sehnen von C_3 und die Ebenen des Hauptpunktes sind projectiv auf einander bezogen und erzeugen eine Fläche dritter Ordnung, welche die Ueberschiebungsfläche genannt wird. Hauptsächlich mit Hülfe dieser Gebilde und der ihnen im Nullsystem der C_3 entsprechenden gelingt es dem Verfasser, die geometrischen Bilder aller 23 Covarianten eines vollständigen Systems zu construiren. W. St.

D. Andere specielle Raumgebilde.

G. Humbert. Sur la surface desmique du quatrième ordre. Journ. de Math. (4) III. 353-398.

Nach Herrn Stephanos bilden drei Tetraeder eine desmische

Configuration, wenn die drei Flächen vierter Ordnung, welche aus den Seitenflächen je eines Tetraeders gebildet werden, einem Büschel angehören. Alle Flächen dieses Büschels heissen „desmische Flächen vierter Ordnung“; sie enthalten die 16 Grundgeraden des Büschels. Mit den Eigenschaften einer solchen Fläche S beschäftigt sich der Verfasser. Er zeigt zunächst, dass die Fläche S zwölf Knotenpunkte besitzt, welche zu dreien auf den 16 Geraden liegen und ebenfalls die Punkte einer zweiten desmischen Configuration bilden. Die Arbeit zerfällt in vier Teile.

Der erste Teil beschäftigt sich in rein geometrischer Weise mit den Flächen zweiter Ordnung, welche je zwei Gruppen der Doppelpunkte enthalten und die Fläche S in Raumcurven vierter Ordnung erster Art schneiden. Die Gesamtheit aller Geraden dieser Flächen liefert einen Complex dritten Grades, welcher bekanntlich alle Strahlenfelder der 12 Ebenen der ersten desmischen Configuration sowie alle Strahlenbündel der Ecken der zweiten desmischen Configuration enthält. Er ändert sich nicht, wenn eine Gruppe der 16 Punkte mit einer andern vertauscht wird. Die Flächen zweiter Ordnung der drei sich so ergebenden Flächenbündel schneiden auf S drei Reihen von Curven vierter Ordnung aus. Längs jeder dieser Curven wird S von einer Fläche zweiter Ordnung des betreffenden Bündels berührt. Die Erzeugenden dieser Flächen liefern bekanntlich drei Strahlensysteme zweiter Ordnung sechster Klasse, welche aus Doppeltangenten der S bestehen.

Nach diesen Vorbereitungen werden im zweiten Teile die Coordinaten eines Punktes der Fläche S durch elliptische Functionen zweier Variabeln u und v ausgedrückt, und zwar:

$$\varrho x = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_1 v}, \quad \varrho y = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_2 v}, \quad \varrho z = \frac{\sigma_3 u}{\sigma_3 v}, \quad \varrho t = \frac{\sigma u}{\sigma v}.$$

Als Gleichung der Fläche folgt hieraus:

$$(e_1-e_3)(x^2y^2+z^2t^2)+(e_2-e_1)(x^2z^2+y^2t^2)+(e_3-e_2)(y^2z^2+x^2t^2)=0.$$

Nun werden die Werte von u und v angegeben, welche den Knotenpunkten und den 16 Geraden entsprechen, ferner die Gleichungen der drei Systeme von Curven vierter Ordnung in

u und v. Letztere sind:

$$v = \alpha, \quad u - v = \alpha, \quad u + v = \alpha.$$

Die Parameter von vier Punkten der Fläche, welche auf einem Strahle des desmischen Complexes dritten Grades liegen, stellen sich so dar:

$$\begin{array}{llll} u_1 = \beta + \mu, & u_4 = \beta - \mu, & u_2 = \alpha + \mu, & u_3 = \alpha - \mu; \\ v_1 = \alpha, & v_4 = \alpha, & v_2 = \beta, & v_3 = \beta. \end{array}$$

Die Geraden eines der drei Strahlensysteme bestehen aus den Tangenten je eines der Systeme von Raumcurven vierter Ordnung. Hieraus ergiebt sich, dass die Curvenscharen

$$u = \alpha, \quad v = \alpha,$$

sowie

$$u - v = \alpha, \quad 3v + u = -\alpha,$$

und

$$u + v = \alpha, \quad 3v - u = \alpha$$

conjugirte Curvenscharen der Fläche sind. Die Differentialgleichung der Asymptotenlinien ist somit $du^2 + 3dv^2 = 0$. Also sind diese selbst durch die Gleichungen $u + v\sqrt{-3} = \text{const.}$ und $u - v\sqrt{-3} = \text{const.}$ gegeben.

Alle diese Curven sind durch lineare Gleichungen zwischen u und v dargestellt. Es werden nun alle „linearen Curven“, deren Gleichungen in $gu + hv = \alpha$ gegeben sind, einer allgemeinen Betrachtung unterzogen. Sie zeigen sehr interessante Eigenschaften. In jedem Punkte einer linearen Curve bildet ihre Tangente mit denjenigen der drei durch den Punkt gehenden Curven vierter Ordnung einen Büschel, dessen anharmonische Relation längs der ersten Curve constant ist. Bildet man die Fläche auf die Ebene mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y ab, so dass $u = x\sqrt{3}$, $y = v$ gesetzt wird, so entspricht jeder Geraden der Ebene eine einzige lineare Curve der Fläche, einer linearen Curve aber eine unendliche Anzahl einander paralleler Geraden. Den isotropen Geraden der Ebene entsprechen die Asymptoten der Fläche, zweien senkrechten Geraden zwei in allen Treffpunkten conjugirte lineare Curven. Ist nun ϱ das Doppelverhältnis der Tangenten zweier linearen Cur-

ven, welche sich in einem Punkte von S schneiden, und der beiden durch diesen Punkt gehenden Asymptoten, so wird $\varrho = e^{2i\Theta}$ gesetzt. Θ ist dann der Winkel, welchen die den linearen Curven entsprechenden Geraden der Ebene mit einander bilden, und der „desmischer Winkel" der linearen Curven genannt wird. Es ergiebt sich nun eine Geometrie auf der Fläche, welche mit der euklidischen Geometrie der Ebene in gewissem Sinne übereinstimmt. Einige Beispiele mögen hier Platz finden. Ein desmisches Dreieck der Fläche habe drei lineare Curven zu Seiten. Legt man durch die Ecken eines desmischen Dreiecks die zu den gegenüberstehenden Seiten conjugirten linearen Curven, so gehen diese durch einen Punkt. Sind A und B zwei auf derselben Asymptote gelegene Punkte, so schneidet jede durch A gehende lineare Curve die ihr conjugirte, durch B gelegte in einem Punkte, welcher eine Asymptotenlinie beschreibt.

Unter den Transformationen der Fläche in sich selbst, welche durch lineare Substitutionen der u und v erhalten werden, ist eine von besonderer Wichtigkeit. Sie hat folgende Eigenschaft: Beschreibt der Punkt (u, v) eine beliebige lineare Curve, so beschreibt der transformirte Punkt (U, V) eine lineare, zu der ersten conjugirte Curve. Der einfachste Fall wird gegeben in $U = -3v$, $V = u$.

Der Punkt $(-3v, u)$ heisst dann der Tangentialpunkt von (u, v). Jeder Punkt hat nur einen Tangentialpunkt, ist aber Tangentialpunkt von neun Punkten.

In dem dritten Teile der Arbeit werden die ebenen Schnitte der desmischen Fläche, die sogenannten desmischen Curven vierter Ordnung, studirt; es zeigt sich, dass sie nicht allgemeiner Natur sind. Ihre Haupteigenschaft ist die folgende: Die Punkte des ebenen Schnittes einer desmischen Fläche enthalten unendlich viele Gruppen von je 16 Punkten, durch welche drei Systeme von vier Geraden gehen. Diese Geraden umhüllen die Complexcurve dritter Klasse des oben angegebenen Complexes. Hieraus folgt eine Erzeugung der desmischen Curve. Es sei eine Curve C dritter Klasse sechster Ordnung gegeben. Durch einen Punkt M ihrer Ebene lege man drei Tangenten

an C, von welchen jede noch vier Punkte mit C gemein hat. Die Tangenten von C in diesen 12 Punkten bilden ein desmisches System, d. h. sie schneiden einander zu dreien in 16 Punkten. Beschreibt M eine Gerade, so bewegen sich die 16 Punkte auf einer desmischen Curve vierter Ordnung.

Insbesondere werden die Schnitte der Tangentialebene der Fläche betrachtet, und unter anderen folgende bemerkenswerte Eigenschaft derselben gefunden: Durch den Doppelpunkt der Curve kann man sechs Tangenten an sie legen, deren Berührungspunkte auf zwei Geraden D und D' liegen. Die Geraden D und D' schneiden einander in einem Punkte der Curve, dessen Tangente die Curve in zwei weiteren Punkten schneidet, welche auf den Doppelpunktstangenten liegen.

Der vierte Teil beschäftigt sich mit der Cremona'schen Erzeugung der desmischen Fläche (vergl. Schur im J. für Math. XCV, F. d. M. XV. 1883. 558). Es wird hier folgender Satz bewiesen: Auf einer Fläche dritter Ordnung F seien drei einer Ebene P angehörende Gerade gegeben. Der Ort der Mittelpunkte der Kegel zweiter Ordnung, welche F in drei Kegelschnitten schneiden, deren Ebenen durch die drei Geraden gehen, ist eine desmische Fläche vierter Ordnung. Die 12 Knotenpunkte dieser Fläche sind die nicht in P gelegenen Berührungspunkte der dreifachen Tangentialebenen von F, welche die drei gegebenen Geraden enthalten.

Zum Schlusse wird der besondere Fall betrachtet, in welchem die Coordinaten der Punkte der desmischen Fläche durch trigonometrische Functionen zweier Variabeln darstellbar sind. Dann ist:

$$\varrho x = \sin\alpha, \quad \varrho y = \sin\beta, \quad \varrho z = \sin\gamma, \quad \varrho t = \sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma$$

mit der Bedingung $\alpha+\beta+\gamma=0$. W. St.

. Cardinaal. Constructie der oppervlakken van den vierden graad met dubbelkegelsnede door middel van projectivische bundels oppervlakken van den tweeden graad. Amst. Versl. en Meded. (3) VIII. 88-146.

Werden zwei projectivische Büschel von Flächen zweiter Ordnung angenommen, deren Basiscurven in je zwei Kegelschnitte übergegangen sind, und werden zwei nicht zu der nämlichen Basiscurve gehörige Kegelschnitte zur Coincidenz gebracht, so beschreibt der Durchschnitt homologer Elemente der beiden Büschel eine Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt d^2. Zweck des Verfassers ist, die Hauptformen dieser Flächen zu bestimmen.

Wählt man aus jedem Büschel von Flächen zweiter Ordnung zwei beliebige heraus, so bestimmen die vier erhaltenen Flächen ein Gebüsch von Flächen zweiter Ordnung im Raume R. Die Polarebenen eines festen Punktes in Bezug auf die Flächen des Gebüsches bilden ein Gebüsch von Ebenen im Raume R_1, welches mit jenem Flächengebüsch in projectivischer Verbindung steht. Mit der Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt O^4 in R correspondirt bei dieser Verwandtschaft zweiten Grades eine Fläche zweiter Ordnung O_1^2 in R_1. Mit den Kegelflächen des Gebüsches im Raume R, deren Scheitel die Kernfläche K^3 bilden, correspondiren in R_1 Ebenen, welche eine Fläche zweiter Klasse K_1^2 berühren.

Bei der Klassification werden zunächst drei Gruppen unterschieden, je nachdem der Kegelschnitt d^2 ein reeller oder imaginärer Kegelschnitt ist, in zwei sich schneidende oder imaginäre Gerade entartet, oder aus zwei zusammenfallenden Geraden besteht. Jede Gruppe zerfällt in acht Unterabteilungen. In Bezug auf das Flächengebüsch können nämlich die zwei Fälle unterschieden werden, wenn dasselbe keiner besonderen Bedingung genügt, oder wenn alle Flächen ausser dem Doppelkegelschnitt einen gemeinsamen Punkt enthalten; Fälle, die mit den Zeichen w und p bezeichnet werden mögen. Bei der Regelfläche O^2, welche bei willkürlicher Gestalt und Lage mit w' bezeichnet wird, können die beiden speciellen Fälle, wo dieselbe in eine Kegelfläche übergeht, oder eine besondere Lage im Raume R_1 einnimmt, durch die Zeichen k, b unterschieden werden. Es lassen sich sodann jene Unterabteilungen schematisch, wie nachstehend, darstellen:

Fall	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Flächengebüsch	w	p	w	w	p	p	w	p
Regelfläche O_1^2	w'	w'	k	b	b	k	k, b	k, b.

In jedem dieser Fälle werden die Lage der Flächen K^2, K_1^2 und die Curven auf der erzeugten Fläche vierter Ordnung untersucht. Von den besonderen Lagen der Fläche O_1^2 im Raume R_1 werden dreizehn unterschieden, je nachdem O_1^2 die Fläche K_1^2 berührt oder in speciellen Curven schneidet.

Mit einigen Bemerkungen über Regelflächen vierter Ordnung und über Cykliden schliesst die Abhandlung. Mo.

J. C. Kluyver. Over de buigraaklijnen eener ruimtekromme van den vierden graad en de eerste soort. Amst. Versl. en Meded. (3) VIII. 346-380.

Die Durchschnittscurve R_4 zweier Flächen zweiten Grades besitzt bekanntlich sechzehn Inflexionspunkte, welche zu je vier in den Ebenen des gemeinsamen Quadrupels der beiden Flächen liegen, und die zu den in einer Ebene enthaltenen Inflexionspunkten gehörigen Inflexionstangenten werden erhalten, indem man diese Punkte mit der gegenüberliegenden Ecke der gemeinsamen Polarvierseite verbindet. Dadurch zerfallen die sechzehn Inflexionstangenten naturgemäss in vier Gruppen. Wählt man aus jeder Gruppe eine einzige Tangente heraus, so bezweckt die Abhandlung die Beantwortung der Frage, ob zwischen denselben eine Relation stattfindet. Es zeigt sich, dass dies in der That zutrifft, so dass die Aufgabe, eine R_4 zu construiren, welcher vier beliebig gegebene Gerade als Inflexionstangenten zugehören, entweder unmöglich oder unbestimmt ist.

Die Coordinaten eines Punktes der R_4 werden nach Halphen mittels der Function $\wp u$ von Weierstrass dargestellt, wie nachstehend:

$$(1) \qquad \frac{x_1}{\wp''u} = \frac{x_2}{\wp'u} = \frac{x_3}{\wp u} = \frac{x_4}{1}.$$

Weiter werden homogene Liniencoordinaten $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ ein-

geführt und die zweien Geraden p_{ik}, p'_{ik} zugehörige Invariante

$$p_{23}p'_{14}+p_{14}p'_{23}+p_{12}p'_{34}+p_{34}p'_{12}+p_{13}p'_{24}+p_{24}p'_{13}$$

für den Fall, dass diese Geraden Tangenten der R_4 sind, mittels (1) transformirt. Vier Tangenten in Punkten der Curve mit den Argumenten u_1, u_2, u_3, u_4 haben sechs derartige Invarianten, welche mit (23), (31), ... bezeichnet werden, und eine Relation zwischen jenen Tangenten kann nur die Grössen

$$a = (23)(14), \quad b = (31)(24), \quad c = (12)(34)$$

enthalten.

Sind nun u_1, u_2, u_3, u_4 die Argumente der Berührungspunkte der vier Inflexionstangenten t_1, t_2, t_3, t_4, welche untersucht werden sollen, so ergiebt sich, dass dieselben einer der nachstehenden Relationen genügen müssen:

$$u_2+u_3 = u_1+u_4, \quad u_3+u_1 = u_2+u_4, \quad u_1+u_2 = u_3+u_4,$$
$$u_1+u_2+u_3+u_4 = 0.$$

Der letzte symmetrische Fall wird zunächst eingehend behandelt. Für die gesuchte invariante Beziehung ergiebt sich

$$a+b+c = 0.$$

Sind nun t_1, t_2, t_3 beliebig, aber fest gewählt, so werden alle Geraden t_4, welche dieser Bedingung genügen, einem linearen Complexe angehören, welcher mittels der Durchschnittspunkte von t_4 mit der Regelschar (t_1, t_2, t_3) construirt wird.

Vier windschiefe Gerade besitzen im allgemeinen zwei gemeinsame Secanten f', f''. Die Durchschnittspunkte auf jeder dieser Secanten bestimmen zu je vier zwei binäre biquadratische Formen, welche absolute Invarianten A', A'' haben. Sind nun jene windschiefen Geraden Inflexionstangenten der R_4, so besteht die nachstehende Beziehung zwischen A', A'' und der absoluten Invariante A der Curve:

$$A = \left(\frac{A'}{A'-2}\right)^2 = \left(\frac{A''}{A''-2}\right)^2.$$

Specieller werden noch die Fälle $A = 0$, $A = \infty$, $A = 1$ betrachtet. Behufs Construction einer R_4, welche vier gegebene Gerade, die der Bedingung $a+b+c=0$ genügen, als Inflexionstangenten angehören, werden allgemein vier Tangenten der R_4 betrachtet, deren Berührungspunkte in einer Ebene ent-

halten sind; dieselben bilden sodann eine „Gruppe associirter Berührungspunkte". Zwischen jenen Tangenten und den sechs Verbindungsgeraden der Berührungspunkte findet eine invariante Beziehung statt von der Form

$$\frac{(12)(13)}{(24)(34)} = \left[\frac{(1a)}{(4a)}\right]^2,$$

wo mit $(1a)$ die Invariante der Geraden t_1 und der Verbindungsgeraden der Berührungspunkte auf t_2 und t_3 bezeichnet ist. Demzufolge kann jede Verbindungsgerade zwei Hyperboloide beschreiben. Die Eigenschaften der so erhaltenen zwölf Hyperboloide werden untersucht; es ergiebt sich, dass aus den sechs Paaren dieser Flächen auf vier Weisen je eines derart gewählt werden kann, dass das Flächenpaar eine gemeinsame Directrix y hat, woraus sich der Satz herleiten lässt: Die Ebenen, welche vier gegebene Gerade in vier associirten Berührungspunkten schneiden, haben vier gemeinsame Gerade y; und diese Beziehung ist eine involutorische, d. h., wie jede Ebene durch eine Gerade y auf der Geraden t vier associirte Berührungspunkte bestimmt, so schneidet auch jede Ebene durch eine Gerade t das System y in vier derartigen Punkten. Sodann werden Constructionen angegeben für Curven R_4, welche vier gegebene Gerade in vier in einer Ebene enthaltenen Punkten berühren, und für solche Curven, zu denen vier der Bedingung $a+b+c=0$ genügende Gerade Inflexionstangenten sein können.

In den Fällen, wo keine Symmetrie zwischen den Argumenten $u_1, \dots, u_4$ besteht, erhält die invariante Beziehung die verwickeltere Gestalt

$$(a+b+c)^4 = 64a^2bc,$$

welche auch geometrisch gedeutet wird. Mo.

Fr. Meyer. Ueber Realitätsverhältnisse auf Raumcurven vierter Ordnung zweiter Species. Böklen Mitt. IV. 99-103.

Die einfachsten Singularitäten, welche diese Curven besitzen, sind die vier stationären Ebenen und die vier Tangenten, welche die Curve nochmals treffen. Ist α der Parameter der Curve,

so sind die Parameter der stationären Ebenen die Wurzeln einer beliebig gegebenen Gleichung vierten Grades $\varphi = 0$, und diejenigen der Berührungspunkte der singulären Tangenten die Wurzeln der Hesse'schen Form von φ. Mittels Uebergangsbetrachtungen findet der Verfasser folgende Sätze: Bezeichnet w' die Anzahl der reellen stationären Ebenen und d' die der reellen Trefftangenten, so ändert sich die Summe $w'+d'$ beim Durchgange durch eine Curve mit stationärer Tangente nicht, dagegen beim Durchgange durch eine Curve mit Doppelpunkt entweder auch nicht, oder aber um ± 4.

Es ergeben sich hiernach vier Hauptklassen für reelle rationale Raumcurven, welche durch $w' = 4$, $d' = 0$; $w' = 2$, $d' = 2$; $w' = 0$, $d' = 4$; $w' = 0$, $d' = 0$ charakterisirt sind. W. St.

F. Machovec. Ueber die Osculationsebenen der Durchschnittscurve zweier Flächen zweiter Ordnung. Prag. Ber. 1890. 6 S. 8°.

U. Forcke. Curven auf der Kugeloberfläche. Pr. (No. 296) Gymn. Hameln. 17 S. 4°.

Voraus geht eine sphärische Coordinatentheorie. Die Coordinaten x, y sind die geographische Länge und Breite. Es werden die analytischen Ausdrücke und Gleichungen für Punkte, Normalkreise, Kreise und deren Tangenten entwickelt. Dann wird die sphärische Parabel als Ort der Punkte, die von einem festen Punkte und einem Normalkreise gleiche Entfernung haben, definirt, ihre Gleichung vom Scheitel und vom Mittelpunkte (der um $\frac{1}{4}\pi$ davon absteht) aus sowie ihre Polargleichung entwickelt und ihre Tangente bestimmt; dann die sphärische Ellipse und Hyperbel als Orte der Punkte, die von zwei festen Punkten constante Summe, bezw. Differenz der Abstände haben, definirt, ihre Gleichungen, Leitstrahlen, Leitlinie, conjugirte Durchmesser, Asymptoten und Polargleichung erklärt und berechnet, schliesslich ihre Uebereinstimmung, die Parabel, der Specialfall, ans Licht gestellt. H.

A. DEL RE. Di cinque superficie del 5⁰ ordine con rette semplici e doppie ed una retta tripla. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII₂. 11-18.

Die fraglichen Flächen können auf verschiedene Weise erzeugt werden, z. B. als Fundamentalflächen specieller Raumconnexe erster Ordnung und zweiter Klasse:

$$(1) \qquad \varphi = q_x u_\alpha^2 - p_x u_\beta^2 = 0,$$

wo

$$s_k = \sum_1^4 s_i x_i, \quad u_\gamma = \sum_1^4 u_i \gamma_i \qquad (s \equiv p,\, q;\; \gamma \equiv \alpha,\, \beta)$$

ist, und $p_x = 0$, $q_x = 0$ zwei Ebenen sind, die durch die singuläre Gerade gehen, welche dieser specielle Connex besitzt. Die Gleichung des Connexes wird erfüllt durch die beiden Gleichungen:

$$(2) \qquad \lambda u_\alpha^2 + \mu u_\beta^2 = 0,$$

$$(3) \qquad \lambda p_x + \mu q_x = 0,$$

durch welche die Flächen zweiten Grades des Connexes projectivisch auf seine Ebenen bezogen werden.

Hieraus ergiebt sich sofort die Gleichung der Flächen in der Form:

$$(4) \qquad \sum_{i,k} \tau_{ik} x_i x_k = 0 \equiv \Phi,$$

wo τ_{ik} die complementäre Unterdeterminante des Elementes

$$t_{ik} = q_x \alpha_i \alpha_k - p_x \beta_i \beta_k$$

in der Determinante $D = | t_{ik} |$ ist.

Aber es folgt daraus auch, dass jedem Punkte x_i, der auf einem Schnitte einer Ebene (3) mit der ihr entsprechenden Fläche (2) liegt, diese Fläche durch den Connex zugeordnet ist, und umgekehrt.

Nach einer allgemeinen Untersuchung der in der Gleichung (4) enthaltenen Flächen, welche die singuläre Gerade des Connexes zur dreifachen Linie haben, wird der Fall untersucht, dass die Punkte x_i die Gleichung $D = 0$ befriedigen. Dann degenerirt die entsprechende Fläche zweiten Grades, und es ergeben sich fünf specielle Flächen Φ. Die eine derselben besitzt weitere vier ein-

fache Gerade, längs welchen die Tangentialebene fest bleibt; drei andere dieser Flächen Φ besitzen noch je eine Doppelgerade und bezüglich 3, 2, 1 einfache, und die letzte derselben hat ausser der dreifachen noch zwei Doppelgerade.

Die Gleichungen dieser interessanten Flächen werden in entwickelter Form gegeben und dann noch einige Ausartungen derselben besprochen. Bm.

A. DEL RE. Su una superficie del 5⁰ ordine dotata di una retta tripla, di rette doppie e di rette semplici. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII₂. 111-119.

Diese Note ist eine Fortsetzung der im vorhergehenden Referate besprochenen und behandelt diejenige der Flächen Φ, welche ausser der allen gemeinsamen dreifachen Geraden noch zwei Doppelgerade hat. Statt des Connexes sich zu bedienen, verwendet der Verfasser zur Untersuchung dieser Fläche Φ_3 die drei simultanen Gleichungen:

$$(\pi) \equiv \lambda u_\alpha + \mu u_\beta + \nu u_\gamma = 0,$$
$$(\pi') \equiv \lambda u_{\alpha'} + \mu u_{\beta'} + \nu u_{\gamma'} = 0,$$
$$(\nu) \equiv \lambda p_x + \mu q_x = 0,$$

in denen λ, μ, ν beliebige veränderliche Parameter sind. Φ_3 kann dann betrachtet werden als der Ort der Schnittpunkte des durch (π), (π') dargestellten Systems von Geraden mit den Ebenen eines Strahlenbündels, die reciprok auf sie bezogen sind.

Weiter bedient sich der Verfasser zur Untersuchung der Fläche einer Abbildung auf die Ebene (π), welche durch die Gleichungen

$$z_i \equiv (\lambda\alpha_i + \mu\beta_i + \nu\gamma_i)\psi' - (\lambda\alpha_i' + \mu\beta_i' + \nu\gamma_i')\psi$$
$$(i = 1, \ldots, 4)$$

vermittelt wird. Darin ist

$$\psi = p_\alpha\lambda^2 + q_\beta\mu^2 + (p_\beta + q_\alpha)\lambda\mu + q_\gamma\mu\nu + p_\gamma\nu\lambda,$$
$$\psi' = p_{\alpha'}\lambda^2 + q_{\beta'}\mu^2 + (p_{\beta'} + q_{\alpha'})\lambda\mu + q_{\gamma'}\mu\nu + p_{\gamma'}\nu\lambda.$$

Diese Abbildung ergiebt mehrere interessante Resultate, von denen wir nur das eine anführen, dass die Fläche sechs verschiedene Scharen von Kegelschnitten besitzt.

An die Untersuchung dieser Abbildung knüpft der Verfasser einige Betrachtungen allgemeinerer Natur an, die zwar unabhängig von der Fläche Φ_5 sind, aber sich unmittelbar an das Studium derselben anschliessen. Zu bemerken ist noch, dass die hier behandelte Fläche bereits in der Arbeit des Herrn Cremona: Sulle trasformazioni birazionali dello spazio (Lomb. Ist. Rend. 1871, F. d. M. III. 1871. 429) sich findet. Bm.

A. Wiman. Klassifikation af regelytorna af sjette graden. Diss. Lund. 1892.

Der Verf. bezweckt eine Einteilung der Regelflächen sechsten Grades R_6 nach der Beschaffenheit der Doppelcurve. Dabei benutzt er Methoden, die von denjenigen, welche Hr. H. A. Schwarz in seiner Arbeit „Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades“ (J. für Math. LXVII.) angewandt hat, principiell verschieden sind.

Die Untersuchung einer R_6 wird durch die Abbildung des einfachsten Complexes, welchem die R_6 angehört, auf den Punktraum eingeleitet, wodurch naturgemäss die Regelfläche in eine Curve transformirt wird. Die Erleichterung der Aufgabe beruht nun darin, dass in den betrachteten Fällen die Complexkegel stets in Gerade übergeführt werden, welche einen gewissen leicht zu bestimmenden Complex bilden. Wie man leicht einsieht, wird dadurch die Doppelcurve der R_6 in die Bisecantenregelfläche der Bildcurve, welche diesem Complexe angehört, abgebildet. Das Studium solcher Bisecantenregelflächen beschäftigt hauptsächlich den Verf. in der vorliegenden Arbeit, und die Resultate werden sodann auf die Doppelcurve übertragen.

Bei der Abbildung muss man natürlich die Fundamentalgebilde in der Art wählen, dass die Bildcurve auf den niedrigsten Grad sinkt. Dieser liegt zwischen 3 und 5.

Als Hülfscomplex kann man stets einen tetraedralen benutzen, da ein solcher ja erst durch dreizehn Bedingungen bestimmt wird. Diesem Complexe kann man bekanntlich den Punktraum mittels eines Flächenbüschels zweiten Grades sehr einfach entsprechen lassen; der Complex wird nämlich von den Polargeraden der

Punkte gebildet, und die genannte Bisecantenregelfläche muss demselben angehören. Diese Abbildung wird beim Studium der R_6 mit Leitgeraden benutzt, da der Tetraedralcomplex in einen speciellen linearen übergeht, und eine der Flächen des Büschels in zwei Ebenen degeneriren muss.

Wenn ein allgemeiner linearer Complex die R_6 enthält, wird jener in den Punktraum durch Noether's Transformation abgebildet; die Bisecantenregelfläche hat einen Kegelschnitt als Leitcurve. Umgekehrt wird bei der Abbildung eines Kegelschnittcomplexes die Bisecantenregelfläche einem allgemeinen linearen Complexe angehören. Von den R_6 ohne Leitgerade werden nur diejenigen, die in einen von diesen beiden Complexen eingeben, besonders behandelt.

Der Verf. unterscheidet folgende Anzahl-Arten:

	$p=0$	$p=1$	$p=2$
Mit einer Leitgeraden:	32	18	7.
Ohne Leitgerade:	36	11	2.

Wir sehen somit, dass die R_6 ohne zwei Leitgerade höchstens das Geschlecht $(p)2$ haben.

Im Anfang der Arbeit werden einige allgemeine Sätze aus der von Cayley und Salmon u. a. entwickelten Theorie der reciproken Flächen hergeleitet, namentlich die Bestimmung der Anzahl dreifacher Punkte (t) und des Geschlechts (P) der Doppelcurve einer Regelfläche durch die Ordnung (n), das Geschlecht (p) und die Zahl wirklicher Doppelpunkte (f) der Fläche, und zwar wird erhalten:

$t = \frac{1}{6}(n-4)[(n-2)(n-3)-6p]$; $P = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)+p(n-5)-f$.

Man sieht hieraus, dass $p \leqq \frac{1}{6}(n-2)(n-3)$ sein muss, weil sonst $t<0$. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, dass die Fläche keine dreifache Curve habe.

Entsprechende Formeln werden für Regelflächen mit einer Leitgeraden entwickelt. Verf.

R. Glaser. Ueber die Minimalflächen. Inaug. Diss. Tübingen. H. Laupp jr. 42 S. 8°.

Der Verfasser hat in der Bestimmung der Minimalflächen

nach der Lie'schen Methode gewisse Vereinfachungen und Erweiterungen vorgenommen, durch welche sich manche Untersuchungen übersichtlicher durchführen lassen als bisher.

Die Bestimmung einer Minimalfläche lässt sich bekanntlich zurückführen auf diejenige der zugehörigen Minimalcurve. Diese aber wird wieder bestimmt durch eine gewisse ebene Curve. Diese letztere aber wird vom Verf. in gewisser Weise transformirt, ohne dass dabei die Minimalcurve sich ändert. Bei dieser Transformation muss der unendlich entfernte Kugelkreis invariant bleiben. Die Minimalcurve selbst wird mittels reciproker Radien transformirt, und dadurch wird eine Erzeugungsweise dieser Curven gewonnen. Auf Grund dieser Betrachtungen werden Ordnung, Rang und Klasse der algebraischen Minimalflächen bestimmt. Darauf wird die Abbildung dieser Flächen besprochen; es werden die Doppelflächen, die unendlich fernen Curven derselben, die Knoten der Fläche und gewisse Strahlensysteme untersucht; ferner werden Minimalcurven mit einer Schar algebraischer Curven betrachtet.

Der zweite Abschnitt der Arbeit behandelt speciell die Enneper'sche Fläche neunter Ordnung, alle Minimalcurven vierter Klasse, vierter, fünfter und sechster Ordnung und einige andere specielle Fälle. A.

A. Schönflies. Sur les surfaces minima limitées par quatre arêtes d'un quadrilatère gauche. C. R. CXII. 478-480.

A. Schönflies. Sur les équations de deux surfaces minima périodiques, possédant la symétrie de l'octaèdre. C. R. CXII. 515-518.

Herr H. A. Schwarz hat in den C. R. XCVI. 1011 (F. d. M. XV. 1883. 643) den Satz ausgesprochen, dass unter den durch ein windschiefes Viereck gelegten Minimalflächen fünf periodische sind. Alle diese Flächen besitzen die Symmetrie des Oktaeders.

Der Verfasser ist zu dem Resultate gelangt, dass es nicht fünf, sondern sechs solcher periodischen Minimalflächen giebt, und er beweist dies in der ersten Note durch die Anwendung der Gruppen von Raumtransformationen.

In der zweiten Abhandlung stellt der Verfasser diese Flächen mit Hülfe von ϑ-Functionen in einer sehr übersichtlichen Form dar, durch welche die Symmetrie sogleich in Evidenz tritt.

A.

M. Peche. Analytische Bestimmung aller Minimalflächen, welche eine Schar reeller Parabeln enthalten. Inaug.-Diss. Göttingen. Dieterich (W. Fr. Kaestner). 36 S. gr. 8°.

Die philosophische Facultät in Göttingen hatte 1886 die Preisaufgabe gestellt, alle Minimalflächen zu bestimmen, welche eine Schar reeller Curven zweiten Grades enthalten, und dieselben in Bezug auf ihre wichtigeren Eigenschaften zu untersuchen.

Eine Lösung ist versucht von Relander [Helsingfors 1888, Bestimmung der Minimalflächen, welche ...]; doch ist dieser Versuch nicht völlig gelungen. Der Verfasser hat die Lösung durchgeführt für den Fall, dass die Kegelschnitte Parabeln oder Hyperbeln sind, und zwar im ersteren Falle mit Hülfe eines ihm von Herrn Schwarz mitgeteilten Satzes.

Er gelangt zu folgenden Resultaten: Die einzigen Minimalflächen mit einer Schar reeller Parabeln sind die Enneper'sche Fläche und als Specialfälle hiervon die Catalan'sche und die Schraubenfläche. Minimalflächen mit einer Schar reeller Hyperbeln existiren nicht, wenn man vom Grenzfalle der Schraubenfläche absieht. Alle hier aufgezählten Flächen sind als Special- oder Grenzfälle enthalten in den von Herrn Schwarz bestimmten Minimalflächen, welche von einer Schar von Kegeln zweiten Grades eingehüllt werden.

A.

Hj. Tallqvist. Bestimmung der Minimalflächen, welche eine gegebene ebene oder sphärische Curve als Krümmungscurve enthalten. Acta Soc. Fennicae (Helsingfors). XVII. 475-489.

Wenn eine krumme Fläche eine ebene oder sphärische Krümmungscurve besitzt, so bildet bekanntlich die Flächen-

normale mit der Osculationsebene der Curve einen constanten Winkel ω. Zufolge dieses Satzes reducirt sich die im Titel angegebene Aufgabe auf einen Specialfall des von Hrn. H. A. Schwarz gelösten Problems, eine Minimalfläche zu bestimmen, welche durch eine gegebene Curve geht, und deren Normale längs dieser Curve nach einem gegebenen analytischen Gesetze ihre Lage ändert. Und zwar bekommt man, den verschiedenen Werten von ω entsprechend, eine ganze Schar von Minimalflächen, welche eine gegebene Curve der fraglichen Art als Krümmungscurve enthalten. Ihre analytische Darstellung leitet der Verf. aus den von Hrn. Schwarz gegebenen allgemeinen Formeln her und wendet nachher die Resultate auf einige einfache Specialfälle an (die gegebene Curve Kreis, Parabel, ebene und sphärische Ellipse). Bdn.

R. Nicodemi. Intorno alle superficie luoghi di cerchi che da un dato punto si projettano sopra un dato piano in cerchi e soddisfano ad altre condizioni. Atti dell' Accademia Pontaniana. XXI. 109-127.

Die Kreise φ einer Ebene π, welche von einem gegebenen Punkte O auf eine gegebene Ebene ω als Kreise ψ projicirt werden, bilden einen Büschel; diejenigen unter ihnen, welche eine neue einfache Bedingung B erfüllen, sind daher in endlicher Zahl vorhanden. Wenn also die Ebene π eine stetige, einfach unendliche Reihe von Lagen annimmt, so erfüllen die Kreise φ, welche der Bedingung B genügen, eine gewisse Fläche Σ. Der Verf. lehrt eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Gleichung von Σ und wendet dieselbe auf die folgenden Fälle an:

I. Die Ebene π beschreibt einen Büschel, und die Kreise ψ sollen denselben Radius haben. Σ ist dann eine Fläche sechster Ordnung, welche als Doppellinien den imaginären Kugelkreis und die Axe des Büschels hat; der Ort der Kreise φ, aus denen Σ besteht, ist eine Curve vierter Ordnung, welche der Durchschnitt eines Rotations- und eines parabolischen Cylinders ist.

II. Die Ebene π bewegt sich um eine auf ihr nicht befind-

liche und auf ω senkrechte Gerade e, und die Kreise ψ haben noch alle denselben Radius.

III. Die Ebene π bewegt sich wie im vorigen Falle, und die Kreise φ haben alle denselben Radius. Σ ist eine Fläche sechster Ordnung, welche e und den imaginären Kugelkreis als Doppellinien hat.

IV. Die Ebene π bewegt sich wie in den zwei vorigen Fällen, und die Kreise φ treffen eine durch O gehende Gerade f. Σ ist eine Fläche dritter Ordnung, welche durch e und f geht und O als Doppelpunkt hat.

Der Leser erkennt ohne Zweifel die grosse Aehnlichkeit des Themas und der Methoden der vorliegenden Abhandlung mit derjenigen desselben Verfs., über die wir schon früher berichtet haben (F. d. M. XX. 1888. 575). La.

Ch. Bioche. Sur une classe de surfaces gauches.
S. M. F. Bull. XIX. 120.

Es sollen unter den Regelflächen, deren Erzeugende einem linearen Complexe angehören, diejenigen bestimmt werden, deren asymptotische Linien sich durch Homographie in einander transformiren. Ihre allgemeine Gleichung ist:

$$ay = xz + F(z).$$

H.

G. Pirondini. Sulle linee d'ombra di alcune superficie.
Batt. G. XXIX. 356-378.

Schattenlinie heisst eine Linie, längs welcher eine Fläche von einem Kegel oder Cylinder (von beliebiger Leitlinie) berührt wird. Das Gegenwärtige bezieht sich auf Helikoide (vgl. Annali di Mat. (2) XVI. 137, F. d. M. XX. 1888. 830), Regelflächen für Rotationskegel als Leitkegel, parallele Flächen und die inversen Flächen der genannten. Es werden teils allgemein, teils für besondere Fälle die Gleichungen der Schattenlinien berechnet.

H.

B. Gustawicz. Theorie der loxodromischen Curve und des loxodromischen Dreiecks mit Anwendung auf Kartographie und Auflösung nautischer Probleme.
Pr. Krakau. 45 S. (Polnisch.)

P. Sveschnikow. Epitrochoidale Flächen. Verallgemeinerung der Eigenschaften der epitrochoidalen Flächen.
Kasan Ges. (2) I. No. 2. 166-177 u. 178-184. (Russisch.)

Eine epitrochoidale Curve ist eine sphärische Curve, beschrieben durch einen Punkt der Ebene eines Kreises, der ohne Gleiten auf einem andern rollt, indem die Ebenen dieser zwei Kreise einen constanten Winkel bilden. Ihre Gleichung wird vom Verfasser in folgender Form gegeben:

$$(1)\quad \begin{cases} x = a[n\cos\varphi+(1-\mu\cos n\varphi)\cos\alpha\cos\varphi+\mu\sin n\varphi\sin\varphi], \\ y = a[n\sin\varphi+(1-\mu\cos n\varphi)\cos\alpha\sin\varphi-\mu\sin n\varphi\cos\varphi], \\ z = a(1-\mu\cos n\varphi)\sin\alpha. \end{cases}$$

Hier ist a der Radius des rollenden Kreises, na der des festen, μa die Entfernung des die Curve beschreibenden Punktes vom Mittelpunkte des rollenden Kreises, α der constante Winkel der Ebenen beider Kreise.

Giebt man dem α alle Werte von 0 bis 2π, so erhält man als geometrischen Ort aller so erzeugten Curven die epitrochoidale Fläche. Mittels Transformation durch reciproke Radien wird diese Fläche in eine Cylinderfläche verwandelt, und man kann also aus jeder Eigenschaft der letzteren die entsprechende der ersteren ableiten.

Wenn $\mu = 1$ ist, erhalten wir die vom Verfasser früher (F. d. M. XXII. 1890. 809) betrachteten epicykloidalen Linien und Flächen.

Im zweiten Aufsatze wird die Aufgabe in der Weise verallgemeinert, dass man statt der Kreise zwei beliebige ebene Curven nimmt. Si.

L. Raffy. Sur une classe de surfaces harmoniques.
C. R. CXII. 424-426.

Beweis des Satzes: Jede harmonische Fläche, deren Linien gleicher Krümmung parallel sind, ist auf eine Umdrehungsfläche abwickelbar. A.

L. Raffy. Sur la déformation des surfaces spirales. C. R. CXII. 850-852, S. M. F. Bull. XIX. 65-68.

Wenn für eine Fläche das Quadrat des Linienelementes in beliebigen Parametern gegeben ist, so soll untersucht werden, ob es Spiralflächen giebt, welche dieses Linienelement besitzen.

Der Verfasser drückt die totale Krümmung durch $-2e^{\vartheta}$ aus, bedient sich aber im übrigen der Darboux'schen Bezeichnung für die Differentialparameter (Darboux, Théorie des surfaces, Livre VII., Chap. I.) und giebt ohne Beweis folgendes Resultat: Man bilde die Invariante (1) $e^{-\vartheta}\Delta\vartheta$; falls dieselbe nicht constant ist, bilde man die beiden Invarianten

$$(2)\quad \frac{\Theta(e^{-\vartheta}\Delta\vartheta,\vartheta)}{\Delta(e^{-\vartheta}\Delta\vartheta)} \quad \text{und} \quad (3)\quad \frac{\Delta_2(e^{-\vartheta}\Delta\vartheta)}{\Delta(e^{-\vartheta}\Delta\vartheta)},$$

deren jede eine Function von $e^{-\vartheta}\Delta\vartheta$ ist. Wenn $e^{-\vartheta}\Delta\vartheta$ constant ist, bilde man (4) $e^{-\vartheta}\Delta_2(\vartheta)$. Ist auch diese Invariante constant, so ist das Linienelement ein solches von Spiralflächen und von Umdrehungsflächen. Ist (4) nicht constant, so bilde man die Invariante

$$(5)\quad \frac{\Theta(e^{-\vartheta}\Delta_2\vartheta,\vartheta)}{\Delta(e^{-\vartheta}\Delta\vartheta)},$$

welche auch wieder Function von (1) ist. Setzt man die Zähler von (2) und (5) Null, so erhält man die specifischen Charaktere der Flächen, welche auf Umdrehungsflächen abwickelbar sind.

Auf diese Formeln gründet der Verfasser alsdann die Aufsuchung derjenigen Linienelemente, welche zugleich Spiralflächen und Umdrehungsflächen angehören. A.

L. Raffy. Sur la détermination des surfaces spirales d'après leur élément linéaire. C. R. CXII. 1421-1424.

In der Note wird eine Gleichung entwickelt zur Darstellung derjenigen Spiralflächen, welche auf eine gegebene abwickelbar

sind, deren es nach einem Satze des Herrn Maurice Lévy stets eine zweifach unendliche Schar giebt, und es werden einige Fälle besprochen, in welchen die Integration gelingt. A.

L. Raffy. Sur les spirales harmoniques. C. R. CXII. 518-521.

Das Quadrat des Linienelementes einer Fläche, welche zugleich spiral und harmonisch ist, hat eine der drei Formen:

$$ds^2 = (au^m + bv^m)(du^2 + dv^2),$$
$$ds^2 = (e^{au} + e^{bv})(du^2 + dv^2),$$
$$ds^2 = (\ln au + \ln bv)(du^2 + dv^2),$$

deren beide letzten durch Grenzbetrachtungen aus der ersten entstehen. A.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

B. K. Mlodzieiowski. Ueber mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten. Mosk. Nachr. Phys.-Math. Abt. B. VIII. 1-155. (1889, Russisch.)

Nach der Einleitung bietet die Arbeit Anwendungen der in des Verfs. „Untersuchungen über die Biegung der Flächen" (ibid., B. VII.) verwerteten Methode auf die betreffenden Teile der Mannigfaltigkeitslehre. Die Untersuchungen betreffen die analytische Theorie und schliessen sich an Riemann's berühmte Abhandlungen: „Ueber die Hypothesen ..." und „Comm. math...." an. Im ersten Capitel werden die Begriffe der Entfernung zweier Punkte einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, dann ihres Linienelements, wie auch des von Beltrami eingeführten Winkels zweier Linienelemente aufgestellt. Dass das Quadrat ds^2 des Linienelements eine quadratische Form der dx_i ist, gilt dem Verfasser, wie bei Riemann, als eine Hypothese.

Im zweiten Capitel werden Differentialinvarianten aufgestellt und deren gegenseitige Beziehungen untersucht. Indem man

statt $x_1, \ldots, x_n$ als neue Veränderliche n willkürliche Functionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ einführt, erhält man $\frac{1}{2}n(n+1)$ Differentialinvarianten dieser φ, welche sich sämtlich ausdrücken lassen durch

$$\Delta_1(\varphi_p) = \sqrt{\Sigma A_{ik} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_k}},$$

wo die A_{ik} die Unterdeterminanten der Determinante $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$ der Coefficienten des Linienelements $ds^2 = \Sigma a_{ik} dx_i dx_k$ bezeichnen und

$$\nabla(\varphi_r, \varphi_q) = \sum_{l,m} A_{l,m} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial \varphi_q}{\partial \varphi_m}$$

ist. Der zweite Differentialparameter Δ_2, durch die Methode Beltrami's erhalten, wird auch durch Δ_1 und ∇ ausgedrückt. Zur Erläuterung der Eigenschaften der Δ_1, ∇ und Δ_2 beweist der Verf. Analoga des Green'schen Satzes:

$$\int^{(n)} \nabla(\varphi, \psi) dN_n = \int^{(n-1)} \psi \frac{d\varphi}{dn_0} dN_{n-1} - \int^{(n)} \psi \Delta_2(\varphi) dN_n$$

und löst das Problem der Minimalfläche von $n-1$ Dimensionen zwischen gegebenen festen Grenzen. Die Gleichung dieser Fläche wird als Invariante dargestellt:

$$\Delta_1(\varphi) \cdot \Delta_2(\varphi) - \nabla[\varphi, \Delta_1(\varphi)] = 0.$$

Das dritte Capitel enthält die Theorie der kürzesten Linien der Mannigfaltigkeit. Es tritt dabei hervor, dass die Fundamentalgleichungen der kürzesten Linien in der allgemeinen Gleichung der Dynamik als ein Specialfall enthalten sind, was der rein analytischen Theorie der Integration der Bewegungsgleichungen mehr Anschaulichkeit giebt.

Das vierte und letzte Capitel ist den Anwendungen der Theorie der Differentialinvarianten auf die Frage der Transformation einer Mannigfaltigkeit gewidmet. Es wird hier Riemann's Methode der Aufstellung der Fundamentalinvariante Ψ erklärt und dann die für die Bestimmung der Bedingungen der Aufeinanderlegbarkeit zweier Mannigfaltigkeiten notwendigen Invarianten aufgestellt. Leider bleibt deren Zusammenhang unaufgeklärt. Es folgen dann die Riemann-Lipschitz'sche Bedingung für die Ebenheit einer Mannigfaltigkeit, wie auch dafür, dass eine gegebene n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit in der gege-

benen ν-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit liege. Daraus folgt, dass die geringste Zahl ν der Dimensionen der ebenen Mannigfaltigkeit N, in der alle n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten liegen, nicht $\frac{1}{2}n(n+1)$, sondern $n+\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ sein muss, so lange wir nicht beweisen, dass zwischen gewissen Gleichungen identische Relationen bestehen. Si.

G. Castelnuovo. Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni. Ven. Ist. Atti. (7) II. 855-901.

Im vierdimensionalen Raume R_4 kann man eine beliebige Gerade entweder als Verbindungslinie zweier Punkte x, y ansehen, oder als Durchschnitt dreier dreidimensionalen Räume ξ, η, ζ. Betrachtet man die Gerade als Strahl, so nimmt man als ihre homogenen Coordinaten zehn Grössen, welche den folgenden zweireihigen Determinanten proportional sind:

$$r_{ik} = -r_{ki} = x_i y_k - x_k y_i \qquad (i, k = 1, 2, \dots, 5);$$

diese Coordinaten sind durch quadratische Gleichungen folgender Form unter einander verbunden:

$$r_{ik}r_{lm} + r_{il}r_{mk} + r_{im}r_{kl} = 0,$$

von denen drei unabhängig sind; diese Bedingungsgleichungen führen die homogenen Coordinaten einer der ∞^6 Geraden von R_4 auf sieben unabhängige zurück. Betrachtet man die Gerade als Axe, so nimmt man als ihre homogenen Coordinaten die dreireihigen Determinanten, die in der Matrize enthalten sind, welche die Coordinaten von ξ, η, ζ bilden. In Folge eines wohlbekannten Satzes von Clebsch (Gött. Abh. XVII; vgl. F. d. M. V. 1872. 62) sind die Coordinaten der ersten Art den Coordinaten der zweiten Art proportional.

Einer homogenen Gleichung ersten Grades zwischen den homogenen Coordinaten einer Geraden in R_4 genügen ∞^5 Gerade, welche einen „linearen Complex" C_5 bilden. Dieser wird durch neun beliebige seiner Geraden bestimmt. Alle Geraden von C_5, welche durch einen Punkt von R_4 gehen, bilden einen Strahlenbündel, sind daher in einem dreidimensionalen Raum R_3 ent-

halten; in Folge dessen bestimmt C_5 in R_4 ein Nullsystem. Dieses ist singulär, daher gehen die den Punkten von R_4 entsprechenden R_3 durch einen festen Punkt a (den „Mittelpunkt" des Complexes). Jede durch a gehende Gerade gehört dem Complexe an; projicirt man C_5 aus a auf einen dreidimensionalen Raum, so erhält man in ihm einen gewöhnlichen linearen Strahlencomplex. C_5 kann „speciell" sein; in diesem Falle besteht er aus allen den Geraden von R_4, welche eine bestimmte Ebene R_2 schneiden.

Die Gleichung

$$(1)\qquad \sum_{ik}(\lambda a_{ik}+\mu b_{ik})r_{ik}$$

stellt, wenn das Verhältnis $\lambda:\mu$ alle möglichen Werte annimmt, ∞^1 lineare Complexe dar, welche einen „Büschel" bilden. Die ∞^4 Geraden, welche den Complexen des Büschels gemeinschaftlich sind, bilden ein Strahlensystem C_4, welches durch acht beliebige seiner Geraden bestimmt wird. Durch jeden Punkt von R_4 geht im allgemeinen ein Büschel von Geraden von C_4; es giebt jedoch ∞^1 singuläre Punkte, von denen jeder der Mittelpunkt eines in C_4 enthaltenen Strahlenbündels ist, wie auch der Mittelpunkt eines Complexes des Büschels; der Ort der singulären Punkte von C_4 ist ein Kegelschnitt. Einige Büschel bieten merkwürdige Besonderheiten dar; der Verf. zählt drei Arten derselben auf. Aehnlich stellt die Gleichung

$$(2)\qquad \sum_{ik}(\lambda a_{ik}+\mu b_{ik}+\nu c_{ik})r_{ik}=0,$$

wenn die Verhältnisse $\lambda:\mu:\nu$ alle möglichen Werte annehmen, ∞^2 Complexe dar, welche ein „Netz" bilden. Die ∞^3 Geraden, welche den Complexen des Netzes gemeinschaftlich sind, bilden ein Strahlensystem C_3, welches durch sieben beliebige seiner Geraden bestimmt ist. Durch jeden Punkt von R_4 geht im allgemeinen eine Gerade von C_3; es giebt jedoch ∞^2 singuläre Punkte, von denen jeder der Mittelpunkt eines in C_3 enthaltenen Strahlenbüschels ist, wie auch der Mittelpunkt eines Complexes des Netzes; der Ort der singulären Punkte von C_3 ist die „Brennfläche" F dieses Systems; sie ist eine Fläche vierter Ordnung, welche durch die R_3 von R_4 in rationalen Curven geschnitten

wird, und die allgemeinste, welche auf einer Ebene durch ein lineares System von ∞^4 Kegelschnitten eindeutig abbildbar ist; alle Geraden von C_3, und sie allein, sind dreifach schneidende Gerade von F. Einige „specielle" Netze bieten merkwürdige Besonderheiten dar; der Verf. zählt sechs Arten derselben auf.

Endlich stellt die Gleichung

$$(3) \qquad \sum_{ik}(\lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik} + \varrho d_{ik}) r_{ik} = 0,$$

wenn die Verhältnisse $\lambda:\mu:\nu:\varrho$ alle möglichen Werte annehmen, ∞^3 Complexe dar, unter denen fünf specielle sind. Die ∞^3 Geraden, welche allen diesen Complexen gemeinschaftlich sind, bilden ein Strahlensystem C_2; jeder Punkt einer Geraden von C_2 ist der Mittelpunkt einer der betrachteten Complexe. Daher bilden diese Mittelpunkte eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit V; sie ist dritter Ordnung, lässt $6! = 720$ projective Verwandtschaften in sich selbst zu, enthält fünf Ebenen und hat zehn Punkte, welche zu vieren auf jenen Ebenen verteilt sind; endlich gehen durch jeden Punkt von V sechs Gerade von C_2, welche auf einem Quadrikegel gelegen sind. Dadurch wird der Verf. in ein Untersuchungsgebiet geführt, auf dem er schon mit Herrn Segre zusammengetroffen ist (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 673; XX. 1888. 662 und 669), und ergreift diese günstige Gelegenheit, um zu seinen früheren Resultaten neue wichtige Beiträge zu geben; dieselben verbreiten vieles Licht über gewisse wohlbekannte Forschungen, welche die Gleichungen fünften und sechsten Grades betreffen. Es genüge, den folgenden Satz anzuführen, welcher ungemein bemerkenswert erscheint: Ist eine beliebige Form sechsten Grades gegeben, so kann man auf V einen Punkt finden, so dass die sechs Geraden von C_4, welche durch ihn gehen, auf dem Quadrikegel, welchem sie angehören, ein Sextupel bilden, welches zu der gegebenen Form projectiv ist. Der Punkt ist einzig, wenn die Ordnung des Entsprechens zwischen den Erzeugenden des Kegels und den Wurzeln der Form von vorn herein gegeben ist; im entgegengesetzten Falle kann der Punkt 720 Lagen annehmen, welche aus einer derselben durch die 720 projectiven Transformationen von V in sich selbst entstehen. Die

Coordinaten dieser Punkte sind, wenn man von ihrer Ordnung absieht, die Werte der Function, welche Herr Joubert (C. R. I Halbjahr 1867, 1025 und 1081) aus den Wurzeln der Form sechsten Grades gebildet hat.

Die Gleichung

$$(4) \qquad \sum_{ik} \varrho_{ik} r_{ik} = 0$$

stellt einen linearen Strahlencomplex C_5 dar, wenn die ϱ_{ik} feste Werte und die r_{ik} Liniencoordinaten sind; in diesem Falle können die ϱ_{ik} als Coordinaten des Complexes angesehen werden. Betrachtet man aber die r_{ik} als constant und die ϱ_{ik} als Coordinaten einer Ebene in R_4, so stellt sie die duale Figur von C_5 dar, d. h. einen Ebenencomplex Γ_5 in R_4, von dem die r_{ik} als Coordinaten gelten. Und falls die Coordinaten von C_5 und Γ_5 durch die Gleichung (4) verbunden sind, so können die Complexe C_5 und Γ_5 „conjugirt“ oder „apolar“ genannt werden. Wie C_5 einen Mittelpunkt besitzt, so hat Γ_5 einen „Centralraum“ α. Die Geraden von C_5, welche sich in α befinden, bilden einen gewöhnlichen linearen Complex C; einen anderen Strahlencomplex Γ bilden die Geraden von α, welche Axen von Ebenenbündeln sind, deren Elemente Γ_5 angehören; sind nun C_5 und Γ_5 conjugirt, so sind C und Γ (nach der Klein'schen Bezeichnung) in Involution.

Aus der Bedingungsgleichung (4) erfährt man, dass zu jedem System von ∞^r $(r < 8)$ linearen Geraden- (oder Ebenen-) Complexen ein System von ∞^{8-r} linearen Ebenen- (oder Geraden-) Complexen conjugirt ist; dieses letztere besteht aus allen Complexen, welche den gegebenen conjugirt sind. Z. B. ist einem linearen System von ∞^4 Geradencomplexen ein System von ∞^4 Ebenencomplexen conjugirt; auf diese Weise wird ein zu sich selbst duales Gebilde erzeugt, welches schon von Herrn Segre erforscht wurde (vgl. F. d. M. XX. 1888. 666). Von den anderen linearen Systemen von $\infty^5, \ldots, \infty^8$ linearen Complexen können die Eigenschaften sehr leicht abgeleitet werden, wenn man das Dualitätsgesetz auf das schon Gesagte anwendet und den Begriff des Conjugirtseins benutzt.

Was wir auseinandergesetzt haben, ist unserer Meinung nach hinreichend, um klar zu machen, dass die Liniengeometrie in R_4 in vielen Punkten von der Liniengeometrie in R_3 wesentlich verschieden ist. Wie der Verf. bemerkt, findet ein ähnlicher Unterschied zwischen der Liniengeometrie in R_n und in R_{n-1} für jeden Wert von n statt; derselbe kann leicht ermittelt werden durch Ueberlegungen und Rechnungen, welche denjenigen ähnlich sind, die Herr Castelnuovo in seiner wichtigen Arbeit angewandt hat. La.

F. Palatini. Sopra una trasformazione delle figure del piano in figure dello spazio a quattro dimensioni fondata sopra una corrispondenza univoca dei punti reali ed immaginari di R_2 coi punti reali di R_4. Palmi. Tip. G. Lopresti. 20 S. 8°.

Einem Punkte der Ebene mit den Coordinaten $x = a + ib$, $y = c + id$ wird derjenige Punkt des vierdimensionalen Raumes zugeordnet, dessen rechtwinklige Coordinaten die Zahlen a, b, c, d sind. Auf Grund dieser Festsetzung werden die den Geraden und Configurationen der Ebene entsprechenden Gebilde des vierdimensionalen und, durch Projection, des dreidimensionalen Raumes aufgesucht. Hieran schliessen sich Beziehungen der Flächen im vier- und dreidimensionalen Raume zu ebenen Curven. Die bei den ersteren Gebilden auftretenden Ordnungszahlen und Anzahlen der Singularitäten sind im allgemeinen die Quadrate der für die letzteren geltenden Zahlen. Zum Schluss werden noch speciell die den Kegelschnitten und Curvenbüscheln entsprechenden Gebilde betrachtet. Schg.

F. Giudice. Sulla corrispondenza fra due iperspazii. Batt. G. XXIX. 163-171.

Auf Grund analytischer Begriffsbestimmung des n-dimensionalen Raumes wird allgemein bewiesen, dass zwischen zwei Räumen mit verschiedener Dimensionenzahl eine stetige eindeutige Correspondenz nicht bestehen kann. Schg.

F. Aschieri. Sulle omografie binarie e ternarie. — Sull omografie binarie e i loro prodotti. Lomb. Ist. Rend. XXIV. 278-292, 964-975.

Herr A. behandelt zunächst vom analytischen Standpunkt aus die collinearen und reciproken Beziehungen im Raume n^{ter} Dimension. Die Gleichung einer solchen Beziehung ist

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_r X_s = 0.$$

Bei der collinearen Beziehung sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $X'_1, X'_2, \ldots X'_n$ die Coordinaten eines Punktes des einen Raumes S_n und eines S_{n-1}, der den homologen Punkt des anderen S_n enthält, oder die Coordinaten eines S_{n-1} des ersten Feldes und eines in dem entsprechenden S_{n-1} liegenden Punktes.

Bei der Correlation sind entsprechend $X'_1, X'_2, \ldots X'_n$ und $x_1, x_2, \ldots x_n$ beide Punkt-Coordinaten oder S_{n-1}-Coordinaten. Die beiden Räume S'_n und S_n sind als in einander liegend gedacht. Herr A. stellt nun, hieran anknüpfend, zu einer Homographie die inverse auf, bestimmt die Fundamentalelemente und geht dann zur Behandlung der involutorischen Verwandtschaften über. Ohne näher auf den Gegenstand einzugehen, begnügt sich Herr A., zu zeigen, dass eine collineare Verwandtschaft eine Involution ist, wenn in ihr selbst und in ihrer inversen $n-1$ linear unabhängigen Punkten dieselben Punkte entsprechen, und eine reciproke Beziehung ein Polarsystem, sobald zu jedem von $n+1$ linear unabhängigen Punkten der S_{n-1} gehört, welcher die übrigen n Punkte verbindet.

Alsdann dehnt er unter Einführung der bekannten symbolischen Bezeichnungsweise die Begriffe der permutablen, anticonjugirten und harmonischen oder conjugirten Homographien auf den Raum n^{ter} Dimension aus. Zwei Verwandtschaften C_1 und C_2 sind permutabel, wenn

$$C_2 . C_1 = C_1 . C_2$$

ist, anticonjugirt, wenn

$$C_1 . C_2 \quad \text{und} \quad C_2 . C_1$$

Involutionen sind, harmonisch, wenn

$$C_1 . C_2^{-1} \quad \text{wie} \quad C_2 . C_1^{-1}$$

Involutionen sind. Für letztere Beziehung werden die hinreichenden Bedingungen aufgestellt.

Die Gleichung einer binären Homographie ist

$$\Omega \equiv x_1(rx'_1+sx'_2)-x_2(px'_1+qx'_2) = 0.$$

Indem man die Coordinaten p, q, r, s als homogene Punktcoordinaten auffasst, gelingt es, die dreifache Mannigfaltigkeit der Projectivitäten, die auf einem rationalen Träger möglich sind, auf einen Punktraum abzubilden; der Verf. beleuchtet die Eigenschaften dieser Abbildung, die er in einer früheren Abhandlung [cfr F. d. M. XXII. 1890. 624] vom geometrischen Standpunkte behandelt hatte, nunmehr vom analytischen Gesichtspunkte aus.

E. K.

P. H. Schoute. Le déplacement le plus général dans l'espace à n dimensions. Delft Ann. de l'Éc. Polyt. VII. 139-158.

Wenn die Punkte x, y, auf ein orthogonales System im n-dimensionalen Raume E^n bezogen, die Coordinaten $x_1, x_2, \dots,$ $y_1, y_2, \dots$ haben und zwischen diesen Grössen die Relationen

$$y_k = a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n-a_k \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

bestehen, wobei die Coefficienten den Bedingungen

$$a_{k1}^2+a_{k2}^2+\cdots+a_{kn}^2 = 1,$$
$$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn} = 0$$
$$(i=1,2,\dots,n;\; j=1,2,\dots,n;\; i \lessgtr j)$$

genügen, so sind die beiden Figuren, denen jene Punkte angehören, einander gleich. Es besteht Congruenz oder Symmetrie, nachdem die aus den Coefficienten a_{ij} gebildete Determinante den positiven oder den negativen Wert Eins hat. Hiermit wird der Satz bewiesen, dass zwei gleiche Figuren stets einen Coincidenzpunkt haben, welcher reell ist und in endlicher Entfernung liegt für $D=1$ und n gerade, oder $D=-1$ und n gerade, dagegen im Unendlichen in den beiden entgegengesetzten Fällen.

Um projectivische Figuren darzustellen, werden als homogene Coordinaten gewählt die Entfernungen eines Punktes von $n+1$ Räumen von $n-1$ Dimensionen, welche E^n angehören,

und es wird gesetzt:

$$\varrho y_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{k,n+1}x_{n+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Es ergiebt sich sofort, dass die Figuren $n+1$ Coincidenzpunkte haben, von denen auf zwei verschiedenen Wegen dargethan wird, dass im Falle der Congruenz für $n = 2m$ dieselben einen reellen Punkt in endlicher Entfernung und m Paare conjugirt imaginärer Punkte im Unendlichen enthalten. Für $n = 2m+1$ dagegen bestehen die Coincidenzpunkte aus einem reellen Punkte P_∞ und m Paaren conjugirt imaginärer Punkte in dem Raume E_∞^{2m}, welcher dem E^{2m+1} angehört, zusammen mit einem Punkte einer bestimmten Geraden, welcher dem Punkte P_∞ unendlich benachbart ist.

In einem $2m$-dimensionalen Raume wird die allgemeinste Verrückung durch die $2m$ Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y_{2k-1} &= x_{2k-1}\cos\varphi_k + x_{2k}\sin\varphi_k \\ y_{2k} &= -x_{2k-1}\sin\varphi_k + x_{2k}\cos\varphi_k \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

dargestellt, zu denen für $2m+1$ Dimensionen noch hinzutritt

$$y_{2m+1} = x_{2m+1} + a,$$

oder: die allgemeinste Verrückung besteht bei geradem n aus $\frac{1}{2}n$ Rotationen in „unter sich absolut normalen" Ebenen und für ungerades n aus $\frac{1}{2}(n-1)$ derartigen Rotationen und einer Translation in einer zu jenen Ebenen normalen Richtung.

Für zwei symmetrische Figuren in einem Raume E^n besteht stets ein Raum E^{n-1}, welcher dieselben in congruenten Figuren schneidet, und von dem correspondirende Punkte der beiden Figuren gleiche Entfernung haben.

Die $n+1$ Coincidenzpunkte zweier derartigen Figuren bestehen aus einem reellen Punkte (point de coincidence opposée) und dem System der n Coincidenzpunkte des zuvor erwähnten Raumes E^{n-1}. Eine Figur in E^n kann im allgemeinen in eine zu derselben symmetrische übergeführt werden durch eine Bewegung in einem $(n+1)$-dimensionalen Raume, zu dem E^n gehört. Für gerades n besteht diese Bewegung aus $\frac{1}{2}n$ Rotationen und einer Translation; für ungerades n aus $\frac{1}{2}(n+1)$ Rotationen. Jedenfalls ist unter diesen Rotationen eine einzige Umwendung (Rotation, deren Winkel π beträgt) vorhanden. Mo.

Capitel 4.
Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

E. MÜLLER. Die Liniengeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre. Monatsh. f. Math. II. 267-290.

Eine bisher in den Anwendungen der Ausdehnungslehre gebliebene Lücke wird durch die vorliegende Arbeit in erwünschter Weise ausgefüllt. Die geometrische Summe zweier windschiefen Linienteile im Raume, der von Grassmann geometrisch zunächst nur eine formale Bedeutung beigelegt wurde, stellt, wie der Verf. zeigt, einen linearen Complex dar. Auf dieser Grundlage wird nun mit Hülfe der charakteristischen Operationen der Ausdehnungslehre die Theorie der Strahlencomplexe entwickelt. Es wird die lineare Abhängigkeit der Complexe von einander erörtert, die Bedeutung des äusseren und des inneren Productes derselben, sowie der „Ergänzung" dargelegt, ferner die Bedingung für die Involution zweier Complexe, für einen speciellen Complex u. s. w. Zahlreiche Resultate der Liniengeometrie werden auf diese Weise in kürzester Form abgeleitet und formulirt. Dabei stellt sich heraus, dass eine Gruppe der erhaltenen Gleichungen den für die Kugelgeometrie geltenden vollkommen analog ist, sodass jede der einschlägigen Formeln der Ausdehnungslehre ebensowohl im Sinne der Strahlengeometrie wie in dem der Kugelgeometrie gedeutet werden kann. Schg.

E. WAELSCH. Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen. Wien. Ber. C. 158-219.

Die Gleichung einer Geraden a in Liniencoordinaten sei

$$a = \sum_1^6 a_k x_k = (ax) = 0,$$

wobei die x_k und die a_k den Relationen $(xx) = 0$ resp. $(aa) = 0$ Genüge leisten. Sind nun die a_k Functionen zweier veränder-

lichen Parameter u und v, so beschreibt die Gerade eine Strahlencongruenz. In der Umgebung eines Strahles a hat man die Gleichung

$$(1) \qquad 0 = a + (b\,du + c\,dv) + \tfrac{1}{2}(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2) + \cdots,$$

wobei b, c, e, f, g linear in den x_k sind und, gleich Null gesetzt, lineare Complexe bestimmen. Es bestehen dann die Beziehungen:

$$(aa), (ab), (ac) = 0; \quad (bb) + (ae) = 0; \quad (bc) + (af) = 0;$$
$$(ce) + (ag) = 0 \quad \text{etc.}$$

Die invarianten Bildungen der Form (1) ergeben nun infinitesimale Invariantenbildungen der Strahlencongruenz. Diese, insbesondere die zu einem Congruenzstrahl sich gesellenden covarianten linearen Complexe, werden von dem Verfasser einer eingehenden Untersuchung unterworfen. So ergeben die Wurzeln von:

$$(bb)du^2 + 2(bc)du\,dv + (cc)dv^2 = 0$$

die Werte von $du:dv$, welche der Nachbarschnittgeraden von a in der Congruenz entsprechen, und welche mit a die Brennpunkte und die Brennebenen dieses Strahles bestimmen.

$$(fx)^2 - (ex)(gx) = 0$$

ist die Gleichung eines Complexes zweiten Grades, welcher aus den Brennlinienbüscheln (sie werden gebildet von den Tangenten der Brennfläche in den Berührungspunkten mit dem Congruenzstrahl a) die Inflexionstangenten der Brennfläche ausschneiden. Verschwindet

$$\Delta = (bc)^2 - (bb)(cc) = (af)^2 - (ae)(ag),$$

so fallen die Brennpunkte und die Brennebenen des Strahles zusammen. Die Congruenz besteht dann aus den Inflexionstangenten einer Fläche. Die beiden Brennlinienbüschel sind nun in mehrfacher Weise zu einander projectiv durch die dem Strahle a benachbarten in der Congruenz. Geht man nämlich von dem Strahle a zu dem benachbarten a' über, so schreitet der Brennpunkt 1 von a auf der Brennlinie A_1 nach $1'$, während die Brennebene I um eine Brenntangente τ_2 des Punktes 2 nach I' sich dreht; ebenso erhält man für den Brennpunkt 2 und die Brennebene II die entsprechenden Strahlen t_2 und τ_1.

Wird

$$r = (cc)e - 2(bc)f + (bb)g; \quad s^\nu = (bb)\{a_\nu^2 e + 2a_\nu f + g\}$$

gesetzt, wobei α_1 und α_2 die Wurzeln von

$$(bb)\alpha^2 + 2(bc)\alpha + (cc) = 0$$

sind, so ist die Projectivität $P \equiv (t_1) \overline{\wedge} (t_2)$ gegeben durch die Gleichung

$$(rt_1)(rt_2) - (s^1 t_1)(s^2 t_2) = 0;$$

die Projectivität $\Pi \equiv (\tau_1) \overline{\wedge} (\tau_2)$ aber durch

$$(rt_1)(rt_2) - (s^1 t_2)(s^2 t_1) = 0.$$

Die Projectivität $J_\nu \equiv (t_\nu) \overline{\wedge} (\tau_\nu)$ ist mit der Dupin'schen Tangenteninvolution der Brennfläche identisch.

Jeder Strahl, welcher in dem Büschel (1, I) liegt, also in dem Büschel, welcher durch a und den schneidenden Nachbarstrahl a_1 bestimmt ist, wird ein „Centralstrahl" des Punktes 1 genannt. Es wird nun der Satz bewiesen, dass die Centralstrahlen für alle Nachbarpunkte 1' des Punktes 1 in einem linearen Complexe liegen, welcher der „Begleitcomplex" des Strahles a für den Punkt 1 genannt wird. Die Gleichung desselben ist

$$\overset{\nu}{C} \equiv (abcr\overset{\nu}{s}x) = 0.$$

Bedeutet D die Determinante $(abcefg)$, so fallen die beiden Begleitcomplexe zusammen, wenn

$$T = -8\Delta^{\frac{1}{2}} . D = 0$$

ist. Die beiden Begleitcomplexe haben im allgemeinen eine Strahlencongruenz gemein, deren Leitlinien die „Hauptbrennlinien" heissen und die dem Strahle a conjugirten Tangenten der Brennfläche sind. Das Doppelverhältnis δ der Begleitcomplexe, welches auch das „Doppelverhältnis des Strahles a" genannt wird, ist, wenn β_ν die Wurzeln der Gleichung

$$(C^1 C^1)\beta^2 + 2(C^1 C^2)\beta + (C^2 C^2) = 0$$

sind, gegeben in

$$\delta = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{(C^1 C^2) - \sqrt{B}}{(C^1 C^2) + \sqrt{B}}, \quad B = -2^8 \Delta^8 D^2.$$

Wichtige aus Centralstrahlen der Congruenz a bestehende Congruenzen werden erhalten durch Differentiation von

$$\mathfrak{a} = \varrho(u, v) a,$$

wobei $\varrho(uv)$ eine beliebige Function ist, in

$$a_1 = \frac{\partial a}{\partial u} = 0 \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{\partial a}{\partial v} = 0.$$

Hierbei sind aber u und v die Parameter der in der Congruenz a befindlichen abwickelbaren Flächen.

Die allgemeinen Betrachtungen werden dann specialisirt für Normalencongruenzen und geben hier eine reiche Auswahl interessanter, zum Teil neuer Sätze, von welchen einige mitgeteilt werden mögen.

„Die Weingarten'schen Flächen sind diejenigen, bei welchen die Projectivitäten P und Π einer Normale zusammenfallen, für welche demnach das Doppelverhältnis jeder Normale den Wert Eins hat."

„Das Product der Krümmungsmasse der Centrafläche in den beiden Berührungspunkten einer Normale, multiplicirt mit dem Doppelverhältnis der Normale und der vierten Potenz des Abstandes der beiden Berührungspunkte, ist gleich Eins."

Also

$$\delta K_1 K_2 d^4 = 1.$$

Für Weingarten'sche Flächen folgt hieraus die von Halphen gefundene Beziehung $K_1 K_2 = 1/d^4$.

„Berühren sich zwei Flächen in einem Punkte in dritter Ordnung, so berühren sich ihre Normalencongruenzen in der gemeinsamen Normale in zweiter Ordnung und umgekehrt."

„Das Doppelverhältnis der Normalen einer Fläche zweiter Ordnung ist constant gleich Neun." W. St.

C. Guichard. Sur une classe particulière de congruences de droites. C. R. CXII. 1424-1426.

Die Brennpunkte einer Geraden D der Congruenz seien F und F', C sei der Mittelpunkt der Strecke FF', π die Ebene senkrecht zu D durch C. Der Ort der Punkte C wird Mittelfläche (surface médiane), die von π eingehüllte Fläche die Centralfläche der Congruenz genannt. Hier werden nur solche Congruenzen betrachtet, bei welchen den abwickelbaren Flächen der

Congruenz conjugirte Curven auf der Mittelfläche und der Centralfläche entsprechen. Sind ξ, η, ζ Grössen, welche proportional den Richtungscosinus von D sind, ferner x, y, z die Coordinaten des Punktes C; x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 diejenigen von F und F', und sind alle diese Grössen mit Hülfe zweier Variabeln u und v ausgedrückt, so dass u = const. und v = const. die abwickelbaren Flächen der Congruenz repräsentiren, so hat man

$$x_1 = x + \lambda\xi, \quad x_2 = x - \lambda\xi, \quad \text{etc.}$$

Der Verfasser zeigt nun, dass die Lösung des Problems darauf hinauskommt, vier Lösungen ξ, η, ζ, λ einer Differentialgleichung der Form $\frac{\partial^2\Theta}{\partial u \partial v} = M.\Theta$ zu finden, so dass λ eine Function von $\varrho^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2$ ist. Als particuläre Lösungen werden angeführt:

1) λ = const., die Focalflächen reduciren sich auf Curven.

2) ϱ = const., die Abwickelbaren der Congruenz berühren die Focalflächen längs Krümmungslinien; die conjugirten Curven auf der Centralfläche sind geodätische Linien.

3) $\lambda = \varrho$, die Mittelfläche und Centralfläche decken einander in einer Minimalfläche, deren Normalen die Congruenz bilden.

W. St.

A. Petot. Sur une classe de congruences de droites. C. R. CXIII. 841-844.

Kennt man die sphärische Repräsentation einer Congruenz, d. h. die den Abwickelbaren der Congruenz entsprechenden Curven u und v der Kugel, so hängt die Bestimmung der Congruenz von der Integration einer Laplace'schen Differentialgleichung ab. Sind nun die Curven u und v der Kugel zugleich die sphärischen Bilder σ der Asymptoten einer Fläche, so schneiden, wie Herr Guichard gezeigt hat, die Abwickelbaren der Congruenz H ein System conjugirter Curven auf der Centralfläche der Congruenz aus und umgekehrt. Die Bestimmung solcher Curven σ auf der Kugel macht Schwierigkeiten. Der Verfasser bestimmt dagegen direct eine Congruenz H. Hieraus ergiebt sich dann eine Methode, mittels welcher man Flächen erhält, die auf ihre Asymptoten bezogen sind. Es wird der Satz bewiesen: „Sind x, y, z

Lösungen einer Differentialgleichung der Form:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial u}}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v}=0,$$

wobei f eine beliebig gegebene Function von u und v ist, so erzeugt die Gerade

$$\frac{X-x}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial y}{\partial u}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial z}{\partial u}}$$

eine Congruenz H. Und umgekehrt: bei jeder Congruenz H genügen die Coordinaten der Punkte ihrer Focalfläche $v=$ const. einer Differentialgleichung obiger Form."

Lässt sich also für besondere Functionen f die Differentialgleichung integriren, so erhält man eine Congruenz H, hieraus folgt das System σ der sphärischen Abbildung und daraus die Fläche Σ, welche auf ihre Asymptoten bezogen ist. Es wird dann noch gezeigt, wie man für die Gebilde H, σ und Σ eine Reihe neuer Resultate erhalten kann. W. St.

G. Fouret. Sur les congruences de droites du premier ordre et de la première classe. S. M. F. Bull. XIX. 58-61.

Ein neuer Beweis des bekannten Satzes, dass die Geraden einer Congruenz erster Ordnung und erster Klasse durch zwei windschiefe Gerade hindurchgehen. A.

R. Schumacher. Einteilung der Strahlencongruenzen zweiter Ordnung mit Brenn- oder singulären Linien; Ebenenbüschel zweiter Ordnung in perspectiver Lage zu rationalen Curven. Math. Ann. XXXVIII. 298-306.

Die Einteilung dieser Strahlensysteme zweiter Ordnung n^{ter} Klasse, welche Herr Sturm (Math. Ann. XXXVI., F. d. M. XXII. 1890. 678) gemacht hat, enthält noch eine Lücke bei den Congruenzen vom Range $n-1$, welche der Verfasser ausfüllt. Es sind dies die Congruenzen, welche einen Kegel zweiter Ordnung

berühren und eine Curve n^{ter} Ordnung treffen. Es wird hier gezeigt, dass die Curve nicht durch die Kegelspitze zu gehen braucht, wie Herr Sturm annahm, sondern eine rationale Curve n^{ter} Ordnung ist, zu welcher ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung perspectiv liegt. Es werden dann besonders die Fälle $n = 4, 5$ bei ebenen Curven, $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ bei Raumcurven betrachtet.

W. St.

G. Pick. Ueber das System der covarianten Strahlencomplexe zweier Flächen zweiter Ordnung. Wien. Ber. C. 561-573.

Der Verfasser giebt zunächst in einer Einleitung eine Uebersicht über die vorhandenen fundamentalen Complexe zweiten und dritten Grades, welche mit zwei gegebenen Flächen zweiter Ordnung in covarianter Beziehung stehen, mittels der kanonischen Formen der Gleichungen dieser Flächen, bezogen auf ihr gemeinsames Poltetraeder. In den folgenden Paragraphen werden die Gleichungen dieser Complexe in symbolischer Form aufgestellt und fundamentale Relationen entwickelt. Kurz wird auf die geometrische Bedeutung eingegangen. Zum Schluss wird mittels der gefundenen Relationen die Gleichung des Poltetraeders in Strahlencoordinaten aufgestellt.

W. St.

Balitrand. Sur les complexes de droites et sur la question 254. J. de Math. spéc. (3) V. 197-206.

Die von Herrn Amigues gestellte Aufgabe fordert die Untersuchung des Complexes, der von den Sehnen eines dreiaxigen Ellipsoides gebildet wird, welche ihre Mitten in einer der drei Hauptebenen haben. Der Verf. stellt zuerst die Hauptsätze aus der Theorie der Complexe voran und macht dann Anwendung von ihnen auf den zu behandelnden Complex.

Lp.

J. C. Kluyver. Over stralenstelsels, die uit vier elkaar kruisende lijnen kunnen worden afgeleid. Amst. Versl. en Meded. (3) VIII. 41-83.

J. C. KLUYVER. Sur des systèmes de rayons déduits de quatre droites données dans l'espace. Arch. Néerl. XXV. 70-101.

In seinem „Calcül der abzählenden Geometrie" hat Hr. Schubert gezeigt, dass zwischen vier beliebigen Tangenten einer R^3 stets eine invariante Beziehung stattfindet, und Hr. Voss hat die simultane Invariante Γ berechnet, deren Verschwinden ausdrückt, dass vier Gerade Tangenten einer R^3 sein können. Der Verfasser bestimmt diese Invariante in folgender Weise: Sind 1, 2, 3, 4 die Tangenten einer R^3, so besteht stets eine Regelfläche zweiter Ordnung, welche ausser R^3 die Geraden 1, 2 enthält; eine zweite derartige Fläche enthält R^3 nebst 3 und 4. Diese beiden Flächen schneiden sich noch in einer Secante z von R^3, welche die Regelscharen (3, 2, 1), (2, 3, 4), (3, 1, 4), (1, 2, 4) berührt. Umgekehrt, wenn diese Regelscharen eine gemeinsame Tangente z haben, so wird der Durchschnitt zweier Hyperboloide ($12z$), ($34z$) eine die Geraden 1, 2, 3, 4 berührende R^3 sein.

Die simultane Invariante zweier Geraden x, y mit den homogenen Coordinaten p_{ik}, p'_{ik} wird mit (xy) bezeichnet. Beziehen sich p_{ik}, p'_{ik}, p''_{ik} auf die Geraden 1, 2, 3, so werden die Coordinaten q_{ik} einer Geraden der Regelschar (1, 2, 3) dargestellt durch

$$q_{ik} = R_1 p_{ik} + R_2 p'_{ik} + R_3 p''_{ik}$$

mit der Bedingung

$$(1) \qquad R_2 R_3 (23) + R_3 R_1 (31) + R_1 R_2 (12) = 0$$

wegen der Relation

$$q_{12} q_{34} + q_{23} q_{14} + q_{31} q_{24} = 0.$$

Jede Gerade z schneidet zwei Gerade q der Regelschar, weil aus

$$(qz) = R_1 (1z) + R_2 (2z) + R_3 (3z) = 0$$

und (1) zwei Werte für R_1, R_2, R_3 gefunden werden können. Diese Geraden q fallen zusammen, wenn z der Gleichung genügt:

$$\sqrt{(23)(1z)} + \sqrt{(31)(2z)} + \sqrt{(12)(3z)} = 0.$$

Eine gemeinsame Tangente der vier Regelscharen muss vier Gleichungen dieser Form genügen, woraus sich durch Elimina-

ion von z die Bedingung für 1, 2, 3, 4 ergiebt. Setzt man

$$a = (23)(14), \quad b = (31)(24), \quad c = (12)(34),$$
$$a+b+c = s_1, \quad bc+ca+ab = s_2, \quad abc = s_3,$$

so ist die Invariante, deren Verschwinden gefordert wird,

$$\Gamma = (s_1^2 - 4s_2)^2 - 128 s_1 s_3.$$

Wenn $\Gamma = 0$, so findet man weiter zur Bestimmung von z, bei Einführung der Bezeichnung $P_1 = \sqrt{(12)(13)(14)}$:

$$\frac{(1z)}{P_1} = \frac{(2z)}{P_2} = \frac{(3z)}{P_3} = \frac{(4z)}{P_4}.$$

Die Geraden z gehören somit, weil P_1, P_2, ... positiv oder negativ sein können, zwölf linearen Complexen an, welche nun, ohne dass die Bedingung $\Gamma = 0$ stattfindet, näher untersucht werden. Dieselben enthalten zu je sechs ein gemeinsames Hyperboloid; im ganzen sind acht derartige Flächen vorhanden. Die Figur zeigt eine weitgehende Analogie mit den zwölf Teilebenen der Flächenwinkel eines willkürlichen Vierflachs. Die Gleichungen jener Hyperboloide werden aufgestellt. Auf allen diesen Flächen sind die beiden gemeinsamen Secanten f', f'' der Geraden 1, 2, 3, 4 enthalten; ausserdem haben in jeder Congruenz die beiden Hyperboloide zwei Gerade g', g'' gemeinsam, welche zugleich erzeugende Elemente einer der durch die vier gegebenen Geraden zu je drei bestimmten Regelscharen sind. Eine geometrische Construction dieser Geraden g', g'' wird angegeben.

Es ergiebt sich weiter, dass die Hyperboloide H_1, ..., H_8 in zwei Gruppen geteilt werden können, deren letztere merkwürdige Eigenschaften hat. Die in dem Falle $\Gamma = 0$ auf einer der Flächen H_5, ..., H_8 liegenden Geraden z berühren nämlich stets die Regelscharen (234) u. s. w., was bei den auf den anderen Hyperboloiden enthaltenen Geraden z niemals vorkommen kann. Hieraus ergiebt sich sodann, dass geometrisch untersucht werden kann, ob vier gegebene Gerade eine R^3 gemeinschaftlich berühren können.

Ordnet man die Linien 1, 2, 3, 4 auf drei Weisen in Paare, z. B. (23), (14), so bestimmt jede Combination ein Nullsystem dritter Ordnung, indem einem Punkte P die Ebene π durch die

beiden aus P an die Linienpaare 2, 3 und 1, 4 gelegten gemeinsamen Secanten zugeordnet wird. P beschreibt sodann eine R^3, wenn die Nullebene π sich um eine Gerade dreht, und mit einer Punktreihe correspondiren die Tangentenebenen einer Developpabeln dritter Klasse. Ist jedoch diese Punktreihe auf einer Geraden l enthalten, welche die beiden gemeinsamen Secanten f', f'' der gegebenen Geraden schneidet, so dreht sich die Ebene π um eine Gerade x. Die Beziehung zwischen l und x ist eine involutorische. Beschreibt nun die Gerade l, indem sie fortwährend auf f', f'' ruht, eine Regelschar, so erzeugt x eine unicursale Regelfläche F^6 sechster Ordnung, worauf 1, 2, 3, 4 als Doppelstrahlen und f', f'' als dreifache Gerade enthalten sind. Mit den beiden anderen Combinationen (12)(34) und (31)(24) correspondiren zwei andere Flächen F^6, und es zeigt sich nun, dass diese drei Regelflächen sechster Ordnung nur dann zusammenfallen können, wenn die Gerade l eins der Hyperboloide H_5, ..., H_8 beschreibt.

Die vier Paare der Durchschnittspunkte der Geraden 1, 2, 3, 4 mit den Curven R^3, welche bei einer beliebigen Combination (12)(34) in dem zugehörigen Nullsystem den Erzeugenden jener Hyperboloide zugeordnet sind, bestimmen vier binäre quadratische Formen, deren Invarianten untersucht und geometrisch interpretirt werden.

In dem Falle, wo Γ verschwindet, sind die Geraden 1, ..., 4 Rückkehrkanten der Regelfläche F^6, und die Geraden f', f'' sind conjugirte Polargeraden in Bezug auf jede R^3, welche die gegebenen Geraden berührt. Es lässt sich zeigen, dass sodann durch eine wiederholte projective Transformation alle Curven R^3 aus einer einzigen hergeleitet werden können.

Die zweite Abhandlung ist eine französische Uebersetzung der ersten. Mo.

H. Ader. **Démonstration nouvelle d'un théorème sur les normalies.** Nouv. Ann. (3) X. 225-228.

Geometrischer Beweis des Satzes: „Wenn die Leitcurve

einer Normalenfläche durch einen Punkt einer Oberfläche geht, so berühren die Hauptnormalebenen dieses Punktes die Normalenfläche in den Hauptkrümmungsmittelpunkten". Wbg.

A. Ahrendt. Analytische Untersuchungen über die Constitution der in krummen Flächen gebrochenen, a priori astigmatischen Strahlenbündel mit Anwendungen der neueren Geometrie. Schlömilch Z. XXXVI. 99 - 115.

Die Untersuchungen beziehen sich auf den allgemeinen, zuerst von Reusch betrachteten Fall, dass die Brennlinien eines Strahlenbündels nicht beide senkrecht stehen auf dem Hauptstrahl, welchen Fall Matthiessen zuletzt eingehend in Schlömilch Z. XXXIII (F. d. M. XX. 1888. 1132) analytisch behandelt hat.

Es wird zunächst angenommen, dass beide Hauptkrümmungen der brechenden Fläche Null sind, wie dies bei der Ebene in jedem Punkte zutrifft; alsdann, dass eine Hauptkrümmung Null ist, wie bei den abwickelbaren Flächen; endlich wird die Brechung an einem beliebigen Flächenpunkte bei senkrechter Incidenz betrachtet. A.

K. Küpper. Geometrische Betrachtungen über den Strahlencomplex und die Congruenz. Prag. Abh. 11 S. 4°.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

H. Wiener. Ueber die aus zwei Spiegelungen zusammengesetzten Verwandtschaften. Leipz. Ber. XLIII. 644-673.

Der erste Abschnitt dieser Abhandlung ist den bisher in der Geometrie verwandten Uebertragungsmethoden gewidmet, und zwar werden sie „Abbildungen“ genannt, wenn bei der Uebertragung nicht nur die Elemente, sondern gleichzeitig auch die daran geknüpften Sätze abgebildet werden, hingegen „Abbildungen mit Erweiterung“, wenn durch eine Beziehung der Elemente eines geometrischen Gebildes eine sie umfassende Beziehung in einem Gebiete höherer Dimension hervorgerufen wird. Beispiele für die erstere Uebertragungsart sind die stereographische Projection und die Abbildung der Fläche dritter Ordnung auf die Ebene, Beispiele für die letztere die Zuordnung einer Projectivität der Punkte eines Kegelschnittes zu einer ebenen Collineation, durch die der Kegelschnitt genau in derselben Weise in sich übergeführt wird, wie durch jene Projectivität. Wird ferner unter anderem berücksichtigt, dass die Gemeinsamkeit der Rechenregeln für reelle und complexe Zahlen den Uebergang von der projectiven Geometrie der Geraden zur Kreisverwandtschaft in der Ebene ermöglicht, und dass v. Staudt seine Geometrie der Lage dadurch erweitert, dass er auf die von ihm eingeführten imaginären Elemente ebenfalls die Grundoperationen des Verbindens und Schneidens überträgt, so kann zusammenfassend gesagt werden: „Man kommt zu Uebertragungen (formalen Uebertragungen), die nicht die geometrischen Gebilde, sondern die Sätze von einem Gebiete auf ein anderes abbilden, wenn beide Gebiete auf gemeinsame Grundgesetze zurückzuführen sind“. — Diese Betrachtungen leiten darauf hin, die den einzelnen geometrischen Gebieten zu Grunde liegenden thatsächlichen Bedingungen in eine notwendige und hinreichende Anzahl von Grundformeln zu bringen und die weitere Entwickelung jedes Zweiges mit einer aus den Grundformeln entspringenden Analysis durchzuführen. Ist diese Analysis gewonnen durch eine rein logische Schlussfolgerung aus gegebenen Definitionen, so ist sie „eine in sich begründete Analysis“. Eine solche Analysis ist die der Verwandtschaften und insbesondere die der Spiegelungen; sie gestattet, die Projectivität der Geraden, die Kreisverwandtschaft in der Ebene und auf der Kugel, die ebene (räumliche) Collineation, die eine Curve (Fläche) zweiter

Ordnung in sich selbst überführen, die Bewegung starrer räumlicher Systeme und ebenso die Verwandtschaft symmetrisch gleicher räumlicher Systeme als Folgen zweier Spiegelungen darzustellen. Js.

H. Wiener. Ueber geometrische Analysen. Fortsetzung. Leipz. Ber. XLIII. 424-447.

Mit Hülfe der im VII. Abschnitte abgeleiteten Gesetze des Rechnens mit Spiegelungen (involutorischen Verwandtschaften) werden Gruppen von Verwandtschaften untersucht, die sich höchstens als Folge von ν Spiegelungen ausdrücken lassen, und es findet sich als Hauptergebnis: Aus ν gegebenen, von einander unabhängigen Spiegelungen $s_1, \dots, s_\nu$, von denen jede mit jeder anderen vertauschbar ist, lässt sich eine Gruppe von 2^ν von einander verschiedenen Verwandtschaften ableiten, welche ausser der Identität nur Spiegelungen enthält, von denen wieder jede mit jeder vertauschbar ist. Je zwei von den in der Gruppe enthaltenen $2^\nu-1$ Spiegelungen besitzen zu einander die Eigenschaften, dass ihre Folge wieder eine Spiegelung ist, dass beide Spiegelungen mit einander vertauschbar und harmonisch sind, und dass jede durch die andere in sich übergeführt wird. Anwendungen der allgemeinen Theorie auf Spiegelungen an Punkten, Geraden und Ebenen, sowie auf projective Spiegelungen schliessen die Abhandlung, deren Uebersicht durch eine den Inhalt kurz erläuternde Einleitung wesentlich gefördert wird.

Js.

B. Wimmer. Ueber eine allgemeine Klasse von ein-zweideutigen Raumtransformationen. Schlömilch Z. XXXVI. 214-230; auch Diss. Erlangen.

Die Gleichungen

$$\Sigma A_i y_i = 0, \quad \Sigma B_i y_i = 0, \quad \Sigma \Gamma_i y_i = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

wo A_i und B_i lineare und Γ_i quadratische Functionen der Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 sind, vermitteln eine ein-zweideutige Ab-

bildung zweier Räume, indem im allgemeinen jedem Punkte x ein und nur ein Punkt y, dagegen jedem Punkte y zwei Punkte x entsprechen. Den Ebenen des y-Raumes entsprechen Flächen F_4 von der vierten Ordnung. Die Schnittcurve zweier dieser Flächen F_4 zerfällt in eine allen F_4 gemeinsame Curve C_{11} vom Geschlechte 14 und in eine bewegliche Curve C_5 vom Geschlechte 2, welche letztere daher die Geraden des y-Raumes abbildet. C_5 schneidet C_{11} in 18 Punkten. Eine dritte Fläche F_4 schneidet daher die Curve C_5 in $4.5-18=2$ beweglichen Punkten — im Einklang mit der Doppeldeutigkeit der Transformationen. Als Bild der Ebenen des x-Raumes erscheint ein System von Flächen fünfter Ordnung im y-Raume mit einer Doppelcurve dritter Ordnung. Des weiteren wird die Uebergangsfläche studirt, d. h. der Ort der Punkte y, für welche die beiden entsprechenden Punkte x zusammenfallen; ferner die involutorische Transformation, welche dadurch definirt ist, dass man die beiden demselben y entsprechenden Punkte x einander zuordnet. Die Verbindungsgeraden je zweier solcher Punkte x bilden einen Complex, welcher nichts anderes ist, als der Reye'sche Tetraedercomplex. Die Haupteigenschaften dieses Complexes werden von neuem entwickelt. Ht.

C. Burali-Forti. Sulle trasformazioni (2, 2) che si possono ottenere mediante due trasformazioni doppie. Palermo Rend. V. 91-99.

Der Verf. knüpft an die grundlegende Arbeit von de Paolis an (F. d. M. IX. 1877. 581-583).

Es mögen drei Ebenen vorliegen. Die Punkte der ersten und zweiten, sowie die der ersten und dritten werden durch je eine ein-zweideutige Punkttransformation (1, 2) auf einander bezogen. Damit sind dann die Punkte der zweiten und dritten durch zwei-zweideutige Transformationen (2, 2) mit einander verknüpft, sobald die genannten Ebenen beide entweder einfache oder aber beide Doppel-Ebenen der zu Grunde gelegten Transformationen sind. Die Einwirkung der letzteren Transformationen

auf die neuen wird hier im einzelnen (ohne Beweis) verfolgt; es ergeben sich einfache Beziehungen zwischen den beiderseitigen fundamentalen Anzahlen (Ordnung, Anzahl der vielfachen Punkte, Geschlecht u. s. w.).

Die Eigenschaften einer von Visalli (F. d. M. XXI. 1889. 613) untersuchten Transformation (2, 2) ordnen sich als specielle Fälle ein. My.

H. Pannelli. Sulle trasformazioni multiple associate ad ogni trasformazione piana birazionale. Batt. G. XXIX. 154-162.

Dieser Aufsatz stützt sich auf zwei Noten von Hrn. Jung (F. d. M. XVIII. 1886. 791-793). Führt man eine Cremona-Transformation in der Ebene von der Ordnung n eine Anzahl von Malen, etwa l-mal, hinter einander aus, so resultirt wiederum eine Cremona-Transformation, welche vom „Index l“ genannt wird.

Der Verf. studirt die einfachsten Eigenschaften der neuen Transformation. So giebt es n^l+2 Einheitspunkte; d. h. also: zu jeder Cremona-Transformation der Ebene giebt es eine Gruppe von n^l+2 ($l=1, 2, 3, \ldots$) Punkten, deren jeder nach l-maliger Ausübung der Transformation in sich zurückkehrt.

Diese Gruppen zerfallen, den Teilern von l entsprechend, in „Cyklen“, die von anderer Seite her bereits von Hrn. S. Kantor untersucht worden sind. My.

J. Amaldi. Una interpretazione delle corrispondenze per raggi vettori reciproci nel piano. Napoli Rend. (2) V. 238-240.

Anschliessend an eine Abhandlung von Porchiesi (Atti dell'Accademia di Bologna), woselbst die Correspondenz zwischen den dreifach unendlich vielen Kreisen der Ebene und den ∞^3 Punkten des Raumes behandelt wird, beweist der Verfasser den Satz, dass bei dieser Repräsentation der Kreise durch die Punkte des Raumes die Abbildung mittels reciproker Radien in der

Ebene in eine harmonische Verwandtschaft im Raume übergeht, deren Centrum und Involutionsebene ein Punkt und seine Polarebene in dem Polarsystem derjenigen Fläche zweiten Grades sind, auf welcher alle Punkte liegen, die den Kreisen vom Radius Null entsprechen. Bm.

W. Burnside. On a property of linear substitutions. Mess. (2) XX. 163-166.

Inversionen, die an zwei festen Kreisen nach einander vorgenommen werden, geben eine durch eine lineare Substitution darstellbare Verrückung von Punkten in einer unendlichen Ebene. Die Coefficienten dieser Substitution werden bestimmt. Danach wird die Umkehrung dieser Aufgabe behandelt, die einfach unendliche Schar von Kreispaaren zu bestimmen, bei welchen durch successive Inversion die gleiche Verrückung erzeugt wird, wie durch eine gegebene lineare Substitution von der Determinante 1.

Lp.

A. Demoulin. Sur une transformation géométrique applicable à la théorie des roulettes. Belg. Mém. C. in 8°. XLV. 35 S.

C. Le Paige. Rapport sur un Mémoire de M. Demoulin intitulé etc. Belg. Bull. (3) XXI. 793-795.

Die in dieser Abhandlung bearbeitete Transformation ist die folgende: Es sei u der Winkel des Fahrstrahls einer auf Polarcoordinaten bezogenen Curve mit der Tangente der Curve im betrachteten Punkte. Die Curve, bei welcher $f(r, u) = 0$, hat zur Transformirten in rechtwinkligen Coordinaten $f(y, \omega) = 0$, wenn ω der Winkel der Tangente mit der y-Axe ist. Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass

$y = r,\quad \omega = u,\quad dy = dr,\quad dx = rd\theta,\quad ds = ds',\quad \frac{1}{2}y\,dx = \frac{1}{2}r^2 d\theta,$

u. s. w., wenn θ der Polarwinkel ist. Die Curve (y, ω) hat dieselbe Länge, aber doppelten Inhalt wie die transformirte Curve. Der Verf. stellt andere Eigenschaften der Transformation fest; darauf wendet er die erhaltenen Ergebnisse auf die Kettenlinie,

auf die Rouletten im allgemeinen, auf die Delaunay'schen Curven, auf die elastische Curve und auf verschiedene Fragen der Variationsrechnung an. Mn. (Lp.)

E. Vigarié. Sur la méthode de transformation de M. Schoute. J. de Math. élém. (3) V. 101-105, 129-131, 153-157, 181-183, 207-211, 256.

Hr. Schoute hat die in der vorliegenden Arbeit von neuem untersuchte Transformation 1882 zuerst im Nieuw Archief, sodann auch im Bulletin von Darboux behandelt (vergl. F. d. M. XIV. 1882. 519-520). Legt man durch einen Punkt P und je zwei Ecken des festen Bezugsdreiecks die drei Kreise und klappt dieselben um die Seiten des Dreiecks herum, so schneiden sich die Kreise bei der neuen Lage in dem entsprechenden Punkte P' der Verwandtschaft. Diese Transformationsmethode hat besonders der neueren Dreiecksgeometrie viele Ergebnisse geliefert. Deshalb widmet ihr der auf diesem Gebiete als eine Autorität geltende Verfasser eine zusammenhängende Darstellung in Dreieckscoordinaten und zeigt die Verwendbarkeit an Beispielen aus jener Dreiecksgeometrie. Aus der Litteratur hierüber werden am Schlusse der Arbeit die wichtigsten bezüglichen Aufsätze angeführt. Lp.

B. Conforme Abbildung und dergleichen.

P. Painlevé. Sur la théorie de la représentation conforme. C. R. CXII. 653-657.

Ist S ein geschlossenes Flächenstück in der Ebene der $z = x + iy$ mit dem Umfange s und $\zeta = \xi + i\eta$ eine analytische Function von z, durch welche s in den Einheitskreis Γ der ζ-Ebene so abgebildet wird, dass für $z = 0$ auch $\zeta = 0$ ist, so ist $\zeta = e^{k(z)} = ze^{g+ih}$, wo g die sogenannte Green'sche Function ist.

Wenn z sich einem Punkte z_0 des Umfanges s nähert, so

nähert sich ζ dem Umfange von Γ; aber nach einem Bedenken von Harnack ist es nicht erwiesen, ob sich ζ einem bestimmten Punkte von Γ nähert. Der Verfasser beseitigt diesen Einwand, indem er beweist, dass ζ sich stets einem bestimmten Punkte nähert, wofern nur der Umfang s eine im allgemeinen stetig sich ändernde Tangentenrichtung mit einer endlichen Anzahl von Winkelpunkten hat. A.

E. Phragmén. Remarques sur la théorie de la représentation conforme. Acta Math. XIV. 225-232.

Der Verfasser bespricht einige Fragen aus der Lehre von der conformen Abbildung, welche bisher zum Teil noch keine genügende Beachtung gefunden haben, beweist einige Sätze schärfer und zugleich einfacher, und bespricht einige speciellere Abbildungsprobleme. A.

A. Cayley. On orthomorphosis. Quart. J. XXV. 203-226.

Die Gleichung

$$x_1 + iy_1 = \varphi(x + iy),$$

wo φ im allgemeinen eine Function mit imaginären Coefficienten ist, und (x, y), (x_1, y_1) rechtwinklige Coordinaten bedeuten, bestimmt sowohl x_1 als auch y_1 als Functionen von (x, y). Eliminirt man nun y aus diesen beiden Functionen, so erhält man ein Curvensystem S, welches von dem Parameter x allein abhängt, und gleicherweise ergiebt sich durch Elimination von x ein zweites Curvensystem T, welches den Parameter y besitzt. Diese zwei Systeme von Trajectorien treffen sich unter rechten Winkeln, und wenn man den Parametern x und y gleiche infinitesimale Aenderungen beilegt, so bilden sie ein doppeltes System von unendlich kleinen Quadraten.

Verfasser giebt zunächst die Gleichungen der beiden Curvensysteme, wobei er sich an die Arbeit von Beltrami: „Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque" (Ann. di Mat. I. 1867. 339-360) anschliesst, und zeigt, wie man beispielsweise

die bereits von diesem Autor behandelten confocalen Ellipsen- und Hyperbelsysteme, sowie das orthogonale Kreissystem erhält. Hierauf teilt er eine von Meyer in der Göttinger Dissertation: „Ueber die von geraden Linien und von Kegelschnitten gebildeten Scharen von Isothermen, sowie über einige von speciellen Curven dritter Ordnung gebildeten Scharen von Isothermen" (1879) gegebene Methode der analytischen Behandlung des Problems in neuer Ableitung mit und veranschaulicht sie an zwei Beispielen.

Aus der entwickelten Theorie ergiebt sich dann als wichtigste Folgerung der Satz: „Wenn eine geschlossene Kontur S gegeben ist, so lässt sich immer eine consecutive Kontur S' so finden, und zwar nur auf eine Weise, dass die eingeschlossene, einfach zusammenhängende Fläche F sich durch die weiteren Curven S'', S''', ... in einen innerhalb gelegenen Punkt zusammenziehen lässt, von welchem auslaufend die Orthogonaltrajectorien T mit den Curven S die Fläche in lauter unendlich kleine Quadrate einteilen." Dieser Satz ist nun gleichbedeutend mit dem Riemann'schen Satze: „Es ist immer möglich, und zwar nur auf eine Weise, eine gegebene, einfach zusammenhängende Fläche F so auf einen Kreis abzubilden, dass ein innerhalb gegebener Punkt des Flächenstückes F den Konturen des Kreises und ein gegebener Randpunkt von F einem bestimmten Punkte der Kreisperipherie entspricht."

Einige Beispiele werden vollständig durchgerechnet, und zum Schlusse wird noch der Zusammenhang dieser Theorie und speciell des angeführten Satzes von Riemann mit dem bekannten Cauchy'schen Theorem dargelegt, welches lautet: „Wenn eine Function $f(z)$ auf einem einfach zusammenhängenden ebenen Flächenstück holomorph ist, und t irgend einen Punkt innerhalb desselben bedeutet, dann ist:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-t}\,dt."$$

Bm.

A. Cayley. On some problems of orthomorphosis.
J. für Math. CVII. 262-277.

Der erste Teil der Abhandlung enthält Untersuchungen über die conforme Abbildung eines Rechteckes auf einen Kreis, vorausgesetzt, dass die beiden Seiten einander gleich, oder die eine halb so gross wie die andere ist.

Der zweite Teil betrifft die Frage, wann bei einer conformen Abbildung der z-Ebene auf die z_1-Ebene dem Umfange des Kreises, welcher mit dem Radius 1 um den Punkt $z=0$ beschrieben ist, wieder der Umfang eines solchen Kreises in der z_1-Ebene entspricht. Es wird gezeigt, dass die Gleichung:

$$z_1 = \frac{\varphi(z)}{z^m \bar{\varphi}\left(\frac{1}{z}\right)}$$

eine Abbildung der verlangten Art definirt. Hierin ist $\varphi(z)$ eine willkürliche Function; der Strich bedeutet, dass der conjugirte Wert zu nehmen ist, und m ist eine ganze Zahl. Da nun eine Gleichung, welche diese Kreise umkehrbar eindeutig auf einander abbildet, höchstens drei willkürliche Constanten enthalten kann, so folgt, dass diese Lösungen im allgemeinen keine (1, 1)-Correspondenz liefern. Um zu erkennen, was sich ereignet, untersucht Herr Cayley den besonderen Fall

$$z_1 = \frac{z(z-2)}{1-2z}$$

und findet, dass dem Kreise in der z_1-Ebene zwei Kreise in der z-Ebene entsprechen. St.

G. Pick. Ueber die conforme Abbildung einer Halbebene auf ein unendlich benachbartes Kreisbogen-Polygon. Wien. Ber. C. 1387-1395.

Die Beziehungen zwischen der Gestalt eines Kreisbogenpolygons und den Constanten der Differentialgleichung dritter bezw. zweiter Ordnung, welche die Abbildung desselben auf die Halbebene vermitteln, sind nur zu einem kleinen Teile bekannt. Ihre vollständige Ermittelung scheint dem Verfasser mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft. Deshalb hat er die Untersuchung auf solche Polygone beschränkt

welche der Halbebene unendlich benachbart sind, und zwar vorzugsweise unter der speciellen Festsetzung, dass alle Kreisbogen einen gemeinschaftlichen Orthogonalkreis besitzen. Er vermutet, dass man auf diesem Wege zu einer allgemeinen Lösung des Problems wird gelangen können. A.

G. Cassel. Sur un problème de représentation conforme. Acta Math. XV. 33-44.

Das Problem der conformen Abbildung eines ebenen Flächenstückes in das Innere eines Kreises ist bisher nur behandelt worden für den Fall, dass das Flächenstück durch eine endliche Zahl regulärer Bogen von analytischen Curven begrenzt ist. Der Verfasser hat dagegen, in Anknüpfung an ein von Herrn Weber gelegentlich behandeltes Abbildungsproblem (Gött. Nachr. 1886, F. d. M. XVIII. 1886. 360), bei welchem als Begrenzung der Ebene eine endliche Anzahl von Kreisen angenommen war, deren Flächen von einander getrennt liegen, und deren Mittelpunkte auf einer Geraden (der reellen Axe) liegen, das Problem behandelt, bei welchem die Zahl dieser Kreise unendlich gross ist, und ist dabei zu interessanten unendlichen Producten gelangt, welche mit hyperelliptischen Functionen zusammenhängen.

A.

G. Cassel. Om den konforma afbildningen af ett plan på ett prisma. Stockh. Vetensk. Bihang. XVI. Abt. I. No. 3. 11 S.

Es wird gezeigt, dass die Relation

$$y = C\int_0^x \frac{dx}{[(x^n-a^n)(x^n-b^n)]^{1/n}}$$

bei geeigneter Wahl der Constanten die conforme Abbildung einer Ebene auf ein gegebenes Prisma, dessen Durchschnitt ein reguläres n-Eck ist, vermittelt. Im Anschluss hieran behandelt der Verf. auch die conforme Abbildung einer Ebene auf die Oberfläche eines aus einem regelmässigen Prisma und zwei regelmässigen Pyramiden zusammengesetzten Körpers. Hierauf

folgt die Bemerkung, dass, obgleich ein Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen Seitenflächen betrachtet werden kann, die conforme Abbildung einer Ebene auf einen Cylinder nicht möglich ist. Bdn.

E. R. NEOVIUS. Ueber einige durch rationale Functionen vermittelte conforme Abbildungen. Acta Societatis Scientiarum Fennicae. Helsingfors. XVII. 1-14.

Durch Untersuchungen über Minimalflächen veranlasst, betrachtet der Verf. durch rationale Functionen vermittelte conforme Abbildungen auf eine einzige Halbebene von einigen, aus resp. 3, 4, 5 oder 6 in gegebener Weise zusammenhängenden Halbebenen gebildeten Riemann'schen Flächen. Bdn.

K. A. ANDREJEW. Homocyklische Abbildung der Kugel auf die Ebene. Charkow Ges. (2) III. 33-41. (Russisch.)

Herr Andrejew weist in dieser Abhandlung darauf hin, dass der Satz, den die Herren Markow (F. d. M. XX. 1888. 57.), Korkine (Arbeiten d. VIII. Versammlung russ. Naturforscher und Aerzte in St. Petersburg 1890. Abt. I. 6-8), der ihn Zolotarew's Aufgabe nennt, und Mlodzieiowski (Arbeiten d. Phys. Section d. Moskauer Gesellsch. für Naturk. B. III, H. 1, 1890) betrachtet haben: „Jede homocyklische Abbildung der Kugel auf die Ebene ist eine stereographische Projection", bereits Möbius bekannt war (siehe dessen „Theorie der Kreisverwandtschaft", Werke B. II). Deshalb kann jetzt nicht der Satz selbst, wohl aber können die Eigentümlichkeiten der Beweise desselben die Aufmerksamkeit der Forscher auf sich lenken. Herr Andrejew giebt deshalb einen neuen Beweis von rein geometrischem Charakter, der darum seiner Meinung nach der Natur der Frage mehr entspricht.

Si.

E. HOLLAENDER. Ueber äquivalente Abbildung. Diss. Halle a. S.

E. HOLLAENDER. Ueber flächentreue Abbildung. Progr. (No. 447) Mühlheim a. d. Ruhr. 35 S. 4°.

Sind zwei Flächen so auf einander bezogen, dass entsprechende Stücke flächengleich sind, so heisst die Abbildung der einen Fläche auf die andere eine „äquivalente“. Während die conforme Abbildung vielfach untersucht worden ist, hat die Litteratur der äquivalenten Abbildung einen verhältnismässig geringen Umfang. Der Verfasser erwähnt in der Einleitung Arbeiten von Schellhammer, Tissot und Korkine, die sich auf die äquivalente Abbildung beziehen. Nach Aufstellung der Differentialgleichung, von welcher die äquivalente Abbildung abhängt, behandelt der Verfasser zunächst die Frage nach den congruenten Abbildungen, d. h. nach denjenigen äquivalenten Abbildungen, die zugleich conform sind. Das Resultat der hierauf bezüglichen Untersuchung lautet dahin, dass zwei congruente Flächen auf einander abwickelbar sind. Der Verfasser betrachtet sodann die äquivalente Abbildung zweier Ebenen auf einander. Nachdem er die diesem Falle entsprechende Differentialgleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}-\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\pm 1$$

allgemein integrirt hat, knüpft er die weitere Untersuchung an zwei bemerkenswerte, von Tissot herrührende Sätze. Nach dem einen dieser Sätze giebt es in jeder äquivalenten Abbildung ein System von zwei Curvenscharen, deren Bilder gleiche Bogenlängen haben (automekoische Curven). Der Verfasser bestimmt nun diejenigen äquivalenten Abbildungen einer Ebene auf eine andere, bei welchen eine Schar paralleler Geraden der einen Ebene automekoische Curven sind. Nach dem anderen Tissot'schen Satze giebt es in jeder äquivalenten Abbildung ein System zweier orthogonalen Curvenscharen, deren Bilder ein eben solches System bilden. Sind die beiden Flächen Ebenen, und wird jenes System in der einen Ebene von zwei Scharen von Geraden gebildet, so heisst die Abbildung „rectangulär“. Der Verfasser bestimmt die allgemeinste derartige rectanguläre Abbildung. Die Resultate werden durch mannigfaltige Beispiele, die durch Specialisirung der in den allgemeinen Formeln auftretenden willkür-

lichen Functionen entstehen, erläutert. Diese Beispiele sind zum Teil schon in den Arbeiten von Schellhammer und Korkine betrachtet worden.

Mit der Theorie der äquivalenten Abbildung steht die Theorie der Flächen constanter Krümmung in engem Zusammenhange. In der That besitzt nach der Gauss'schen Definition des Krümmungsmasses eine Fläche constante Krümmung immer, und nur dann, falls ihre sphärische Abbildung (durch parallele Normalen) eine äquivalente ist, wenn man den absoluten Wert der constanten Krümmung gleich 1 setzt. Auf Grund dieser Thatsache bestimmt der Verfasser die Helikoidflächen constanter Krümmung und beweist, dass die Rotationsflächen constanter Krümmung durch jede der folgenden beiden Eigenschaften vollständig charakterisirt sind: 1) Ihre Krümmungslinien entsprechen bei der sphärischen Abbildung den Meridianen und Breitenkreisen der Kugel. 2) Für die Curven der einen Schar der Krümmungslinien sind die Hauptkrümmungsradien für sich constant. Hz.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

J. VIOLLE. Lehrbuch der Physik. Deutsche Ausgabe von E. Gumlich, L. Holborn, W. Jaeger, D. Kreichgauer, St. Lindeck. Erster Teil: Mechanik. Erster Band. Allgemeine Mechanik und Mechanik der festen Körper. Berlin. Julius Springer. XVI + 496 S. gr. 8°.

Der vorliegende erste Teil des Violle'schen Lehrbuchs der Physik, welcher die allgemeine Mechanik und die Mechanik der festen Körper behandelt, zerfällt in eine Einleitung und in zwei Hauptabschnitte. Die Einleitung entwickelt in gedrängter Kürze die Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler nebst der Methode der kleinsten Quadrate. Der erste Abschnitt über die allgemeinen Gesetze und Eigenschaften der Materie umfasst drei Capitel. Von diesen enthält das erste die allgemeine Mechanik mit den Unterabteilungen Kinematik, Statik, Dynamik eines materiellen Punktes und Dynamik von Systemen, endlich absolute Einheiten und C-G-S-System, auf 122 Seiten ein kurzgefasstes Lehrbuch der reinen Mechanik. Dem physikalischen Charakter des Werkes entsprechend, ist das zweite Capitel der Schwere gewidmet und bevorzugt in den vier Unterabteilungen vom Fall der Körper, vom Pendel, von der Wage und von der

allgemeinen Gravitation die Messmethoden und die bei ihnen gebrauchten Apparate, ohne jedoch die mathematische Theorie zu vernachlässigen. Der zweite Abschnitt geht sodann auf die Haupteigenschaften der festen Körper ein. Nachdem im ersten Capitel die Structur der krystallinischen Körper besprochen ist, wird im zweiten die Elasticität in Hinsicht auf Theorie (allgemeine Gleichungen und elastische Kräfte, die aus Deformation hervorgehen) und auf Experimente erledigt (Zug, Torsion, Biegung, innere Reibung). Die folgenden Capitel sind weniger umfangreich; sie erörtern Gestaltsänderung und Festigkeit (III), Teilbarkeit (IV), Adhäsion und Reibung beim Gleiten und Rollen, sowie Messung der Kraft durch Bremsen (V), den Stoss der Körper (VI). Die Uebersetzer haben die neueste Litteratur nachgetragen und die Nachweise der deutschen Litteratur vermehrt. Als Assistenten der physikalisch-technischen Reichsanstalt waren sie in der besten Lage, die Vorzüge des weitgehenden Ansprüchen genügenden Lehrbuches zu schätzen. Lp.

J. N. Franke. Allgemeine Grundsätze der Mechanik starrer Systeme auf Grund homogener Coordinaten der Bewegung und der Kräfte. Abh. d. Krakauer Akademie. 1e Serie, III. 158-186. (Polnisch.)

Der Zweck dieser Abhandlung ist die Entwickelung der wichtigsten Sätze der Mechanik starrer Systeme mittels einer analytischen Methode, welche sich auf die allgemeinsten von Sir R. S. Ball eingeführten Coordinaten der Bewegung und der Kraft gründet. In dem ersten vorliegenden Teile sind Kinematik und Statik behandelt. Dn.

E. Ott. Elemente der Mechanik. Zweite Auflage. Zürich. Friedr. Schulthess. VIII + 171 S gr. 8°.

Das Werk, welches ursprünglich für die schweizerischen Realschulen geschrieben und in erster Auflage 1877 erschienen war, nach Streichung der Mechanik als eines selbständigen

Faches jener Anstalten jedoch seinem ursprünglichen Zwecke nicht mehr dienen konnte, behandelt den Stoff in zwei Abschnitten: I. Mechanik des materiellen Punktes, II. Mechanik starrer Körper. Obgleich nur die Hülfsmittel der elementaren Mathematik benutzt sind, werden doch die Lehren in ziemlich umfassender Weise vorgetragen. Die Darstellung ist von musterhafter Klarheit, und die Figuren von einer Sauberkeit, wie sie auf den technischen Hochschulen durch vielfache Uebung erzielt wird. Diese Vorzüge machen es begreiflich, dass das Buch so viele Freunde erworben hat, um nun auch in zweiter Auflage erscheinen zu müssen. Was Ref. vermisst, ist die Einführung des absoluten Masssystems. Ueberhaupt ist das ganze Werk auf dem Standpunkte der älteren französischen Lehrbücher gehalten. Lp.

C. V. Burton. An introduction to dynamics, including kinematics, kinetics and statics, with numerous examples. London. Longmans. XIII + 392 S.

Ein elementares Werk, das in umfassender Vollständigkeit und mit Klarheit die gewöhnlichen Gegenstände der Lehrbücher für Anfänger behandelt. Gbs. (Lp.)

P. v. Zech. Aufgaben aus der theoretischen Mechanik nebst Auflösungen. Zweite Auflage unter Mithülfe von C. Cranz. Stuttgart. J. B. Metzler. VIII + 225 S. 8°.

Die Sammlung erstreckt sich auf Aufgaben aus der ganzen analytischen Mechanik einschliesslich der Lehre von der Festigkeit und der Hydrostatik. Am Anfange jedes Abschnittes sind die bezüglichen Sätze und Formeln immer kurz zusammengestellt; daher kann das Buch, wie der Verf. in dem Vorworte bemerkt, für das Selbststudium der Studirenden, besonders an einer technischen Hochschule, brauchbar sein als Einleitung für die Anwendungen der Mechanik in den technischen Fächern. Im Vergleich mit der ersten Auflage sind neu aufgenommen manche

Aufgaben, welche in Württemberg beim realistischen Professoratsexamen gegeben sind und von Hrn. C. W. v. Baur herrühren. Hr. Cranz hat das Ganze durchgesehen und das Werk durch Zusätze über die Elemente der Graphostatik nach Vorträgen des Hrn. v. Baur und über mechanische Principien, sowie durch einige Beispiele zum d'Alembert'schen Principe vermehrt. Obschon die Sammlung nicht so umfassend ist wie z. B. die von Jullien und ähnliche, so kommt sie in ihrem beschränkteren Umfange und mit den hinreichend ausführlich gegebenen Lösungen den Wünschen und Bedürfnissen der studirenden Jugend entgegen und kann ihr gute Dienste leisten. Lp.

REHDANS. Aufgaben aus der Statik und Dynamik mit Beispielen, welche an preussischen Anstalten in der Entlassungsprüfung bearbeitet worden sind. Pr. (Nr. 32) Gymn. Graudenz. 24 S. 8°.

Fortsetzung der in F. d. M. XXII. 1890. 844 angezeigten Sammlung. Lp.

T. W. WRIGHT. Nomenclature of mechanics. New York M. S. Bull. I. 46-48.

Betont nur die vorhandenen Schwierigkeiten, um ihre Erledigung der Math. Gesellschaft von New York ans Herz zu legen. Lp.

F. SLATE. Absolute and gravitation systems. Nature XLIV. 445.

W. LARDEN. $W = Mg$. Nature XLIV. 493, 614.

Hr. Slate wünscht solche Definitionen im absoluten und im Gravitations-Masssystem, dass die Unterschiede erst in den abgeleiteten Einheiten hervortreten, und stellt eine kurze Skizze für beide Systeme auf. Hr. Larden spricht sich für Beibehaltung der Formel $W = Mg$ mit ihren Folgen aus. Lp.

E. NOVARESE. Sulla definizione della velocità di un punto. Rivista di Mat. I. 12-14.

G. M. TESTI. Sulla definizione di velocità di un punto. Daselbst. I. 78-84.

Herr Novarese wirft die Fragen auf: Ist die Geschwindigkeit in der Kinematik als eine Zahl oder als eine Strecke zu definiren? Und muss man in der Dynamik die kinematische Betrachtungsweise beibehalten, oder die Geschwindigkeit als etwas mit den besonderen Eigenschaften des beweglichen materiellen Punktes Zusammenhängendes ansehen?

Herr Testi definirt als die „mittlere Geschwindigkeit in einem Zeitintervall Δt" die Geschwindigkeit eines ideellen Punktes, welcher während der Zeit Δt mit geradliniger und gleichförmiger Bewegung von $P(x, y, z)$ nach $P'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ geht; ihr Zahlwert ist:

$$v_m = \frac{1}{\Delta t}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2},$$

ihre Richtung ist die Gerade PP'. Nimmt Δt unbeschränkt ab, und sind $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ nebst ihren ersten Ableitungen endliche und stetige Functionen, so nähert sich v_m, dem Werte sowie der Lage nach, einer Grenze, die man als die „Geschwindigkeit im Zeitpunkte t" definiren darf; ihre Grösse ist:

$$v = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2},$$

und ihre Richtung ist die Tangente der Bahn im Punkte P. Man kann dann den folgenden Satz beweisen: Wird die Bewegung vom Zeitpunkte t an geradlinig und gleichförmig, so fällt die Geschwindigkeit dieser Bewegung der Grösse und Richtung nach mit der oben definirten Geschwindigkeit zusammen. Diese Betrachtungsweise, die man in dem später erschienenen Traité de mécanique rationnelle von Appell (T. I, Paris 1893) vertreten findet, ist von derjenigen von Delaunay (Traité de mécanique rationnelle, Paris 1883) der Hauptsache nach nicht verschieden.

Stellt man sich nun auf den dynamischen Standpunkt, so ist es nach Hrn. Testi unmöglich, eine streng philosophische

Definition der Geschwindigkeit aufzustellen, und es ist daher ratsam, sich auch in der Dynamik mit der kinematischen Definition zu begnügen. Vi.

A. Gleichen. Ueber die Anwendung der Methode des Imaginären auf Probleme des Gleichgewichts und der Bewegung in einer Ebene. Schlömilch Z. XXXVI. 243-249.

Der Verf. definirt die Grösse $re^{i\alpha}$ als das „imaginäre Moment" der Strecke r, welche mit der x-Axe den Winkel α einschliesst, und baut auf dieser Grundlage die weiteren Definitionen der durch Strecken zu versinnlichenden dynamischen Grundbegriffe auf. Die Anwendbarkeit dieser Bestimmungen wird an dem Princip der virtuellen Geschwindigkeit, dem d'Alembert'schen Principe, dem Problem der Fadencurven für centrale Kräfte und der Centralbewegung gezeigt. Zuletzt werden Ausdrücke für die Tangential- und Normal-Beschleunigung n^{ter} Ordnung hergeleitet. Lp.

Th. Beck. Historische Notizen. Civiling. XXXVII. 409-434.

Die Notizen betreffen Buonaiuto Lorini, einen in der zweiten Hälfte des sechzehnten Jahrhunderts lebenden Festungsbauer. Nach der einzigen Quelle, der Vorrede zum Werke „Delle Fortificationi", wird zunächst mitgeteilt, was über die äusseren Lebensumstände desselben bekannt ist. Dann wird der Inhalt des in Frage stehenden Werkes besprochen, welcher sich, wie bei älteren Lehrbüchern der Festungsbaukunst üblich, auch auf reine Mechanik erstreckt. Bezüglich der letzteren schliesst sich Lorini nach seiner eigenen Angabe an Guido Ubaldi an. F. K.

Weitere Litteratur.

L. Arnal. Traité de mécanique (statique, cinématique, dynamique, hydraulique, résistance des matériaux, chaudières à vapeur, moteurs à vapeur et à gaz). Tome II: Dynamique et hydraulique. Paris. 512 S. gr. 8°.

BERNOULLI's Vademecum des Mechanikers oder praktisches Handbuch für Mechaniker, Techniker, Gewerbsleute und technische Lehranstalten, bearbeitet von F. Autenheimer. 19. Aufl. Stuttgart. Cotta'sche Buchh. Nachf. XII + 512 S. 8°.

EDM. BOUR. Cours de mécanique et machines. Statique et travail des forces dans les machines à l'état de mouvement uniforme. 2me éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

E. BUDDE. Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Bd. II. Mechanische Summen und starre Gebilde. Berlin. Georg Reimer. XII + 419-968 S. 8°.

Referat in F. d. M. XXII. 1890. 841.

E. BURAT. Précis de mécanique. 8e éd., revue et augmentée. Paris. 8°.

P. DULOS. Cours de mécanique, à l'usage des écoles d'arts et métiers et de l'enseignement spécial des lycées. IVe Partie. Thermodynamique. Machines à vapeur. Chaudières à vapeur. Machines à air chaud et à gaz. Calcul des volants. Appareils dynamométriques. 2me éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

PH. GILBERT. Cours de mécanique analytique. Partie élémentaire. 3e éd. augmentée. Paris. Gauthier-Villars et Fils. IX + 526 S. 8°. [Darboux Bull. (2) XV. 197-198.]

J. B. LOCK. Mechanics for beginners. Part I. Dynamics and statics. London. Macmillan and Co. [Nature XLV. 101-102.]

S. L. LONEY. The elements of statics and dynamics. Part I: Statics. Part II: Dynamics. Cambridge. 288 u. 190 S. 8°.

E. MASCART. Éléments de mécanique. 6e éd. Paris. 200 S. 8°.

J. MASSAU. Cours de mécanique de l'université de Gand. 1er fascicule: Géométrie symbolique, statique, cinématique. 3e éd., revue et augmentée. Gand. Lobet. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 365 S. fol., autogr. [Darboux Bull. (2) XV. 141-143.]

D. Padelletti. Lezioni di meccanica razionale dettate nella R. Università di Napoli. 6a ed. 2 vol. Napoli. 662 u. 752 S. 4°. lithogr.

E. J. Routh. Elementary part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. (Being part I of a treatise on the whole subject.) With numerous examples. 5th edition, revised and enlarged. London. 8°.

S. Rychlicki. Physikalische Aufgaben aus der Mechanik nebst Auflösungen für die Prima höherer Lehranstalten. Wongrowitz. Lewandowski. 47 S. 8°. [F. d. M. XXII. 1890. 845.]

J. Weisbach. Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. III. Teil: Die Mechanik der Zwischen- und Arbeitsmaschinen. 2. Aufl., bearbeitet von G. Herrmann. 3. Abt.: Die Maschinen zur Formveränderung. 5. u. 6. Lieferung. Braunschweig. Vieweg u. Sohn. 385-576. 8°.

A. G. Webster. $W = Mg$. Nature XLV. 29.

A. Hall. What is force? Washington Bull. XI. 583-587.

H. H. Bates. Remarks on the paper of Professor Hall. Washington Bull. XI. 587-590.

J. Harris (Kuklos). The laws of force and motion. London. Wertheimer, Lea, and Co. (1890) [Nature XLIV. 443].

Felix Klein. Ueber neuere englische Arbeiten zur Mechanik. Naturf. Ges. Halle LXIV. 4-5.

Capitel 2.

Kinematik.

L. Burmester. Ueber die momentane Bewegung ebener Mechanismen. Techn. Blätter. XXII. 1-18, 73-83. (1890.)

Die Einleitung hebt die Bedeutung der Kinematik für die Maschinentheorie und Fachwerktheorie hervor und schliesst mit

den Worten: „Um die gegenwärtige Entwickelung der Lehre von den Mechanismen zu fördern, wollen wir in dieser Abhandlung bekannte und neue Ergebnisse in methodischem Zusammenhang darlegen und damit die Directive für den weiteren Fortschritt geben."

Der Abschnitt I handelt von den Polconfigurationen der ebenen Mechanismen und beruht im wesentlichen auf dem Satze, dass bei unendlich kleiner Bewegung die drei Pole von drei ebenen Systemen in einer Geraden liegen. Sind n Systeme vorhanden, so giebt es offenbar $\frac{1}{2}n(n-1)$ Pole, welche nach dem eben angegebenen Satze zu je dreien auf $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ Geraden liegen müssen. Die aus den Polen und den Geraden gebildete Figur nennt der Verfasser eine n-systemige Polconfiguration. Es ergiebt sich zunächst, dass der ebene Schnitt einer raumeckigen Configuration R_n eine n-systemige Polconfiguration ist. Ferner: Eine n-systemige Polconfiguration enthält die Anzahl $\frac{n(n-1)\ldots(n-(\nu-1))}{1.2\ldots\nu}$ von ν-systemigen Polconfigurationen. Genauer wird alsdann die viersystemige Polconfiguration untersucht, welche als Grundlage für die Bestimmung der n-systemigen Configuration anzusehen ist. Sind z. B. von einer solchen Configuration vier Pole gegeben, von denen nicht drei in gerader Linie liegen, z. B. (12, 23, 34, 14), so sind dadurch auch die beiden noch fehlenden Pole bestimmt. Der Verfasser nennt die Gesamtheit von vier derartigen Polen eine Polvierung, die Anzahl der zur Bestimmung einer Configuration hinreichenden Anzahl von Polen eine Constellation; es ist also eine Polvierung auch eine Polconstellation.

Der Verfasser löst alsdann zwei Aufgaben, auf welche sich die Bestimmung der Pole bei sehr vielen complicirten Mechanismen reducirt. Nämlich: Es soll eine viersystemige Polconfiguration gefunden werden, von welcher drei in einer Geraden liegende Pole, z. B. (12, 23, 31), und drei gerade Linien, welche durch je einen der drei anderen Pole hindurchgehen, gegeben sind; und zweitens eine viersystemige Polconfiguration ist zu bestimmen, wenn zwei ihrer Pole gegeben sind, welche nicht mit

einem der vier anderen Pole in einer geraden Linie liegen, und wenn jeder dieser vier anderen Pole auf einer gegebenen Geraden liegt.

Der zweite Abschnitt behandelt die Geschwindigkeitszustände. Zunächst bespricht der Verf. die von Williot angegebene und von Land bei seiner kinematischen Untersuchung der Fachwerke verwendete Darstellung des Geschwindigkeitszustandes. Bei dieser werden die Geschwindigkeiten der sechs Pole in Bezug auf ein fünftes ruhendes System durch gerade Linien dargestellt, welche von einem Punkte ausgehen und auf der Richtung der betreffenden Geschwindigkeiten senkrecht stehen. Indem man ferner die Endpunkte irgend zweier der Linien verbindet, erhält man die relativen Geschwindigkeiten. Es werden die Eigenschaften des so entstehenden Geschwindigkeitsnetzes abgeleitet und dann die Beziehungen desselben zur Statik des Fachwerkes kurz angegeben.

Der dritte Abschnitt betrifft die Momentmechanismen, d. h. solche Mechanismen, bei denen vermöge ihrer Gliederverbindung nur eine unendlich kleine Bewegung ihrer Glieder stattfinden kann. F. K.

J. Larmor. A scheme of the simultaneous motions of a system of rigidly connected points, and the curvatures of their trajectories. Cambr. Proc. VII. 36-42. (1890.)

Bei der ebenen Bewegung benutzt man bekanntlich zur Bestimmung der Krümmung der Bahn eines Punktes den Ort der Punkte, welche sich augenblicklich in den Wendepunkten ihrer Bahn befinden, den sogenannten Wendekreis. Verf. stellt entsprechende Untersuchungen für die räumliche Bewegung eines starren Körpers an, wobei an Stelle des Wendekreises eine Raumcurve dritter Ordnung tritt. Ho.

A. J. Pressland. Note on an equation of motion. Edinb. M. S. Proc. IX. 91-92.

Ein Beweis der Gleichung $s = nt + \frac{1}{2}ft^2$ in der elementaren Kinematik; derselbe beruht auf dem Principe, dass, wenn zwei

Punkte A, B sich mit den Geschwindigkeiten u, v in derselben Geraden bewegen und wenn ein dritter Punkt C sich mit der Geschwindigkeit $u+v$ in der nämlichen Geraden bewegt, der von C zurückgelegte Weg gleich der Summe der von A und von B in derselben Zeit zurückgelegten Wege ist.

Gbs. (Lp.)

L. Lecornu. Sur les mouvements plans. Nouv. Ann. (3) X. 5-17.

Wenn a, b, z, ζ complexe Zahlen sind, welche durch die Gleichung $z = a+b\zeta$ verbunden sind, so entspricht jedem Punkte ζ der Zahlenebene ein Punkt z, und zwar ist ζ zu den Punkten 0 und 1 so gelegen, wie z zu den Punkten a und $a+b$, d. h. das Dreieck, welches aus jenen drei Punkten gebildet wird, ist dem aus diesen drei Punkten gebildeten Dreiecke ähnlich. Werden a und b als Functionen der Zeit t aufgefasst, so bewegt sich das System der Punkte z, indem es mit dem System der Punkte ζ die Aehnlichkeit bewahrt. Ist im besonderen $\text{mod.} b = 1$, so bewahrt das System der Punkte z die Congruenz mit dem System der Punkte ζ, bleibt also bei der Bewegung in sich starr. Diese Gedanken (vergl. Ad. Schumann, Beiträge zur Kinematik ähnlich-veränderlicher Gebilde, F. d. M. XIII. 1881. 670) bilden die Grundlage der Entwickelung der Gesetze über die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene. Die wichtigsten Gesetze werden abgeleitet, und im Anschluss daran werden folgende Probleme behandelt:

1) Ist C das Geschwindigkeitscentrum und J das Centrum der Beschleunigung, so sind diejenigen Bewegungen zu bestimmen, bei denen die Bewegung von J ähnlich derjenigen von C ist.

2) Es ist diejenige Bewegung zu finden, bei welcher die Strecke JC eine constante Grösse und Richtung bewahrt.

3) Es sind solche Verschiebungen zu finden, dass das Beschleunigungscentrum sich nach einem gegebenen Gesetze bewegt.

Schn.

F. Spath. Die Geschwindigkeiten verschiedener Ordnung unveränderlicher Systeme mit besonderer Berücksichtigung der Beschleunigung zweiter Ordnung. Monatsh. f. Math. II. 433-450.

Die zur Beschreibung der ebenen, sphärischen und allgemeinen Bewegung starrer Systeme dienenden Begriffe der Geschwindigkeiten höherer Ordnung werden auf Grassmann'sche Weise abgeleitet, und für sie gültige Gesetze hauptsächlich mit Hülfe innerer Multiplication von Strecken begründet.

Js.

L. Lévy. Note sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Darboux Bull. (2) XV. 76-80.

Wenn eine Fläche von unveränderlicher Gestalt sich verschiebt, so bietet sich die Frage, ob die entstehende Flächenschar als eine der Familien eines dreifach orthogonalen Systems betrachtet werden kann. Die Ebene und die Kugel sind solche Flächen; ob sie aber die einzigen sind, das zu beurteilen hat Herr Darboux von den gemeinsamen Integralen von sechs Gleichungen mit partiellen Derivirten dritter Ordnung abhängig gemacht. Diese Gleichungen behandelt der Verf. und zeigt, dass Ebenen und Kugeln die einzigen Flächen sind, welche, wenn sie sich, ohne ihre Gestalt zu ändern, verschieben, eine Lamé'sche Flächenfamilie darstellen.

Schn.

C. A. Laisant. Quelques propriétés cinématiques d'un système de deux mouvements simultanés. Teixeira J. X. 97-102.

Ausführung einiger der Société Mathématique de France und der Société Philomathique vorgetragenen Ueberlegungen. Wenn zwei bewegliche Punkte M und M' gleichzeitig im Raume auf beliebige Weise ihren Ort ändern, O ein fest gegebener Punkt ist, so betrachte man das in O auf der Ebene OMM' errichtete Lot und trage auf ihm die Länge OX proportional der Dreiecksfläche OMM' derart ab, dass für einen in OX mit den

Füssen in O stehenden Beobachter der Drehungssinn von OM nach OM' rechtsläufig sei. Die Bewegung von X, wenn M und M' verrückt werden, wird von Hrn. Laisant die zusammengesetzt-flächige (composé-aréolaire) Bewegung der beiden Bewegungen von M und M' bezüglich des Punktes O genannt. In dem vorliegenden Artikel erledigt der Verf. die zusammengesetzt-flächige Bewegung in einigen einfachen Fällen. Zuerst betrachtet er zwei gleichförmige und geradlinige Bewegungen im Raume, darauf zwei elliptische Bewegungen, welche gemäss dem Gesetze einer centralen, der Entfernung proportionalen Anziehung erfolgen, ferner die Bewegungen zweier Körper, die unter der Einwirkung eines Repulsionscentrums der Entfernung proportional abgestossen werden, u. dergl. m. Tx. (Lp.)

M. Grübler. Beitrag zur Theorie der Relativbewegung dreier starrer complaner Ebenen. Riga. Industrie-Ztg. XVII. 61 - 64.

Wenn zwei starre ebene Systeme in drei consecutiven Lagen gegen eine dritte complane Ebene gegeben sind, so ist die Relativbewegung dieser beiden Systeme durch die Elemente bedingt, welche die Bewegung jedes dieser Systeme gegen die feste complane Ebene kennzeichnen. In der vorliegenden Arbeit werden Relationen entwickelt, welche die Elemente dieser drei Bewegungen verknüpfen; aus ihnen ergeben sich die Constructionen derjenigen geometrischen Elemente, welche die Relativbewegung charakterisiren. Schn.

H. Menzel. Ueber die Bewegung einer starren Geraden, welche mit mehreren von ihren Punkten in festen Ebenen oder auf festen Geraden gleitet. Diss. Münster. Zittau. R. Menzel. 64 S. 8°.

In interessanter synthetischer Form werden folgende Sätze abgeleitet:

1) Gleitet eine Gerade g mit zwei Punkten in zwei festen

Ebenen a_1 und a_2, so kommt ein beliebiger weiterer Punkt P der Geraden zweimal in jede Lage des Raumes, und zwar werden die Punkte P, nach denen zwei reelle Gerade g hinführen, von denen, in welchen sich zwei conjugirt imaginäre g schneiden, durch einen elliptischen Cylinder geschieden.

2) Gleitet eine Gerade g mit drei Punkten in drei festen Ebenen a_1, a_2, a_3, so beschreibt ein beliebiger Punkt P von g ein Ellipsoid. Die Ellipsoide sind concentrisch, und zwar sind je zwei durch die beschreibenden Punkte P und P' affin auf einander bezogen.

3) Gleitet eine Gerade g mit vier Punkten auf vier festen Ebenen a_1, a_2, a_3, a_4, so beschreiben die Punkte von g Ellipsen, welche als affine Gebilde aufzufassen sind. Die Mittelpunkte liegen auf einer Geraden n, welche durch die Ebenen derselben nach denselben Verhältnissen wie g geteilt wird, während gleichzeitig die Teilstrecken ihre Minimalwerte erreichen. Gegen diese Gerade n sind alle Geraden g gleich geneigt.

Im Falle 1) bilden die Geraden g einen Complex. Ordnung und Klasse des Complexkegels und der Complexcurve werden bestimmt und die Singularitäten, welche diese Gebilde in Bezug auf die gegebenen und die unendlich fernen Elemente zeigen, entwickelt.

Im Falle 2) bilden die Geraden eine Congruenz sechster Ordnung und zweiter Klasse. Die sechs Congruenzstrahlen liegen auf einem Kegel zweiter Ordnung, welcher durch die Ecken des aus a_1, a_2, a_3, a_∞ gebildeten Tetraeders hindurchgeht, und die beiden in eine Ebene μ fallenden Strahlen berühren einen Kegelschnitt, welcher die Geraden (μa_1), (μa_2), (μa_3), (μa_∞) zu Tangenten hat. Der Rang dieser Congruenz wird bestimmt, sowie Ordnung und Klasse ihrer Brennfläche ermittelt.

Im Falle 3) endlich bilden die Geraden g eine Kegelfläche vierter Ordnung und dritter Klasse. Auf die besonderen Beziehungen, welche diese Fläche zu den in die Aufgabe eintretenden Elementen zeigt, kann hier nicht näher eingegangen werden.

Zum Schluss mag noch darauf hingewiesen werden, dass auch die Betrachtung derjenigen Fälle, in denen die Führung

der Geraden durch Specialisirung besondere Formen annimmt, mit den allgemeinen Entwickelungen eng verbunden wird.

Schn.

C. Formenti. Movimento in un piano di una figura di superficie costante ed a deformità affini fra loro nel caso in cui non agiscano forze motrici. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 204-212.

Die Arbeit kann als ein Nachtrag zu früheren Arbeiten des Verfs. angesehen werden, welche an derselben Stelle erschienen sind (vergl. F. d. M. XVI. 1884. 769, XVII. 1885. 826, XVIII. 1886. 849). Während in der letzten Abhandlung allgemein die Bewegung räumlich affiner Punktsysteme untersucht wurde, beschränkt sich der vorliegende Aufsatz auf die Bewegung einer ebenen Figur, welche sich in ihrer Ebene so bewegt, dass sie denselben Inhalt behält und zu sich selbst affin bleibt. Sind (x_0, y_0) die anfänglichen Coordinaten eines Punktes derselben, (x, y) die nach Verlauf einer Zeit t, so ist

$$(1) \qquad x = \lambda+\alpha x_0+\beta y_0, \quad y = \mu+\gamma x_0+\delta y_0,$$

wo λ, μ die gegenwärtigen Coordinaten des zu Anfang mit dem Nullpunkte zusammenfallenden Punktes und α, β, γ, δ Functionen der Zeit t allein sind, sodass $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$. Aus (1) folgt sofort, dass immer ein und derselbe Punkt mit dem Schwerpunkte der Figur zusammenfällt. Die Centralellipse des Massensystems bewegt und deformirt sich mit der Bewegung der Figur. Es giebt aber immer eine nämliche Ellipse, welche mit den auf einander folgenden Centralellipsen zusammenfällt. Beide Eigenschaften kommen den homographisch veränderlichen Punktsystemen nicht zu. Weitere Betrachtungen beziehen sich auf die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. In dem letzten Paragraphen werden besonders solche Bewegungen behandelt, bei denen die Figur einen festen Punkt hat. Die Differentialgleichungen lassen sich dann integriren und führen auf ein elliptisches Integral zweiter Gattung für die Zeit, erster und dritter Gattung für die übrigen zu bestimmenden Grössen.

Lp.

F. WITTENBAUER. Die Wendepole der absoluten und der relativen Bewegung. Schlömilch Z. XXXVI. 231-242.

Der Bewegungszustand eines ebenen Systems Σ_2 sei durch die Angabe des augenblicklichen Drehpunktes O_2, des Wendepols J_2, der Winkelgeschwindigkeit ω_2 und der Winkelbeschleunigung $\lambda_2 = \frac{\partial \omega_2}{\partial t}$ gekennzeichnet. Dieses System sei gleichzeitig genötigt, an der Bewegung eines anderen in seiner Ebene gelegenen Systems teilzunehmen, dessen Bewegungszustand in zwei auf einander folgenden Zeitelementen durch O_1, J_1, ω_1 und λ_1 charakterisirt ist. Die letztere Bewegung wird als führende, die erste als die geführte bezeichnet. Die Arbeit beschäftigt sich zunächst mit der Frage: Wie sind die Grössen O, J, ω, λ, welche die resultirende Bewegung von Σ_2 gegen die ruhende Ebene, also die absolute Bewegung angeben, aus jenen zu ermitteln. Da $\omega = \omega_1 + \omega_2$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ und der Drehpunkt O durch den barycentrischen Ausdruck $\omega O = \omega_1 O_1 + \omega_2 O_2$ bestimmt ist, so dreht sich die Frage um die Bestimmung des resultirenden Wendepoles J der absoluten Bewegung. Nachdem diese Aufgabe erledigt ist und einige Besonderheiten dargelegt sind, welche sich bei Specialisirung der gegebenen Bewegungszustände darbieten, wendet sich der Verf. zur Darstellung der relativen Bewegung des Systems Σ_2 in Bezug auf ein in derselben Ebene bewegtes System Σ_1, wenn die absolute Bewegung des Systems und die führende Systembewegung gegeben sind. Da die Grössen O_2, ω_2, λ_2 leicht ermittelt sind, so handelt es sich wesentlich um die Darstellung des Wendepols J_2 der relativen Bewegung aus den Grössen O, J, ω, λ der absoluten und den Grössen O_1, J_1, ω_1, λ_1 der führenden Bewegung. Schn.

R. MÜLLER. Ueber die Krümmungsmittelpunkte der Bahncurven in ebenen ähnlich-veränderlichen Systemen. Schlömilch Z. XXXVI. 129-137.

Wenn in einer Phase eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems zu drei beliebigen Systempunkten die Krümmungsmittel

punkte der von den Systempunkten beschriebenen Bahncurven bekannt sind, so lässt sich, wie Herr Geisenheimer gezeigt hat, (Schlömilch Z. XXIV. 129, F. d. M. XI. 1879. 612) zu jedem Systempunkte der Krümmungsmittelpunkt der Bahncurve construiren. Die Systempunkte und die Krümmungsmittelpunkte stehen in verwandtschaftlicher Wechselbeziehung. Diese bildet den Gegenstand vorliegender Arbeit. Auf die besondere Natur der Verwandtschaft kann hier nicht näher eingegangen werden; es muss die Bemerkung genügen, dass die betrachtete Wechselbeziehung sich als eine ein-zweideutige Verwandtschaft dritten Grades darstellt.

Schn.

R. MÜLLER. Ueber die Krümmung der Bahnevoluten bei starren ebenen Systemen. Schlömilch Z. XXXVI. 193-205.

Die Betrachtung von vier auf einander folgenden Phasen eines ebenen starren Systems führt auf den Krümmungsmittelpunkt der Evolute der Bahncurve, welche ein Systempunkt bei der Bewegung beschreibt. Es wird zu einem Systempunkte jener Krümmungsmittelpunkt construirt und die Natur der Verwandtschaft dargelegt, welche zwischen jenen beiden Punktsystemen besteht.

Schn.

R. MÜLLER. Construction der Krümmungsmittelpunkte der Hüllbahnevoluten bei starren ebenen Systemen. Schlömilch Z. XXXVI. 257-266.

Geht ein starres ebenes System in zwei unendlich nahe auf einander folgende Nachbarlagen über, so beschreibt eine Systemcurve eine Hüllbahn, deren Krümmungsmittelpunkt bestimmt ist. Eine vierte sich anschliessende Systemlage führt zur Krümmung der Evolute jener Hüllbahn. Sind nun für irgend zwei Systemcurven die Krümmungsmittelpunkte der Hüllbahnen und der Evoluten dieser Hüllbahnen gegeben, so entsteht die Aufgabe, aus diesen Elementen für eine beliebige Systemcurve den Krümmungsmittelpunkt der Evolute der Hüllbahn zu construiren. Die Lösung dieser Aufgabe bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Schn.

R. Müller. Ueber die Gestaltung der Koppelcurven für besondere Fälle des Kurbelgetriebes. Schlömilch Z. XXXVI. 11-20.

R. Müller. Ueber die Doppelpunkte der Koppelcurve. Schlömilch Z. XXXVI. 65-70.

Es sei durch das Viereck $OO'BA$ ein Kurbelgetriebe mit dem festen Gliede OO' dargestellt, und C bezeichne einen beliebigen Punkt der mit der Koppel AB verbundenen bewegten Ebene. Der Punkt C beschreibt eine Koppelcurve, deren besondere Natur durch die Lage von C bedingt ist. Von den drei Doppelpunkten, welche jeder Koppelcurve zukommen, ist einer stets reell; die beiden anderen sind entweder reell oder conjugirt imaginär. Den Uebergang der einen Art der Koppelcurve zur anderen bildet in der bewegten Ebene eine Curve ω; diese Uebergangscurve scheidet also diejenigen Punkte C, deren Koppelcurven drei reelle Doppelpunkte besitzen, von denjenigen, deren Koppelcurven nur einen reellen Doppelpunkt haben. Jeder reelle Doppelpunkt kann entweder als Knotenpunkt oder als Spitze oder als isolirter Punkt auftreten. Der Ort der Punkte C, für welche die Koppelcurven Spitzen zeigen, ist eine Polcurve p; dieselbe trennt diejenigen Punkte der bewegten Ebene, deren Koppelcurven Knotenpunkte haben, von denjenigen Punkten, deren Koppelcurven einen isolirten Punkt besitzen. Die beiden Grenzcurven ω und p sind deshalb in ihrer Natur zu bestimmen, um zu entscheiden, welche Art einer Koppelcurve ein Punkt C der bewegten Ebene beschreibt. Der Verf. entwickelt nun unter besonderen Voraussetzungen über die Beschaffenheit des Kurbelgetriebes die Natur dieser Curven und giebt eine Uebersicht über die Formen der Koppelcurven, welche besonderen Arten des Kurbelgetriebes entsprechen. Schn.

C. Rodenberg. Die Bestimmung der Kreispunktcurven eines ebenen Gelenkvierseits. Schlömilch Z. XXXVI. 267-27[illegible].

Bei der Relativbewegung zweier starren ebenen Systeme σ_1 und σ_2 kann man sich die Aufgabe stellen, den Ort derjenigen

Punkte in einem System zu bestimmen, welche in Bezug auf das andere Bahnen mit stationären Krümmungskreisen beschreiben. Der Verf. löst diese Aufgabe unter der Voraussetzung, dass zwei Punkten dieses Orts in dem einen System die entsprechenden Punkte in dem anderen zugewiesen sind. Diese Voraussetzung wird erfüllt bei einem Gelenkvierseit mit den Gegenseiten A_1B_1 und A_2B_2, weil die Gelenkpunkte A_1, B_1 des Systems σ_1 im System σ_2 Kreise beschreiben. Schn.

J. Kleiber. I. Beitrag zur kinematischen Theorie der Gelenkmechanismen. II. Beitrag zur Theorie der übergeschlossenen Gelenkmechanismen. Schlömilch Z. XXXVI. 296-301, 328-338.

Es sei die Basis AB eines beliebigen Dreiecks ABC in n willkürliche Teile zerlegt durch die Punkte A_1, A_2, ..., A_{n-1}, und durch diese Punkte seien Parallelen zu den übrigen Dreiecksseiten gezogen. Auf diese Weise wird die Dreiecksfläche in $\frac{n(n-1)}{2}$ Parallelogramme und n mit ABC ähnliche Dreiecke zerlegt. Diese n Dreiecke erscheinen als Kette der Basis AB angeheftet. Werden nun diese Dreiecke und Parallelogramme als selbständige Gebilde aufgefasst, d. h. werden die Dreiecke und die Parallelogrammseiten als starr und unter sich in den Ecken gelenkig verbunden gedacht, so entsteht ein ebener Mechanismus, und von diesem gilt der Satz: „Wie man auch den Mechanismus verzerren mag, die Gestalt des Dreiecks der drei Eckpunkte A, B, C bleibt invariabel". Auf diesen Satz wird für $n=2$ der Pantograph Sylvester's, für $n=3$ die Theorie der Dreistabbewegung (three bar-motion) gegründet. Im zweiten Teil der Arbeit wird die Bedeutung jenes Elementarmechanismus für das Problem der Geradführung nachgewiesen. Schn.

G. Pastore. Di alcuni nuovi conduttori rettilinei approssimati, che si deducono dal moto ellittico. Torino Atti. XXVII. 47-63.

Lässt man die Enden G, D eines Stabes von der Länge $2R$ sich auf zwei rechtwinklig einander schneidenden Geraden XAX', YAY' bewegen, so beschreibt der Mittelpunkt M von GD einen Kreis mit dem Radius R um A und der Punkt N auf der Geraden GD über D hinaus, für welchen $DN = R$ ist, eine Ellipse mit einem Scheitel F auf AX'; der Osculationskreis der Ellipse in F hat dann seinen Mittelpunkt B auf XA so, dass $BF = 9R$, $BA = 8R$ ist. In einem Gelenkvierseit $ABNM$ mit den Seiten $BN = 9R$, $AB = 8R$, $AM = R$, $MN = 2R$ und mit AB als fester Seite würde nun N den letzten jener Ellipse nahe kommenden Kreis und der Mittelpunkt D von MN deshalb angenähert ein Stück der geraden Linie YAY' beschreiben. Die Curve, welche D dabei genau beschreibt, ist von der sechsten Ordnung; es wird für dieselbe eine ausführliche Tabelle gegeben; danach würde man z. B. einen Lauf von 0,30m mit $^1/_{10}$mm als grösster Abweichung von einer Geraden bei der Annahme $R = 0{,}25$m erhalten. Dieselbe Curve kann nach dem Gesetz von Roberts auch durch zwei bestimmte andere Vierseite erzeugt werden.

Mk.

A. A. Robb. Solution of question 10865. Ed. Times LV. 61.

Der Verf. zeigt, dass man mit Hülfe eines Mechanismus nach Art des Peaucellier'schen die Kreisteilung in sieben gleiche Teile vollziehen kann.

Lp.

V. Thallmeyer. Ermittelung der Hauptkurbelstellungen bei Berücksichtigung der Excenterstangenlängen. Z. Oestr. Ing. u. Arch. XLII. 152-154.

Die Hülfsmittel, die der Verfasser zur Lösung seiner Aufgabe verwendet, sind elementarer Natur.

F. K.

W. End. Untersuchungen über das Schubkurbelgetriebe. Techn. Blätter XXII. 83-90. (1890.)

Von der strengen Gleichung des Wegdiagramms für ein Schubkurbelgetriebe ausgehend, entwickelt der Verfasser zunächst

mit Unterdrückung höherer Potenzen der Verhältnisse des Kurbelradius und des Abstandes zur Länge der Schubstange angenäherte Gleichungen für das Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Diagramm. Dann wird untersucht, welches Kreuzkurbelgetriebe sich bezüglich der eben bezeichneten Diagramme möglichst nahe an das in Frage stehende Getriebe anschliesst. Als Mass der Abweichung zweier Functionen $f(t)$ und $g(t)$ in dem Intervalle a bis b dient das Integral

$$\int_a^b \{f(t)-g(t)\}^2 dt.$$

F. K.

D. Tessari. Sugli ingranaggi iperboloidici a fianchi piani. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII$_2$. 192-196.

Ein Zusatz zu der Abhandlung des Verfassers aus dem Jahre 1871 über Verzahnungen (Torino Atti VI, F. d. M. III. 438). Er hat jetzt gefunden, dass man die conjugirte Seitenfläche des Zahnes als Ebene construiren kann, und legt in dem vorliegenden Aufsatze seinen Gedankengang dar. Lp.

H. Léauté. Du mouvement troublé des moteurs consécutif à une perturbation brusque. Nouvelle méthode graphique pour l'étude complète de ce mouvement. Journ. de l'Éc. Pol. LXI. 1-33.

Wenn eine mit einem Regulator versehene Maschine in einem gleichförmigen Bewegungszustande sich befindet, so wird, sobald die zugeführten Arbeitskräfte oder die Widerstände, welche in der Maschine zu überwinden sind, sich ändern, der Regulator in Thätigkeit gesetzt und ein neuer gleichförmiger Bewegungszustand geschaffen. Dieser neue Zustand aber tritt nicht unmittelbar ein, sondern es zeigt sich zwischen diesen beiden Gleichgewichtszuständen eine Periode der Schwankungen der Geschwindigkeit. Diese sind es, welche zu gefahrvollem Anwachsen oder zu beträchtlicher Schwächung der Geschwindigkeit führen können, und es ist deshalb von Wichtigkeit, die

Dauer und die Grösse dieser Schwankungen in ihrer Abhängigkeit von den den Gang der Maschine bedingenden Elementen zu bestimmen. Dies ist die Aufgabe, welche der Verf. sich stellt, und er löst dieselbe, indem er von der graphischen Darstellung des Zusammenhangs gewisser Grössen, welche bei dem Problem auftreten, Gebrauch macht. Die entwickelten Theorien werden angewandt auf eine Turbine, welche mit einem zu schnellem Verschluss geeigneten Regulator versehen ist, und bei welcher der Widerstand plötzlich sich verdoppeln oder auf die Hälfte sinken kann. Schn.

L. Genay. Notes sur la navigation. Revue d'Art. XXXVIII. 401-428.

Die Arbeit beschäftigt sich mit den Gesetzen der Ueberfahrt über einen Strom unter der Voraussetzung, dass der Fährmann, der von einem Punkte des einen Ufers abstösst, sein Boot so lenkt, dass er 1) so wenig wie möglich abtreibt, ohne den Landungspunkt zu berücksichtigen, 2) in der kürzest möglichen Zeit an einem Punkte des Gegenufers landet. Beide Aufgaben gehören dem Gebiete der Variationsrechnung an und werden mit Hülfe derselben behandelt. In einer ersten Note wird das eine Ergebnis auf elementarem Wege hergeleitet, und in einer zweiten wird die Ueberfahrtsdauer in dem Falle einer constanten Strömung nach geometrischer Methode gefunden.

Lp.

Weitere Litteratur.

Ph. Gilbert. Recherches sur les accélérations en général. Brux. Ann. 1891. 55 S.

D. Seiliger. Aus dem Gebiete der Geometrie und Mechanik. Odessa Ges. XIV. 155-190.

Ch. Hochmann. Das Zeichnen von Curven mittels Kreisbogen. Odessa 1891. 1-18. 1 Fig.-Taf.

J. Zantschewsky. Geometrische Orte in der Theorie der Drehungsaxen. Odessa 1891. 1-81. 1 Fig.-Taf.

P. SOMOW. Kinematik collinear-veränderlicher Systeme. Warschau 1891. 1-241.

Capitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

E. J. ROUTH. A treatise on analytical statics; with numerous examples. 2 Volumes. Cambridge. University Press. I: XII + 407 S. (1891), II: XII + 224 S. (1892.)

Beide Bände verdanken ihre Entstehung den Vorlesungen, welche der Verf. an der Universität Cambridge vor seinen Zuhörern gehalten hat; doch sind die Vorträge umgearbeitet und umgeordnet worden, sodass sie den Gegenstand vollständiger erledigen, als dies in fortlaufenden Vorlesungen möglich ist. Der erste Band enthält den gesamten Stoff, der gewöhnlich unter dem Titel der analytischen Statik begriffen wird, mit Ausnahme der Anziehung, der Biegung der Stäbe und der Astasie, die im zweiten Bande erledigt werden. Die Behandlung der Gegenstände bekundet dieselben Züge, welche des Verfassers Lehrbuch „Rigid Dynamics" verdienter Weise so berühmt gemacht haben. Wer nicht den Vorzug gehabt hat, unter der Leitung des Herrn Routh seine Studien zu machen, kann bei der Lectüre dieser Bände den Grund für die grosse Verehrung finden, in der er bei allen steht, welche ihre mathematische Schulung von ihm empfangen haben. Es scheint nicht angängig, eine Erörterung des Inhaltes des Werkes vorzunehmen; doch können wir es allen Studirenden der Statik warm empfehlen. Gbs. (Lp.)

D. SEILIGER. Mechanik der ähnlich-veränderlichen Systeme. Dritte Lieferung. Statik. Odessa Ges. Denkschr. der math. Abt. der neuruss. Ges. der Naturf. XIII. 1-108. 1 Figurentafel. (Russisch.)

Der Verfasser zeigt, dass neben dem Principe, nach welchem ein jedes Dilatations- oder Compressionspaar auf eine beliebige Gerade übertragen werden kann, für die Statik eines ähnlich-veränderlichen Systems noch folgender Satz von besonderer Wichtigkeit ist: Zwei gleichartige Paare sind äquivalent, wenn ihre Momente gleich sind (Moment eines Dilatations- oder Compressionspaares ist das Product $\pm Ps$ einer der beiden gleichen Kräfte P des Paares mit der Entfernung s der Angriffspunkte derselben von einander). Dieser Satz kann als statische Definition ähnlich-veränderlicher Systeme angesehen werden.

Weiter wendet der Verfasser die in den beiden ersten Lieferungen behandelte Theorie der Vectoren und Schrauben auf die Statik ähnlich-veränderlicher Systeme an. Es gelingt ihm, eine einfache geometrische Deutung des virtuellen Coefficienten zweier Schrauben zu finden und aus derselben die ganze Theorie der Schrauben abzuleiten.

Zum Schlusse untersucht er die virtuellen Verrückungen ähnlich-veränderlicher Punktsysteme; das Verhältnis der Kräfteschrauben zu den kinematischen Schrauben (welche letztere hier aus einer Drehung um die Schraubenaxe und einer strahlenförmig aus dem Angriffspunkte der Schraube ausgehenden Dehnung bestehen) und beschreibt ein Instrument, den Homoiographen, in dem drei Punkte ein Dreieck bilden, welches bei beliebiger Bewegung des Instruments sich selbst ähnlich bleibt. Bb.

Carl Schmid. Statik und Festigkeitslehre. Lehrheft nebst vielen Beispielen, elementar bearbeitet für den Gebrauch an der Schule und in der Praxis. Stuttgart. J. B. Metzler'scher Verlag. VIII + 96 S. 4°.

Das vorliegende Werk wurde von dem Verfasser, welcher Lehrer an der Baugewerkschule zu Stuttgart ist, veröffentlicht, um beim Unterricht das lästige Dictiren zu vermeiden. Diesem Zwecke entsprechend, ist das Werk völlig elementar gehalten und behandelt die beiden in Frage stehenden Zweige der Mechanik in einem beschränkten, aber seinem Zwecke entsprechenden Umfange.

Das erste Capitel (S. 1-21) betrifft die Statik und behandelt im wesentlichen die Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene, welche naturgemäss mit Hülfe des Kräfte- und Seilpolygons vorgenommen wird. Ein Anhang giebt die Schwerpunktsbestimmung.

Im zweiten Kapitel (22-61) wird die Festigkeitslehre im engeren Sinne, d. h. Zug- und Druckfestigkeit, sowie die Biegungsfestigkeit behandelt. Die Knickfestigkeit kommt allerdings auch zur Sprache, wird aber, wie in den meisten elementaren Lehrbüchern, nicht theoretisch behandelt. Unrichtig (oder wenigstens in ihrer Gültigkeit nur auf kreisförmige Querschnitte beschränkt) ist die Behandlung der Torsionsfestigkeit. Ausführlich wird auch die Berechnung der Biegungsmomente für einen belasteten Balken besprochen. Dass bei einem continuirlichen Balken die gewöhnlichen Regeln der Statik nicht zur Bestimmung der Stützendrucke ausreichen, wird erwähnt, die erforderliche Rechnung aber nicht durchgeführt.

Capitel III und Capitel IV behandeln das Fachwerk und die Verstrebungen, Capitel V Nieten- und Schraubenverbindungen.

Das letzte Capitel handelt von den Steinconstructionen und zerfällt in drei Teile, von denen der erste die Berechnung der Mauern giebt. Bei dieser Gelegenheit wird auch der Wasser- und Erddruck besprochen. Die Bestimmung des letzteren wird mit Hülfe von Coulomb's Princip vollzogen, welches allerdings in der leider nur zu weit verbreiteten unrichtigen Art begründet wird. Der zweite Teil des in Frage stehenden Capitels behandelt die Gewölbe, der dritte die Berechnung der Pfeiler und Widerlager. F. K.

W. Jeep. Das graphische Rechnen und die Graphostatik in ihrer Anwendung auf Bauconstructionen. Zum Gebrauche für Baugewerksmeister, Baugewerksschulen etc. 2. Aufl. Weimar 1892. F. Voigt. VIII u. 178 S. 8°. Mit einem Atlas von 35 Foliotafeln.

Die erste Aufl., über welche in F. d. M. XIX. 1887. 909 berichtet wurde, hat ein neues Titelblatt erhalten. Hk.

L. Cremona. Graphical statics. Two treatises on the graphical calculus and reciprocal figures in graphical statics. Translated by Th. H. Beare. Oxford. Clarendon Press. (1890.) [Nature XLIV. 221-222.]

J. B. Lock. Elementary statics. London. Macmillan and Co. (1890.) [Nature XLIII. 55.]

V. Thallmeyer. Die Resultirende als Maxima der Projectionen der Seitenkräfte. Hoppe Arch. (2) X. 310-317.

Um die rechnungsmässige Bestimmung der Grösse und Richtung der Resultirenden, sowie die Herleitung anderer zwischen der Resultirenden und den Seitenkräften bestehenden Relationen zu erhalten, geht der Verf. von dem Gesichtspunkte aus, „dass Kräfte, welche auf einen freien Punkt einwirken, sich zu grösstmöglicher Gesamtwirkung vereinigen müssen, mithin gewissermassen ein Princip maximaler Wirkung zu Geltung kommen muss“.

Lp.

F. Kosch. Zur Lage des Schwerpunktes eines Rotationskörpers. Schlömilch Z. XXXVI. 188-190.

Beweis des Satzes: Dreht sich eine schwere ebene Figur um eine in ihrer Ebene liegende Axe, welche die Figur nicht schneidet, und bestimmt man den Gegenpol der Rotationsaxe in Bezug auf die Centralellipse der Figur, so beschreibt dieser Gegenpol bei der Rotation einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Schwerpunkt des erzeugten Rotationskörpers ist, und die auf die Figur wirkende Centrifugalkraft geht stets durch den Gegenpol und den Schwerpunkt des Rotationskörpers. Lp.

Jos. Koch. Elementare Schwerpunktsbestimmungen bei Flächen und Körpern. Casop. XX. 183. (Böhmisch.)

Nach einer kurzen theoretischen Einleitung werden sechzehn diesbezügliche Aufgaben einfach und elegant gelöst. Std.

CHR. HANSEN. Een Vaegtstangs Fölsomhed. Nyt Tidss. f. Math. II A. 1-2.

Ueber die Empfindlichkeit eines Hebels. V.

J. BRILL. On the application of the method of reciprocal polars to statical theorems. Mess. (2) XX. 166-171.

Nachdem Hr. Brill im Mess. (2) XVII. (vergl. F. d. M. XIX. 1887. 369) complexe Zahlen durch Gerade statt durch Punkte dargestellt hatte, indem er tangentiale Coordinaten hierbei benutzte, macht er jetzt den Versuch, diese seine Methode an die Stelle der Vectorentheorie zu setzen und auf diese Weise eine auf statische Probleme anwendbare Transformation zu erhalten. Die Resultate sind teilweise durch Hrn. Genese vorweggenommen in dem Aufsatze: „Reciprocation in Statics“ (Lond. M. S. Proc. XVII., F. d. M. XIX. 1887. 912). Lp.

CH. ROBERT. Généralisation d'un théorème sur l'équilibre des surfaces fermées. Nouv. Ann. (3) X. 180-189.

A. ANDERSON. Note on the equilibrium of a closed surface under the action of normal forces. Mess. (2) XXI. 42-43.

Es seien R_1, R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien des Elementes $d\sigma$ einer geschlossenen krummen Oberfläche. Bringt man in der Normale zur Fläche ringsherum Kräfte an, welche proportional zu 1) $d\sigma\{1/R_1+1/R_2\}$, 2) $d\sigma/R_1R_2$ sind, so halten sich diese Kräfte das Gleichgewicht (Sätze von Bertrand und Joubert). Bei dem Versuche, diese Sätze zu verallgemeinern, hat Hr. Robert, wie ihm von Hrn. Anderson nachgewiesen wird, einen Fehler gemacht, so dass die vermeintlichen Verallgemeinerungen unrichtig sind. Lp.

S. Sbrana. Risoluzione della questione a pag. 102. Rivista di Mat. I. 170-174.

Die von einem Ingenieur gestellte Aufgabe lautet: Eine Seilbahn zwischen zwei Punkten *A* und *B* zu construiren. Auf ihr sollen sich zwei Wagen (materielle Punkte) von gleichem Gewichte bewegen, der eine aufwärts, der andere abwärts; verbunden sind sie unter einander durch ein Seil, das um eine Rolle im höchsten Punkte *A* der Seilbahn läuft. Man wünscht, dass in jedem Augenblicke das von den beiden Wagen und von den beiden Teilen des Seils gebildete System in Gleichgewicht sei. Die Zeichnung der Bahn unter Hinzufügung der Bedingung zu entwerfen, dass sie die kürzeste sei, die möglich ist, oder auch bei anderen Bedingungen, die zu ihrer Bestimmung genügen. Der Herausgeber der Rivista, Hr. Peano, bemerkt in einer Nachschrift, die Aufgabe sei eine unbestimmte, und Hr. Sbrana habe seine Lösung durch die Bedingung ergänzt, dass die Spannung des Seils an der Rolle constant sei; Lösungen mit anderen Zusatzbedingungen für diese technisch interessante Aufgabe werde er gern aufnehmen. Lp.

Eddy's solution of a problem in graphical statics. Bericht von G. F. Swain. Annals of Math. VI. 47-48.

Bericht über eine in Transact. of the Amer. Soc. of Civ. Eng. 1890 sowie in der Z. f. Bauwesen 1890, 397-415 von Eddy veröffentlichte Methode zur Bestimmung der Biegungsmomente und Scherkräfte eines Balkens für einen ihn überschreitenden Lastzug. Die Methode beruht auf der Verwendung der „Lastlinie“ und der „Auflagerdrucklinie“. Die Lastlinie bildet eine Staffellinie, deren verticale und horizontale Strecken bezw. gleich den Raddrücken und deren Abständen sind. Von der Lastlinie aus erhält man dann die Auflagerdrucklinie, indem man durch die jeweiligen Endpunkte des unter dem Lastzug verschobenen Balkens die Auflagerdrücke für die betreffende Stellung des Lastzuges als Senkrechte auf der Lastlinie aufträgt und deren Endpunkte verbindet. Die Eddy'schen Aufsätze behandeln

die Natur und die Construction dieser Auflagerdrucklinien nebst ihrer Verwendung zur graphischen Lösung der verschiedenen auf die Biegungsmomente und Scherkräfte eines Balkens oder eines einfachen Fachwerkträgers bezüglichen Aufgaben. Hk.

Th. Landsberg. Ueber eine besondere Art von Mittengelenk-Balken. Deutsche Bauztg. XXV. 277-279.

Mittengelenk-Balken sind statisch bestimmte Fachwerke, welche aus zwei Teilen a und b mit einem gemeinsamen Knotenpunkte C und einer besonderen sogenannten Ergänzungsgurtung bestehen. Dem Verfasser ist eine besondere Art solcher Balken patentirt worden; sie ist dadurch ausgezeichnet, dass sich zwei entsprechende Stäbe der mittleren und der Ergänzungsgurtung auf einer verticalen Geraden schneiden. Diese Art wird hier untersucht. F. K.

H. Müller-Breslau. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralbl. der Bauverw. XI. 437-440.

Es wird zunächst das wichtigste und einfachste Fachwerk besprochen, welches auf folgende Weise entsteht. Es seien $f_1, f_2, \ldots, f_n$ feste Punkte; mit diesen werden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ verbunden, und zwar a_1 mit f_n, f_1, f_2, dann a_2 mit f_2, f_3, f_4, ferner a_3 mit f_4, f_5, f_6 und so fort. Hierauf wird b_1 mit a_1, f_2, a_2, dann b_2 mit a_2, f_4, a_3 und so weiter verbunden. Es ist klar, dass die Bestimmung der Kräfte in den Stäben eines solchen Fachwerks darauf hinauskommt, dass man, bei den letzten Knotenpunkten anfangend, für jeden einzelnen Knotenpunkt eine gegebene Kraft nach drei gegebenen Richtungen zu zerlegen hat.

Der Verfasser bespricht danach zunächst noch andere Methoden zur Herstellung statisch bestimmter, steifer Fachwerke und zeigt dann die Berechnung der Kräfte. Dieselbe besteht im wesentlichen darin, dass das Fachwerk durch Fortlassung gewisser Stäbe und Einführung neuer, sogenannter Ersatzstäbe,

in ein anderes Fachwerk verwandelt wird, bei welchem sich die oben angedeutete Methode der Berechnung anwenden lässt. Die in den fortgelassenen Stäben wirkenden Kräfte werden für das neue Fachwerk als äussere Kräfte eingeführt und dann vermittelst der Bedingung bestimmt, dass in den hinzugefügten Stäben die Spannung Null herrscht. F. K.

F. Chaudy. Contribution à l'étude de la stabilité des voûtes en berceau et des coupoles en maçonnerie. Génie civil. XVIII. 117-120.

Nachdem der Verfasser zunächst gezeigt hat, wie man aus dem Druck, welchen zwei durch eine Fuge getrennte Teile eines Gewölbes auf einander ausüben, die Beanspruchung in den beiden Endpunkten der Fuge finden kann, wird zunächst für den Fall symmetrischer Belastung die Beanspruchung durch die Belastung zwischen der in Frage stehenden Fuge und der mittelsten Fuge ausgedrückt. Um auch bei unsymmetrischer Belastung die Beanspruchung in irgend einer Fuge zu bestimmen, betrachtet der Verfasser den Teil des Gewölbes, welcher zwischen dieser Fuge und derjenigen horizontalen Druckes liegt.

Zum Schluss zeigt der Verfasser, wie sein Verfahren auch auf Kuppeln angewandt werden kann. F. K.

A. Jarolimek. Der mathematische Schlüssel zu der Pyramide des Cheops. Wochenbl. östr. Ing. u. Arch. XV. 187-189, 195-197, 203-206.

Der Verfasser sucht den Nachweis zu führen, dass in den einzelnen Grössen bei der in Frage stehenden Pyramide das Verhältnis des goldenen Schnittes zu Tage tritt. F. K.

Ad. Donath. Untersuchungen über den Erddruck auf Stützwände, angestellt mit der für die technische Hochschule in Berlin erbauten Versuchs-Vorrichtung. Z. f. Bauwesen. XLI. 491-518.

Die Arbeit ist im wesentlichen experimenteller Natur. Die Folgerungen, welche der Verfasser aus seinen Versuchen zieht, kann Referent nicht völlig billigen. Zunächst wird trotz der z. B. entgegenstehenden Versuchsergebnisse von Leyghe angenommen, dass der Druck notwendig im oberen Endpunkte des unteren Drittels der Wand angreifen müsse. Ferner macht der Verfasser die Annahme, dass die Druckverteilung unabhängig von der Beweglichkeit der Wand sei. Was gegen diese Annahme spricht, hat Referent in seinem Bericht „über die Entwicklung der Lehre vom Erddruck“ zu zeigen gesucht.

F. K.

Clausen. Beitrag zu der Berechnung von Stützmauern mit abgetreppter Rückenfläche. Civiling. XXXVII. 51-56.

Der Verfasser geht von der Anschauung aus, dass das Verhältnis von Angriffsmoment zum Widerstandsmoment der Mauer für diejenigen Fugen am ungünstigsten ist, welche von hinten nach vorn gemäss dem Steinverband fallen. Nimmt man an, dass die Rückenfläche in ihrem oberen Teile eine gerade Linie ist, so ergiebt sich für die Tangente des Neigungswinkels dieser Geraden zur Verticale eine kubische Gleichung. Im unteren Teile ist nach Meinung des Verfassers der Rücken der Mauer nach Schwedler'scher Manier zu bilden.

Die vom Verfasser vorgeschlagene Rückenform soll eine Ersparung an Material gegenüber der Schwedler'schen mit sich bringen.

F. K.

H. F. B. Müller-Breslau. Die graphische Statik der Bauconstructionen. 2. Aufl. II. Band. I. Abt.: Formänderung ebener Fachwerke. Das ebene statisch unbestimmte Fachwerk. Leipzig. Baumgärtner. VII + 376 S. mit 6 Taf. gr. 8°.

Svechnikoff. Le centre d'inertie et les moments d'inertie du corps épicycloïdal. Nouv. Ann. (3) X. 385-392.

SVECHNIKOFF. Les centres d'inertie de la moitié et du quart du corps épicycloïdal. Nouv. Ann. (3) X. 473-476.

Die Coordinaten der Fläche, welche der Verf. „epicykloidale Oberfläche" benannt hat (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 809), lauten:

$$x = a[n\cos\varphi + (1-\cos n\varphi)\cos\varphi\cos\alpha + \sin n\varphi\sin\varphi],$$
$$y = a[n\sin\varphi + (1-\cos n\varphi)\sin\varphi\cos\alpha - \sin n\varphi\cos\varphi],$$
$$z = a[1-\cos n\varphi]\sin\alpha,$$

wenn φ und α variable Parameter bedeuten. Die Integrationen, welche zu der Berechnung der im Titel bezeichneten Grössen dienen, bieten nichts Bemerkenswertes. Lp.

M. KOPPE. Das Trägheitsmoment. Poske Z. V. 8-14.

Betrachtungen über die pädagogische Behandlung in Mittelschulen. Lp.

H. HARTL. Ein Apparat zur experimentellen Behandlung der Lehre vom Trägheitsmomente. Poske Z. V. 76-78.

PH. WEINMEISTER. Elementar-mathematische Bestimmung der Trägheitsmomente ebener homogener Flächenstücke. Poske Z. IV. 301-304. Lp.

B. Hydrostatik.

R. KLIMPERT. Lehrbuch der Statik flüssiger Körper (Hydrostatik) mit 418 Erklärungen, 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 208 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben mit den Resultaten der letzteren. Stuttgart. J. Maier. VIII + 351 S. 8°.

Gelegentlich der Besprechung eines anderen Werkes desselben Verfassers [F. d. M. XX. 1888. 1046] hat Referent einigen Be-

denken Ausdruck gegeben, welche sich gegen die sogenannte Kleyer'sche Methode geltend machen lassen. Deshalb können wir es uns versagen, hier auf diejenigen Eigenschaften einzugehen, welche wir als Folge dieses Systems Kleyer ansehen müssen. Neben diesen Eigenschaften, die wir nicht gerade als Vorzüge betrachten, besitzt das vorliegende Werk einige andere, welche der Anerkennung wert sind. Alle Erscheinungen und physikalischen Methoden, welche mit der Hydrostatik im Zusammenhang stehen, sind in grosser Ausführlichkeit besprochen. Die Beschreibungen der Apparate sind klar und übersichtlich, die Auseinandersetzungen einleuchtend und fasslich und die Beispiele und Aufgaben gut geeignet, die vorgetragenen Lehren zu erläutern.

Vermisst haben wir, dass in einem Werke von der Ausführlichkeit des vorliegenden die Grundbedingung des Gleichgewichts flüssiger Körper, dass die wirkenden äusseren Kräfte ein Potential haben müssen, völlig mit Stillschweigen übergangen ist. Es muss ja zugegeben werden, dass bei dem Verzicht auf die Anwendung der höheren Mathematik die Entwickelung dieser Bedingung manche Schwierigkeit darbietet; aber unmöglich scheint sie uns nicht zu sein. Aufgefallen ist dem Referenten eine Unrichtigkeit auf Seite 49, wo folgende Antwort gedruckt ist:

„Nehmen wir an, dass ausser der Schwere, welche senkrecht abwärts gerichtet jedem Flüssigkeitsteilchen eine Beschleunigung g erteilt, noch irgend eine andere Kraft zur Wirkung kommt, welche mit der unveränderlichen Beschleunigung γ in der Richtung EK unter dem Winkel φ gegen die Horizontale wirkt, so erhalten wir die Richtung der freien Oberfläche, indem wir die Beschleunigung g und die der Beschleunigung EK entgegengesetzte Trägheitskraft γ als zwei entsprechend grosse Strecken darstellen und nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm die Resultirende ER construiren, zu welcher die freie Oberfläche senkrecht stehen muss."

Offenbar muss die Kraft γ selbst und nicht die ihr entgegengesetzte Trägheitskraft benutzt werden. F. K.

W. Gosiewski. Ueber den kinetischen Druck in einer incompressiblen und homogenen Flüssigkeit. Krak. Denkschr. XVII. 128-134. (Polnisch, 1890.)

Der Verfasser bestimmt den Druck aus den bekannten hydrodynamischen Gleichungen für eine den ganzen unendlichen Raum erfüllende Flüssigkeit. Er erhält nämlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=-4\pi\varrho^2+4\pi\varepsilon^2,$$

wo $2\pi\varrho^2$ die kinetische Deformationsenergie für die Masseneinheit, $2\pi\varepsilon^2$ die kinetische Rotationsenergie für dieselbe bedeutet, mit der Bedingung $p=0$ für $x^2+y^2+z^2=\infty$. Als Lösung dieser Gleichung gilt das Integral

$$p=\iiint\frac{1}{r}(\varrho_1^2-\varepsilon_1^2)dx_1\,dy_1\,dz_1,$$

wo die Integration sich auf den ganzen unendlichen Raum erstreckt; ϱ_1 und ε_1 sind die Werte von ϱ und ε für $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$, r^2 aber gleich $(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2$. Es wirkt also das Element $dx_1\,dy_1\,dz_1$ auf das Element $dx\,dy\,dz$ mit der Kraft

$$-\frac{1}{r^2}(\varrho_1^2-\varepsilon_1^2)dx\,dy\,dz\,dx_1\,dy_1\,dz_1$$

in der Richtung ihrer Verbindungslinie. Betrachtet man $(\varrho^2-\varepsilon^2)$ als die Dichtigkeit einer fictiven „kinetischen" Flüssigkeit, so kann man den Satz aussprechen: „Die Bewegung der wirklichen Flüssigkeit ist die Ursache der Entstehung einer fictiven kinetischen Flüssigkeit, in welcher die oben bestimmte, die Bewegung hervorbringende Kraft ihren Sitz hat". Dn.

A. Anderson. On centres of pressure. Mess. (2) XXI. 69-76.

Hr. Curtis hat im Messenger (2) I (vgl. F. d. M. IV. 1872. 454) die Bedingungen ermittelt, unter denen der Mittelpunkt des Druckes bei einem in eine Flüssigkeit eingetauchten ebenen Dreiecke mit einzelnen merkwürdigen Punkten desselben zusammenfällt. Der Verf. vermehrt diese Beispiele durch die Sym-

median-Punkte und die Brocard'schen Punkte und leitet noch eine Anzahl anderer geometrischer Resultate über Mittelpunkte des Druckes durch einfache elementare Methoden ab. Lp.

C. Cranz. Theoretische Ermittelung der Gestalt des Grundwasserspiegels an dem Zusammenfluss zweier Ströme. Schilling's Journ. für Gasbel. u. Wasservers. Sep. 5 S. (1890.)

Nachdem der Verfasser für den Grundwasserspiegel in der Nähe eines geradlinigen Wasserlaufes die parabolische Gestalt ermittelt hat, stellt er für das Quadrat der Höhe z des Grundwasserspiegels über der undurchlässigen Schicht bei zwei Wasserläufen die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

auf, mit der Bedingung, dass für $x=0$ sowohl als für $y=0$ v einen constanten Wert h^2 hat. Aus der Erwägung, dass für sehr grosse x und endliche y offenbar nur der eine Wasserlauf Einfluss hat, während bei sehr grossen y und endlichen Werten x nur der andere von Bedeutung ist, nimmt er an, dass $v=my+n$ für $x=a$ und $v=mx+n$ für $y=b$ ist, und hat nun die Werte von v für den Umfang eines Rechtecks. Das Verfahren scheint dem Referenten nicht ganz einwandsfrei, weil für den Fall, dass x, y von der gleichen Grössenordnung sind, die Annahme nicht mehr gerechtfertigt ist. Die Lösung, welche der Verfasser mitteilt, entspricht übrigens durchaus nicht allen aufgestellten Grenzbedingungen. F. K.

W. H. Besant. Solutions of examples in elementary hydrostatics. Cambridge. Deighton, Bell, and Co. [Nature XLIV. 341.]

J. Pollard et A. Dudebout. Architecture navale. Théorie du navire. Tome II. Statique du navire. Dynamique du navire: roulis en milieu calme, résistant ou non résistant. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Capitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

G. Kobb. Sur le principe de la moindre action. Toulouse Ann. V. D. 1-3.

Bei der Aufstellung des Princips der kleinsten Wirkung für die Bewegung eines Punktes gelangt man zunächst dazu, dass auf der wirklich durchlaufenen Bahn die Wirkung ein Maximum oder Minimum sein soll. Ersteres nun ist immer ausgeschlossen: denn ist 01 jene Bahn, 2 ein beliebiger Punkt von ihr, Γ eine beliebige Curve durch 2, sodann 3 der Schnittpunkt einer zu 01 benachbarten Bahn mit Γ, σ die Länge des Bogens 32, ψ die Neigung von 32 gegen 21, so findet man $\int\sqrt{2(u+h)}\,ds$ (das Integral für die Wirkung) auf dem gebrochenen Wege 03+32+21 gleich $\sqrt{2(u+h)}(1-\cos\psi)\sigma+(\sigma)_2+\cdots$ und danach für kleine Werte von σ immer positiv. Mk.

W. Ermakoff. Das Princip der kleinsten Wirkung im Zusammenhange mit der Transformation von Differentialausdrücken zweiter Ordnung. Charkow Ges. 1891. 1-16.

P. Stäckel. Ueber die Differentialgleichungen der Dynamik und den Begriff der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme. J. für Math. CVII. 319-348.

Es sei ein System materieller Punkte gegeben, für welches die Bedingungen sowohl wie die wirkenden Kräfte nur von der Configuration der Punkte, nicht von ihren Geschwindigkeiten abhängen, und es sei die Lage des Systems zur Zeit t durch die n unabhängigen Bestimmungsstücke $p_1, \ldots, p_n$ ausdrückbar. Es sei T die lebendige Kraft $(2T dt^2 = \Sigma a_{\varkappa\lambda}\, dp_\varkappa\, dp_\lambda)$, $U' = \Sigma P_\varkappa \delta p_\varkappa$

die virtuelle Arbeit des Systems, sodass die $a_{\varkappa\lambda}$ und $P_\varkappa$ Functionen von $p_1, \ldots, p_n$ allein sind; das dem quadratischen System $|a_{\mu\nu}|$ reciproke System heisse $|a'_{\mu\nu}|$, und es werde

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\varkappa\mu}}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu}\right) = \begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{bmatrix}_a,$$

$$\sum_\mu \begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \mu\end{bmatrix}_a a'_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \nu\end{Bmatrix}_a$$

gesetzt. Die Gleichungen für die Bewegung des Systems können dann auf folgende Normalform gebracht werden, die offenbar nur von T und U' abhängt:

$$(1) \qquad \frac{d^2 p_\nu}{dt^2} = -\sum_{\varkappa,\lambda} \begin{Bmatrix}\varkappa,\lambda\\ \nu\end{Bmatrix}_a \frac{dp_\varkappa}{dt}\frac{dp_\lambda}{dt} + \sum_\mu P_\mu a'_{\mu\nu}.$$

Statt $p_1, \ldots, p_n$ kann man noch auf unendlich viele Arten andere n Veränderliche einführen. Zwei in solcher Art gegebene dynamische Probleme sollen „analytisch äquivalent" heissen, wenn die Ordnung n in beiden dieselbe ist und man die Bestimmungsstücke $p_1, \ldots, p_n$ in ihnen so wählen kann, dass die Gleichungen (1) bei beiden Problemen genau dieselben werden.

Es entspringt daraus die Aufgabe, wenn T und U' gegeben sind, $2\mathfrak{T}dt^2 = \Sigma w_{\varkappa\lambda} dp_\varkappa dp_\lambda$ und $\mathfrak{U}' = \Sigma V_\varkappa \delta p_\varkappa$ auf alle möglichen Arten so zu wählen, dass $\mathfrak{T}$ eine positive Form wird und die sämtlichen Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \nu\end{Bmatrix}_w = \begin{Bmatrix}\varkappa\lambda\\ \nu\end{Bmatrix}_a,$$

$$(3) \qquad \sum_\mu V_\mu w'_{\mu\nu} = \sum_\mu P_\mu a'_{\mu\nu} \qquad (\varkappa, \lambda, \nu;\ \mu = 1, \ldots, n)$$

bestehen. Die Gleichungen (3) liefern unmittelbar die V_μ, sowie die $w_{\varkappa\lambda}$ bestimmt sind. Den Gleichungen (2) genügt man zunächst durch $w_{\varkappa\lambda} = ca_{\varkappa\lambda}$, unter c eine positive Constante verstanden, was zu $\mathfrak{T} = cT$, $\mathfrak{U}' = cU'$ führt; man gewinnt damit das sogenannte Princip der mechanischen Aehnlichkeit. Es wird nun nachgewiesen, dass, wenn das System (2) noch eine andere Lösung als $w_{\varkappa\lambda} = ca_{\varkappa\lambda}$ besitzen soll, damit eine wirkliche Beschränkung der $a_{\varkappa\lambda}$ verlangt wird, dass also, abgesehen von singulären, besonders zu untersuchenden Fällen, für die analytische Aequivalenz zweier dynamischen Probleme nicht nur hin-

reichend, sondern auch notwendig ist, dass die bezüglichen Ausdrücke der virtuellen Arbeit und der lebendigen Kraft bei geeigneter Wahl der Variabeln identisch ausfallen. So ist die Kenntnis dieser Ausdrücke im allgemeinen das Minimum dessen, was zur analytischen Kennzeichnung eines dynamischen Problems erfordert wird. Unter allen einem Probleme äquivalenten giebt es dann immer ein Normalproblem von möglichst einfacher Formulirung, nämlich dasjenige, welches die Bewegung eines Punktes von der Masse 1 in einer n-fachen Mannigfaltigkeit mit bestimmtem Ausdruck des Linienelements betrifft. Zum Schlusse werden diese allgemeinen Sätze an dem Falle $n = 2$ erläutert und wird als Beispiel die Bewegung einer starren Geraden in einem Strahlensysteme unter der Annahme behandelt, dass die Lage der Geraden in den Strahlen eine vorgeschriebene sei; als Grenzfall dieser Bewegung erscheint die Bewegung einer Geraden auf einer geradlinigen Fläche. Mk.

G. Pennacchietti. Sugl'integrali primi di secondo grado rispetto alle derivate delle coordinate nei problemi della meccanica. Atti dell' Accademia Gioenia di Scienze Naturali di Catania. (4) III. 31 S.

Der Inhalt dieser Abhandlung ist der Hauptsache nach aus der früheren Note des Verfassers: Sopra un integrale più generale di quello delle forze vive pel moto d'un sistema di punti materiali (Lomb. Ist. Rend. (2) XVIII. 242-252, 269-27.) schon bekannt, weshalb wir auf den bezüglichen Bericht (F. d. M. XVII. 1885. 873) verweisen. Vi.

R. Liouville. Sur un problème d'analyse qui se rattache aux équations de la dynamique. C. R. CXII. 710-712.

Wenn die Bewegung eines Punktes oder eines Systems nur von zwei Variabeln abhängt, so kann man neben dem Integrale der lebendigen Kraft, wenn dasselbe existirt, ein anderes Integral finden, welches in Bezug auf die Geschwindigkeiten von

zweiten Grade ist. Hängt die Bewegung von drei Parametern ab, so wird die Sache schwieriger und führt zu wesentlich anderen Resultaten. Diese beiden Fälle werden in der Note näher besprochen. A.

R. Liouville. Sur les intégrales du second degré dans les problèmes de mécanique. C. R. CXIII. 838-841.

Um bei einem Systeme von m freien Massenpunkten, die unter der Einwirkung von Kräften stehen, welche ein Potential besitzen, diejenigen Fälle zu erkennen, in denen die Bewegungsgleichungen neben dem Integrale der lebendigen Kraft noch ein anderes Integral zweiten Grades zulassen, setzt der Verf. dasselbe in der Form an:

$$(4)\qquad uv\sum_{(k)} dx_k^2 + u^2\Big\{\sum_{(i)} E_i dx_i^2 + 2\sum_{(i'i'')} e_{i'i''}\,dx_{i'}\,dx_{i''}\Big\} = 2C\,dt^2,$$

wo u und v durch die m zu behandelnden Gleichungen definirt sind:

$$(5)\qquad \frac{\partial v}{\partial x_i} + E_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{(k)} e_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0.$$

E_i, $e_{i'}$, $e_{i''}$ sind die allgemeinsten Polynome zweiten Grades in den Coordinaten x_k, welche den Gleichungen genügen $\frac{\partial E_i}{\partial x_i} = 0$, $E_i - E_{i'} = e_i - e_{i'}$ und:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(e_i - e_{i'})}{\partial x_i} - 2\dfrac{\partial e_{ii'}}{\partial x_{i'}} = \dfrac{\partial(e_i - e_{i'})}{\partial x_{i'}} + 2\dfrac{\partial e_{ii'}}{\partial x_i} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\partial(e_i - e_{i'})}{\partial x_{i''}} + 2\dfrac{\partial e_{ii''}}{\partial x_i} - 2\dfrac{\partial e_{i'i''}}{\partial x_{i'}} = 0, \\ \dfrac{\partial e_{ii'}}{\partial x_{i''}} + \dfrac{\partial e_{i'i''}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial e_{i''i}}{\partial x_{i'}} = 0; \end{cases}$$

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 e_{ii'}}{\partial x_i \partial x_{i''}} = \frac{\partial^2 e_{ii''}}{\partial x_i \partial x_{i'}}.$$

Bemerkungen über einige besondere Fälle machen den Schluss der Note. Lp.

W. Mantel. Over bewegingsmomenten. Een methode in dynamica. Nieuw Arch. XVIII. 155-167.

Wenn mit q_1, q_2, ... von einander unabhängige allgemeine

Coordinaten bezeichnet werden und die kinetische Energie als Function der Grössen $q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ geschrieben wird, so sind

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}, \quad \dots$$

die Bewegungsgrössen. Ist die gesamte Energie H als Function von $p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ ausgedrückt, und besteht für die Kräfte, denen das bewegliche System unterworfen ist, eine Kräftefunction, so ist $H =$ const. ein erstes Integral der kanonischen Bewegungsgleichungen.

Der Verf. beweist nun den Satz: Wenn einige Bewegungsgrössen in solcher Weise in den correspondirenden Coordinaten ausgedrückt werden können, dass die Energie H von diesen Coordinaten unabhängig wird, und wenn in irgend einem Augenblicke diesen Beziehungen genügt wird, so werden dieselben fortwährend gültig bleiben. Diese Beziehungen sind somit als erste Integrale der Bewegungsgleichungen zu betrachten. Die Integrationsmethode besteht daher in der Aufsuchung derartiger Relationen zwischen p_1 und q_1, p_2 und q_2, u. s. w. Der Verf. hebt hervor, dass dieselben in allen Fällen, welche nach den gewöhnlichen Integrationsmethoden gelöst werden können, leicht sich hinschreiben lassen. Als Beispiele werden behandelt das konische Pendel, die Bestimmung der geodätischen Curven auf der Schraubenfläche mittels der Bewegung eines schweren Punktes ohne äussere Kräfte, die Bewegung eines schweren Körpers um eine horizontale Axe, welche in einer schiefen Ebene sich bewegen kann, die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt ohne äussere Kräfte.

Der Verf. hebt als einen Vorzug jener Methode hervor, dass dieselbe diejenigen Grössen bestimmen lehrt, welche während der Bewegung sich nicht ändern; doch ist dies wohl das Resultat jeder Integrationsmethode. Mo.

A. Astor. Note sur les mouvements relatifs. Darboux Bull. (2) XV. 255-260.

Bour hat in einer Abhandlung (Journ. de Math. (2) VIII. 1863) die allgemeine Gleichung der relativen Bewegungen in der kanonischen Form gegeben, hat dabei aber die Punkte des Massensystems zunächst als frei angenommen und ausserdem etwas verwickelte Rechnungen benutzt. Diese Methode ist dann von Mathieu wiedergegeben worden. Der Verf. entwickelt jene Gleichung als einfachen Zusatz zu der allgemeinen, aus dem d'Alembert'schen Principe und aus dem der virtuellen Geschwindigkeiten sich ergebenden Gleichung in der Form

$$\delta\Sigma(mux'+mvy'+mwz')-\frac{d}{dt}\Sigma(mu\delta x+mv\delta y+mw\delta z) = \delta\Omega,$$

wo Ω gesetzt ist für

$$H-\Sigma[mu(u_0+qz-ry)+mv(v_0+rx-pz)+mw(w_0+py-qz];$$

die Bezeichnungen sind die bekannten und beziehen sich auf die beweglichen Axen. Nach Erledigung der Fälle, in denen 1) die Massenpunkte frei sind, 2) von der Zeit unabhängige, 3) von der Zeit abhängige Verbindungen vorhanden sind, werden noch die Euler'schen Differentialgleichungen für die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt hergeleitet. Lp.

G. Morera. Sui sistemi di forze che ammettono la funzione delle forze. Palermo Rend. V. 100-105.

Das Kräftesystem (X_i, Y_i, Z_i), welches an dem Punktsysteme (x_i, y_i, z_i) angebracht ist, gestattet nach dem Ausdrucke des Verfassers die Kräftefunction, wenn eine Function U der Coordinaten der Punkte vorhanden ist, deren totales Differential die aus diesen Kräften berechnete Elementararbeit für jede unendlich kleine, mit den Bedingungen des Systems verträgliche Verrückung giebt. Die Gestalt dieser Kräfte wird unter der Annahme entwickelt, dass dieselben ausser von den Coordinaten der Massenpunkte auch noch von den Geschwindigkeiten derselben abhängen, und als Anwendung auf die mathematische Physik wird zuletzt gezeigt, dass das Princip von der Erhaltung der Energie bei Zulassung des Gesetzes von der Gleichheit der Action und Reaction

nicht schon erfordert, dass die inneren Kräfte Functionen der gegenseitigen Abstände der Systempunkte sind, sondern bloss, dass diese Kräfte eine von den gegenseitigen Abständen abhängende Kräftefunction gestatten. Lp.

E. Betti. Sopra un teorema di meccanica. Rom. Acc. L. Rend. VII₁. 159-160.

In einem von einer homogenen Masse ausgefüllten Raume S wirke eine von Punkt zu Punkt stetig veränderliche translatorische Kraft und auf ein Element von S ein Kräftepaar oder eine rotatorische, von Element zu Element stetig veränderliche Kraft. Dann bestehen für dieses Massensystem, wie der Verf. zeigt, zwei partielle Differentialgleichungen, welche mit den Hertz'schen Gleichungen für die elektrischen und magnetischen Kräfte übereinstimmen. Die translatorischen Kräfte würden die elektrischen, die rotatorischen die magnetischen Kräfte sein.

Lp.

E. Padova. Sulle equazioni generali della dinamica. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII₁. 197-203.

Der Verf. beabsichtigt eine neue Aufstellung der Gleichungen für die Bewegung von Punktsystemen und elastischen Körpern nach einer Methode, die von der üblichen abweicht und sich an die Lagrange'sche Methode der Mécanique analytique für die Flüssigkeiten anschliesst. Unter spontaner Beschleunigung eines durch die Coordinaten q_i der Lage nach bestimmten Systems versteht er die Gesamtheit der Zuwachse $\chi_i dt$, welche in der Zeit dt den Geschwindigkeiten q_i' erteilt werden müssen, damit während dieses Augenblicks die kinetische Energie sich nicht ändere, welches auch das System der Geschwindigkeiten q_i' ist, falls es nur mit den Verbindungen verträglich ist. Wenn in der Zeit dt die wirklichen Zuwachse der Geschwindigkeiten durch $q_i''dt$ dargestellt werden, kann man den Zuwachs der kinetischen Energie durch Zunahmen $(q_i''-\chi_i)dt$ berechnen, die den Geschwindigkeiten erteilt werden, und erhält so einen Differentialausdruck,

der nach den Grössen $dq_i = q'_i dt$ geordnet werden kann. In dieser Entwickelung heisst Kraft nach der Coordinate q_i der Coefficient von q_i, und wenn man die Ausdrücke Q_i dieser Coefficienten als Function der q, q', t oder einiger dieser Grössen kennt, so erhält man die Gleichungen der Bewegung, indem man jene Coefficienten den entsprechenden Q_i gleichsetzt. Diese Methode, die Probleme der Dynamik in Gleichungen zu bringen, wird, wie der Verf. beweist, durch die Thatsache als gesetzmässig erwiesen, dass man so zu den gewöhnlichen Gleichungen in allen bisher von der Mechanik betrachteten Fällen gelangt. Nachdem diese Betrachtungen in den ersten sieben Paragraphen durchgeführt sind, wird im Schlussparagraphen gezeigt, wie man in Fällen von hypothetischen physikalischen Gesetzen vorgehen kann. Lp.

E. PADOVA. Interpretazione meccanica delle formule di Hertz. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII$_1$. 204-209.

Nimmt man an, dass im Aether durch jede Drehung der unendlich kleinen Teile Kräfte erzeugt werden und dem entsprechend dem Aether ein „Orientirungspotential" zukomme, so wird man unmittelbar auf alle die Gleichungen geführt, welche zur Erklärung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen in ruhenden Körpern dienen. Dabei sind dann als die magnetischen Kräfte die Ableitungen des Orientirungspotentials nach den Componenten der Drehung und als die elektrischen Kräfte die Componenten der Geschwindigkeit in den einzelnen Punkten zu deuten, und hat man weiter in den Leitern einen Widerstand gegen die Bewegung des Aethers vorauszusetzen, dessen Componenten ganze lineare Functionen der Componenten der Geschwindigkeit sind. Mk.

Sir WILLIAM THOMSON. On periodic motion of a finite conservative system. Phil. Mag. (5) XXXII. 375-383.

Sir WILLIAM THOMSON. On instability of periodic motion, being a continuation of article on periodic motion of a finite conservative system. Phil. Mag. (5) XXXII. 555-560.

Unter „begrenzt“ (finite) wird in dem Titel des Aufsatzes verstanden, dass die Anzahl der Freiheiten begrenzt ist, und dass der Abstand zwischen keinen zwei Punkten des Systems ohne Grenzen wachsen kann; mit „conservativ“ wird gemeint, dass die kinetische Energie immer um dieselbe Differenz geändert wird, wenn das System aus einer beliebigen Configuration in eine andere übergeht, ohne Rücksicht auf den ihr erteilten Betrag, mit welchem das System von irgend welcher Configuration aus geschleudert und sich selbst überlassen wird zu ungestörter Fortbewegung. Unter „Bahn“ (orbit) wird der „Weg“ (path) verstanden, von welchem jede constituirende Linie ein vollständiger Umlauf (circuit) ist, wobei alle beweglichen Punkte zugleich immer in entsprechenden Punkten ihrer Umläufe sind, und der „Weg“ die Gruppe einzelner Linien ist, welche die von allen Punkten des Systems durchlaufenen Wege ausmachen. Das Theorem von der periodischen Bewegung hat folgende Fassung: Für jeden gegebenen Wert E der gesamten Energie giebt es eine völlig bestimmte derartige Bahn, dass, wenn das System längs ihrer mit der gegebenen gesamten Energie E in irgend einer Configuration desselben in Bewegung gesetzt wird, es in ihr periodisch umläuft. Nach Aufstellung dieses Theorems wird angemerkt, dass die Lösung der Aufgabe, eine Bahn zu finden, deren gesamte Energie den vorgeschriebenen Wert E hat, im allgemeinen unendlich vielfach ist mit verschiedenen Perioden für die unendliche Anzahl verschiedener dadurch bestimmter Bahnen, und das Problem wird durch die Betrachtung eines Systems mit zwei Freiheitsgraden beleuchtet. Darauf wird das Dreikörperproblem in den beiden Fällen der Mondtheorie und der Planetentheorie unter der Annahme betrachtet, dass die Sonne ein festes Kraftcentrum ist. Es wird bewiesen, dass jeder der Bahn unendlich nahe Weg instabil ist, falls nicht jede Wurzel der determinirenden Gleichung einen reellen Wert zwischen $+1$ und -1 hat; allein das Ergebnis zeigt nicht, dass die Bewegung stabil ist, wenn diese Bewegung erfüllt ist. In einer Nachschrift auf S. 559 wird die Tragweite der Poincaré'schen Preisarbeit „Sur le problème des trois corps et les équations de la dyna-

mique“ (dem Verf. nicht bekannt zur Zeit der Abfassung seines Aufsatzes) in Bezug auf eine frühere Mitteilung „On some test cases for the Maxwell-Boltzmann doctrine regarding distribution of energy“ kurz besprochen. Die beiden Artikel sind Vorträge aus der British Association und der Royal Society.

Gbs. (Lp.)

Sir W. Thomson. On instability of periodic motion. Lond. R. S. Proc. L. 194-199.

Der bearbeitete Fall scheint der eines Massenpunktes zu sein, welcher sich aus einer Lage in eine andere mit einem beliebig gegebenen constanten Werte von E, der Summe der potentiellen und der kinetischen Energie, bewegt und fähig ist, einen vollständigen periodischen Umlauf oder eine geschlossene Bahncurve zu beschreiben; allein es ist schwierig, eine genau zutreffende Beschreibung zu geben. Das Schlussergebnis wird wie folgt aufgestellt: Unser Resultat beweist, dass jeder der Bahncurve unendlich nahe liegende Weg instabil ist, wofern nicht jede Wurzel einer gewissen Gleichung einen reellen Wert zwischen $+1$ und -1 hat. Es beweist nicht, dass die Bewegung stabil ist, wenn die Bedingung befriedigt wird. Die Stabilität kann für diesen Fall nicht erwiesen werden, ohne dass man zu höheren Ordnungen der Annäherung in der Betrachtung der mit einer Bahncurve sehr nahe zusammenfallenden Wege aufsteigt. Der Verf. vergleicht seine Resultate und findet, dass sie im allgemeinen mit denen des Hrn. Poincaré übereinstimmen. (Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Acta Math. XIII, F. d. M. XXII. 1890. 907.)

Cly. (Lp.)

N. Pirogow. Vom Virial der Kräfte. Phys. Ges. St. Petersburg. XXIII. 1891. 127-152.

P. Appell. Sur le mouvement d'un point en coordonnées elliptiques. S. M. F. Bull. XIX. 102-103.

Bei Einführung elliptischer Coordinaten λ_1, λ_2, λ_3 lassen sich die Differentialgleichungen der Bewegung eines materiellen Punktes im Raume mittels Quadraturen integriren, wenn die Kräftefunction die Form hat:

$$U = \begin{vmatrix} 1, & \lambda_1, & U_1 \\ 1, & \lambda_2, & U_2 \\ 1, & \lambda_3, & U_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & \lambda_1, & \lambda_1^2 \\ 1, & \lambda_2, & \lambda_2^2 \\ 1, & \lambda_3, & \lambda_3^2 \end{vmatrix},$$

wo U_1, U_2, U_3 bezw. allein von λ_1, λ_2, λ_3 abhängen. Dieses Theorem ist schon bekannt; Liouville hat es bereits 1846 ausgesprochen. Neu ist dagegen die Bemerkung, dass U eine rationale Function von x^2, y^2, z^2 wird, wenn U_1, U_2, U_3 gleich derselben rationalen Function bezw. von λ_1, λ_2, λ_3 gesetzt werden.

St.

G. Schouten. Prijsvraag No. 7 voor het jaar 1889. Nieuw Archief XVIII. 19-29.

Wenn bei der centralen Bewegung die Geschwindigkeitscomponenten in der Richtung des Radiusvectors und senkrecht darauf, sowie die correspondirenden Ausdrücke für die lebendige Kraft gebildet werden, so wird eine nähere Untersuchung der letzteren Grössen und ihrer Verhältnisse gefordert für den Fall einer centralen Kraft von der Form Ar^n. Im Anschluss an eine Abhandlung des Verfassers (Amst. Versl. en Meded. (3) V) werden einige Eigenschaften hergeleitet.

Mo.

W. Zinger. Elementare Darstellung der Theorie der elliptischen Bewegung. Arb. d. phys. Section d. kais. Ges. der Freunde der Naturkunde. Moskau. Bd. IV. Hft. 1. 9-17, Hft. 2. 1-12.

A. Höfler. Zur Ableitung des Newton'schen Gesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen. Poske Z. V. 70-73.

Ch. Cellérier. Note sur une question de mécanique. Darboux Bull. (2) XV. 146-162.

Der nach dem Tode des Verfassers veröffentlichte Aufsatz behandelt die Bewegung eines Massenpunktes, der von einem festen Punkte mit einer dem Quadrate der Entfernung umgekehrt propor-

tionalen Kraft angezogen wird und ausserdem der Schwerkraft unterworfen ist. Ausser den beiden sofort bekannten Integralen der Principe der lebendigen Kraft und der Flächen wird ein drittes Integral nach dem Vorbilde von Euler's Behandlung der Bewegung eines von zwei festen Centren angezogenen Punktes aufgestellt und die Lösung von der Discussion zweier kubischen Formen abhängig gemacht. Die Integrationen, welche die einzelnen Variabeln der Aufgabe liefern, führen auf elliptische Integrale, über deren Aufstellung der Verf. nicht hinausgeht. Die eingehende geometrische Veranschaulichung der erlangten Formeln knüpft vielmehr an die vorerwähnten beiden kubischen Formen an und behandelt getrennt die Fälle, welche nach der Beschaffenheit der Factoren zu unterscheiden sind. Die Punkte der Raumcurve, die der Massenpunkt beschreibt, werden hierbei als Durchschnitte zweier Scharen von Rotationsparaboloiden mit verticaler Axe und mit dem anziehenden Punkte als Brennpunkt und eines Ebenenbüschels durch diese Axe erhalten. Im ganzen erhält man ein zutreffendes Bild, wenn man die einzelnen Fälle der Bewegung eines von einem festen Punkte umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung angezogenen Punktes mit der Wurfparabel combinirt. Lp.

R. Haussner. Movimento di un punto materiale attratto da due centri fissi secondo la legge di Newton. Batt. G. XXIX. 276-297, 379-380.

Uebersetzung der wesentlichsten Teile der Dissertation des Verfassers; vergl. F. d. M. XXI. 1889. 910ff. Lp.

S. Hirayama. On the force which produces the motion of double stars. Tokio Math. Ges. IV. 261-265.

Wenn man weiss, dass ein materieller Punkt unter dem Einfluss einer Centralkraft stets einen Kegelschnitt beschreibt, so soll der Ausdruck dieser Kraft gefunden werden. Der Verf. teilt für dieses von Hrn. Bertrand gestellte und schon mehrfach behandelte Problem (F. d. M. IX. 1877. 638; X. 1878. 619) eine

neue, ganz allgemeine Lösungsmethode mit, welche darauf beruht, dass er die allgemeine Kegelschnittsgleichung durch die Differentialgleichung $\frac{d^3}{dx^3}\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\} = 0$ ersetzt. Sein Resultat ist das bekannte, wonach zwei allgemeine Kräftefunctionen existiren, welche das Gesetz des umgekehrten Quadrats und das der directen Entfernung einschliessen. R. M.

F. PORRO. Sull'estensione della legge di Newton ai sistemi stellari binarii. Palermo Rend. V. 51-58.

Es handelt sich um die von Hrn. Bertrand 1877 aufgeworfene Frage, welches Kraftgesetz aus der Thatsache einer elliptischen Bahncurve abgeleitet werden könne (cf. Appell, F. d. M. XXII. 1890. 900). Der Verf. führt die hierhergehörige Litteratur an, aus welcher eine Arbeit von Hrn. S. Hirayama (vergl. das vorangehende Referat) im Astronomical Journal No. 199 wenig bekannt sein dürfte; doch ist eine Arbeit von Casey aus Quart. Journ. 1862 No. 19 nicht angeführt. In der Hauptsache wird dann eine vereinfachte analytische Darstellung des geometrischen Gedankenganges und der Resultate des Hrn. Glaisher aus Monthly Notices XXXIX gegeben (vgl. F. d. M. X. 1878. 619). Lp.

TH. WOGAN. Bewegung zweier materieller Punkte, welche durch einen gewichtslosen Faden mit einander verbunden sind, im Raume und in der Ebene unter Einwirkung der Schwerkraft und beliebig gegebener Anfangsgeschwindigkeiten. Pr. (Nr. 14) Gymn. Memel. 28 S. u. 1 Taf. 4°.

In dem ersten Abschnitte wird gezeigt, dass, abgesehen von zwei Sonderfällen, eine Fadenspannung stattfindet, nachdem „ein Ruck“ eingetreten ist; somit geht das System in ein System von zwei materiellen Punkten im Raume über, welche durch eine gewichtslose starre Gerade mit einander verbunden sind, unter Einwirkung der Schwerkraft und bekannter Anfangs-

geschwindigkeiten. Die mit einem grossen Aufwande von Rechnung vollständig durchgeführte Lösung der bei einer Prüfung gestellten Aufgabe dringt bis zu den geometrisch veranschaulichten Resultaten vor, bietet aber im übrigen nichts Bemerkenswertes, was nicht aus den Principien der Dynamik oder aus früheren Behandlungen der Aufgabe einleuchtend wäre. Lp.

H. Janusсhke. Ueber die Drehung eines Körpers im Kreise. Exner Rep. XXVII. 436-441.

Der Aufsatz betrifft die Ableitung des Kraftgesetzes bei der Bewegung eines materiellen Punktes in einer Kreisbahn (Centrifugalbeschleunigung) aus dem Principe der Erhaltung der Energie, das ja von dem Verfasser als der Ausgangspunkt für alle Vorgänge der Mechanik angesehen wird. Die Darstellung leidet, wie schon der Titel zeigt, an Unbestimmtheit und Unklarheit.

Lp.

Legoux. Sur quelques cas nouveaux de tautochronisme dans le mouvement d'un point matériel. Toulouse Mém. (9) III. 366-379.

Es wird untersucht, wie man der Puiseux'schen Bedingung für Tautochronismus bei einigen speciellen Ausdrücken für die wirkende Kraft genügen kann; dabei kommen namentlich die bekannten Sätze in Bezug auf die Fälle, dass Schwerkraft oder Centralkraft ohne oder mit Reibung vorhanden sind, von neuem zum Vorschein. Mk.

P. Appell. Remarque sur les courbes brachistochrones. S. M. F. Bull. XIX. 97-98.

Bemerkungen über den inneren Zusammenhang der Theorie der Brachistochrone mit gewissen rein geometrischen Fragen, besonders der geodätischen Linien. „Wenn man diese Theoreme mit Hülfe der brachistochronen Curven deutet, wird man zu ebenso einfachen Fassungen geführt wie für die Theorie der

Evoluten, der Krümmungslinien u. s. w., indem man überall die Bogen der Curven durch die Zeit ersetzt, welche ein Massenpunkt braucht, um sie ohne Reibung zu durchlaufen, falls die Constante der lebendigen Kraft Null ist". Lp.

G. Pennacchietti. Sulle curve brachistocrone. Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali di Catania. (4) III. 23 S.

Die Gleichungen der brachistochronen Bewegung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\frac{dx}{dt}\right)=-\frac{X}{T},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{Y}{T},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\frac{dz}{dt}\right)=-\frac{Z}{T},$$

wo T die lebendige Kraft bezeichnet, können durch Einführung der Hülfsveränderlichen u, v, w auf die folgende Form gebracht werden:

$$\frac{dx}{dt}=Tu,\quad \frac{dy}{dt}=Tv,\quad \frac{dz}{dt}=Tw,$$
$$\frac{du}{dt}=-\frac{X}{T},\quad \frac{dv}{dt}=-\frac{Y}{T},\quad \frac{dw}{dt}=-\frac{Z}{T}.$$

Die Gleichungen der betrachteten Bewegung für ein allgemeines Coordinatensystem q_1, q_2, q_3 lauten:

$$\frac{1}{T}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial p_k}\right)-\frac{\partial\frac{1}{T}}{\partial q_k}=-\frac{P_k}{T^2},\quad \frac{dq_k}{dt}=Tp_k,$$

wo

$$P_k=X\frac{\partial x}{\partial q_k}+Y\frac{\partial y}{\partial q_k}+Z\frac{\partial z}{\partial q_k}$$

ist.

Nach Erinnerung an die von Del Grosso (Sulle equazioni differenziali che si presentano nei problemi di meccanica, Batt. G. IV. 1866. 243-277) angegebene Methode für die Zurückführung der Gleichungen der brachistochronen Bewegung auf die kanonische Form schlägt der Verfasser einen einfacheren Weg zu demselben Zwecke ein (vgl. den folgenden Bericht über seinen Aufsatz: Sul moto brachistocrono, Palermo Rend. V. 59-74).

Es mögen noch zwei in der vorliegenden Arbeit aufgestellte Sätze angeführt werden.

Sind

$$-\frac{1}{T^2}\frac{\partial U}{\partial x},\quad -\frac{1}{T^2}\frac{\partial U}{\partial y},\quad -\frac{1}{T^2}\frac{\partial U}{\partial z}$$

[wo

$$T=\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)$$

ist] die Componenten der beschleunigenden Kraft der Bewegung eines freien Punktes, $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ die Componenten der Kraft der brachistochronen Bewegung eines Punktes, so erhält man aus jedem, die Zeit explicite nicht enthaltenden Integrale des ersten Problemes ein ebensolches des zweiten durch Ersetzung von $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ durch $\frac{1}{T}\frac{dx}{dt}, \frac{1}{T}\frac{dy}{dt}, \frac{1}{T}\frac{dz}{dt}$, und die Trajectorien werden in beiden Problemen durch dieselben Gleichungen dargestellt.

Gehören die Wirkungslinien der brachistochronen Bewegung einem linearen Complexe an, so ist das Moment der Bewegungsgrösse des Punktes in Bezug auf den Complex während der ganzen Bewegung proportional der lebendigen Kraft. Vi.

G. Pennacchietti. Sul moto brachistocrono. Palermo Rend. V. 59-74.

Der Autor bringt die Gleichungen für die brachistochrone Bewegung eines Punktes auf eine dem Hamilton'schen Systeme analoge Form:

$$T\frac{dq_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial p_s},\quad T\frac{dp_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q_s}\qquad (s=1,\dots,n);$$

dabei ist $n=3$, wenn der Punkt frei, $=2$, wenn er auf einer Fläche zu bleiben gezwungen ist; ferner sind $q_1, \dots, q_n$ die Stücke, welche die Lage des Punktes bestimmen; weiter ist T die lebendige Kraft des Punktes, U das Potential der auf den Punkt wirkenden Kräfte, und endlich ist $T-U=H$,

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial \frac{dq_s}{dt}}=p_s$$

gesetzt. Die Lösung dieser Gleichungen lässt sich sodann, analog wie die des Hamilton'schen Systems, von einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung abhängig machen. Die betreffende Gleichung lautet z. B., wenn $n = 3$ ist und man für q_1, q_2, q_3 die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z des Punktes nimmt,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = \frac{2}{U+h},$$

unter h die Constante des Integrals der lebendigen Kraft verstanden. Es wird diese Methode schliesslich zur Bestimmung der Brachistochrone in Bezug auf die Schwerkraft angewandt.

Mk.

D. Padelletti. Sul movimento del pendolo semplice quando si tien conto dell'effetto della rotazione terrestre. Napoli Rend. (2) V. 79-124.

Die Arbeit geht hauptsächlich auf die Bewegung eines Pendels am Pole ein, an der Hand der Differential- sowie der Integralgleichungen für die Bewegung des sphärischen Pendels. In einer Tabelle sind schliesslich für den Fall, dass das Pendel seine Bewegung ohne Geschwindigkeit beginnt, als Functionen des Winkels α, den es in der anfänglichen Lage mit der Verticale bildet, und zwar für alle Vielfachen α von 2^0, die Werte der vornehmlich zu beobachtenden Grössen (absolute Präcession, Verzögerung u. s. w.) zusammengestellt. Zuletzt wird über einige ältere Wahrnehmungen, namentlich von Italienern, berichtet, in welchen dem Autor bereits eine Andeutung des Foucault'schen Phänomens zu liegen scheint. Mk.

Neuffer. Die elementare Theorie des Foucault'schen Pendelversuchs. Böklen Mitt. IV. 92-98.

Hr. Röthig hat schon 1879 auf Grund einer historisch-mathematischen Untersuchung die in den elementaren Lehrbüchern übliche Beweismethode kritisirt (vgl. Schlömilch Z. XXIV, F. d. M. XI. 1879. 42). Der Verf. findet durch näheres Eingehen

auf diese elementare Theorie „zwei erhebliche Fehler" an ihr: eine wesentliche Lücke in den Voraussetzungen und einen unrichtigen Schluss, von denen der eine den anderen verdecke. Ausserdem wird noch ein weiterer Mangel in einer Vernachlässigung einer Grösse von der Ordnung der elementaren Drehung gefunden. Lp.

C. Fossa-Mancini. Sul moto apparente del piano di oscillazione del pendolo. Torino. 32 S.

Nachdem der Verfasser die von A. Mogni (Sulle oscillazioni del pendolo avuto riguardo alla rotazione della terra. Jesi. Pierdicchi) angegebene unrichtige Lösung des Problemes kritisirt hat (vgl. unseren Bericht über die citirte Arbeit, F. d. M. XXII. 1890. 926), erinnert er an die bekannten Beweise der Foucault'schen Formel und schlägt einen neuen vor. Vi.

M. Lautenschläger. Die Bewegung eines materiellen Punktes auf einem rotirenden Kegelschnitt unter Einwirkung einer Centralkraft. Diss. Halle. 50 S. 8°. (1890.)

R. Frantz. Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes auf Rotationsflächen. Pr. Pädag. Unser Lieb. Fr. (No. 238) Magdeburg. 20 S. u. 4 Taf. 4°.

Indem der Verf. annimmt, dass eine Kräftefunction U vorhanden ist und das Princip der Flächen besteht, findet er im Abschnitt I leicht, dass für die Rotationsfläche $r = f(z)$, wo $r^2 = x^2 + y^2$ ist, die Bewegungsgleichung die Form hat

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2(U+h)f^2(z)-k^2}{f^2(z)[1+f'^2(z)]},$$

in der h die Constante der lebendigen Kraft, k die doppelte Flächengeschwindigkeit bedeutet. Um eine einfache Quadratur zu erhalten, wird hierin U gleich einer Function $\Psi(z)$ von z allein gesetzt. Dadurch ist dann die Möglichkeit gegeben, die Gleichungen des Problems in diejenige Form zu bringen, welche

Hr. Staude bei seiner Behandlung dieser Aufgabe zu Grunde gelegt hat (cf. F. d. M. XIX. 1887. 486, XX. 1888. 937 ff.). Die allgemeine Erörterung nach dem Vorbilde des Hrn. Staude erfolgt in den Abschnitten II, III und IV, betitelt: „Die Bedingungen des Umkehrproblems und die Wendekreise der Bewegung für Rotationsflächen mit einfachen Horizontalschnitten, die Kräftefunction und die Kraft, die Gleichungen der Bewegung auf einer Rotationsfläche mit zweifachen Horizontalschnitten". Den Hauptteil der Arbeit nimmt dann der Abschnitt V ein (S. 9-20), in welchem die Aufgabe behandelt wird: „Es ist die Bewegung eines materiellen Punktes zu untersuchen, der gezwungen ist, auf einem Rotationsellipsoid zu bleiben, und der von einem auf der Rotationsaxe liegenden Centrum umgekehrt proportional der n^{ten} Potenz der Entfernung von diesem angezogen wird." Die Bestimmung des Bewegungsgebietes für verschiedene Lagen des Attractionscentrums und für verschiedene Gestalten des Rotationsellipsoids ist das Hauptziel der Untersuchung, die sich somit als nähere Durchführung eines Beispiels für die Theorie des Herrn Staude kennzeichnet. Auf die Arbeiten des Hrn. Stäckel dagegen ist nicht Bezug genommen worden. Lp.

Marchand. Remarques sur le problème de mécanique proposé à l'agrégation de 1889. Nouv. Ann. (3) X. 321-322.

Behandlung der Aufgabe (Relativbewegung eines Punktes auf einer gewissen Oberfläche), abweichend von der durch Hrn. de Saint-Germain entwickelten Lösung (F. d. M. XXII. 1890. 915), indem direct von den Lagrange'schen Gleichungen ausgegangen wird. Lp.

E. Vicaire. Sur les petites oscillations d'un système soumis à des forces perturbatrices périodiques. C. R. CXII. 82-85.

Um gewisse Erscheinungen zu erklären, z. B. das Ertönen einer gespannten Saite, wenn die umgebende Luft im Einklange vibrirt, die auswählende Absorption der Licht- und Wärmestrah-

len durch ein Mittel, das Strahlen von derselben Wellenlänge zu erzeugen vermag, wendet der Verf. auf ein materielles Punktsystem eine mathematische Beweisführung an, bei der er zu den inneren Kräften desselben eine „einfache störende Kraft“ hinzunimmt, d. h. eine solche, welche in jede Gleichung nur eine einzige Kreisfunction einführt, die überall dasselbe Argument hat. Es ergeben sich dann die beiden Sätze: I. „Jede einfache störende Kraft führt in dem Systeme eine einfache Schwingung herbei, deren Periode die der Kraft ist, und deren Amplitude für jeden Punkt, unabhängig von den anfänglichen Bedingungen der Bewegung, bestimmt ist.“ II. „Wenn die Periode der störenden Kraft derjenigen einer der einfachen, dem Systeme eigentümlichen Schwingungen zustrebt, so wird die Amplitude der Störung grösser und grösser. An der Grenze verschmilzt die Störung mit der entsprechenden einfachen Schwingung, deren Amplitude mit der Zeit unbegrenzt zunimmt.“ Lp.

A. M. WORTHINGTON. Dynamics of rotation. An elementary introduction to rigid dynamics. London. Longmans. 155 S.

JOHN PERRY. Spinning tops. London. S. P. C. K. 136 S.

Diese kleinen Bücher sind elementar geschrieben, aber klar und nützlich in ihrer Beschränkung. Man vergleiche die Anzeigen in Nature XLVI. 4-5, wo nur wenig über die Bücher gesagt, aber einiges Interessante über die Fortschritte der Wissenschaft der Dynamik beigebracht ist. (S. P. C. K = Society for Promoting Christian Knowledge.) Gbs. (Lp.)

PHILIPPS. Pendule isochrone. C. R. CXII. 177-181.

Die Note ist ein Auszug aus einer grösseren druckfertigen Arbeit des inzwischen verstorbenen Verfs. Ist O der Aufhängepunkt der Pendelstange, so bringt man mittels eines Gelenkes in einem Punkte A derselben einen Stab $AB = OA$ an, dessen anderes Ende an einer schwachen Stahlfeder befestigt ist. Diese

letztere, mit dem einen Endpunkte D fest eingelassen und im allgemeinen horizontal gerichtet, wird durch den Arm AB während der Schwingungen ein wenig aufwärts und abwärts gebogen. Ist α der variable Ausschlagswinkel des Pendels, so wird als Differentialgleichung der Bewegung gefunden:

$$A\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\sin\alpha\left[Pa+2R\varphi+\frac{4R^2}{i}(1-\cos\alpha)\right],$$

wo A, P, a, R, φ, i die Constanten des Systems sind. Unter Vernachlässigung der fünften Potenzen von α bestimmt der Verf. jene Constanten so, dass auch die dritte Potenz von α Null wird, was erfolgt, wenn

$$\frac{2R^2}{i}-\tfrac{1}{6}(Pa+2R\varphi)=0$$

ist. Dann wird

$$A\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\alpha(Pa+2R\varphi)$$

und die Schwingungsdauer damit unabhängig von der Grösse des Ausschlags. Hr. Wolf teilt in einer Zusatznote Versuchsergebnisse von Pendeln nach dieser Construction mit.

Lp.

K. Heun. Die Schwingungsdauer des Gauss'schen Bifilarpendels. Gött. Nachr. 1891. 154-158.

Die mathematische Theorie des Bifilarpendels führt auf hyperelliptische Functionen und ist noch nicht so weit durchgeführt worden, dass der praktische Rechner sie für die Bedürfnisse der Anwendungen benutzen könnte. Die letzte Behandlung durch Hrn. Hoppe (Oscillationen eines Bifilarpendels, Hoppe Arch. LXX, F. d. M. XV. 1883. 824) behandelt nur einige besondere Fälle, wird übrigens vom Verf. nicht berücksichtigt. Dieser bedient sich nämlich der Gauss'schen Quadraturmethode mit Benutzung eines einzigen zweckmässig bestimmten Argumentwertes, um mit Hülfe eines vollständigen elliptischen Integrales erster und eines anderen zweiter Gattung eine Formel für die Schwingungsdauer herzustellen, deren Genauigkeit eine sehr grosse ist, wie aus den Formeln für die Fehlerschätzung erhellt.

Lp.

E. D. Preston. Reduction of pendulum observations. Washington Bull. XI. 115-130.

G. Schouten. Prijsvraag No. 6 van het jaar 1889. Nieuw Archief XVIII. 1-18.

Die Aufgabe lautet: Ein schweres Rotationsellipsoid kann sich um eine Axe drehen, welche einen Brennpunkt enthält. Es wird der Ort des Schwingungsmittelpunktes bei veränderlicher Lage der Axe gesucht. Bei der Lösung wird das Ellipsoid durch einen beliebigen Körper und der Brennpunkt durch einen willkürlichen Punkt des Körpers ersetzt. Der Ort ist dann eine Fläche fünften Grades, von der einige allgemeine Eigenschaften angegeben werden. Eine Erörterung specieller Fälle schliesst die Abhandlung. Mo.

P. H. Schoute. Naschrift op prijsvraag No. 6. Nieuw Archief XVIII. 30-34.

Nähere Untersuchung des in der vorigen Abhandlung erhaltenen Ortes, dessen Gleichung die Form hat $u_4 = u_5$, wo u_4 und u_5 homogene Functionen der Coordinaten x, y, z sind. Eigenschaften der Kegel $u_4 = 0$, $u_5 = 0$. Mo.

A. de Saint-Germain. Note sur le problème de mécanique proposé au concours d'agrégation en 1891. Nouv. Ann. (3) X. 516-526.

Lösung der folgenden Aufgabe:

Ein rechtwinkliges Dreibein $OXYZ$ dreht sich mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω um die Kante OZ, die der Schwere entgegengesetzt gerichtet ist. Mit ihm dreht sich das Paraboloid P, dessen Gleichung $x^2 - y^2 = 2pz$ ist. Ein Punkt M von der Masse 1, dem Gewichte g, der sich auf P bewegt, wird vom Scheitel O mit einer Kraft $2gMO/p$ angezogen. Sind ferner MA und MB die Lote, welche von M auf die durch O gehenden beiden geradlinigen Erzeugenden von P gefällt wer-

den, so wird M noch durch zwei nach den Strecken AM, BM gerichtete Kräfte von der Grösse $3gAM/p$ und $3gBM/p$ angegriffen. Die Lage von M ist zu bestimmen durch die Werte der Parameter λ, μ aus den Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\lambda-p}+\frac{y^2}{\lambda+p}=\lambda-2z,\quad \frac{x^2}{\mu+p}+\frac{y^2}{\mu-p}=\mu+2z$$

der durch M gehenden, mit P homofocalen Paraboloide. 1) Die partielle Differentialgleichung zu bilden, von der es nach dem Jacobi'schen Theoreme genügt, ein vollständiges Integral zu kennen, um daraus durch einfache Differentiationen die Gleichungen der Bewegung des Punktes M zu erhalten. 2) Dieses vollständige Integral zu finden, sowie die Bewegungsgleichungen, wenn $\omega = 0$. 3) Die Gleichung der Bahnlinie zu integriren und die Gestalt derselben anzugeben, wenn ($\omega = 0$) zu Anfang:

$$x=y=p\sqrt{\tfrac{3}{2}},\quad \frac{dx}{dt}=-\tfrac{1}{8}(3+3\sqrt{3})\sqrt{pg},\quad \frac{dy}{dt}=\tfrac{1}{8}(9+\sqrt{3})\sqrt{pg}.$$

Lp.

ROBERJOT. Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Nouv. Ann. (3) X. 365-370.

Darstellung der bekannten Bewegungsgleichungen, wenn die Coordinatenaxen beliebig sind, und Versuch einer einfachen geometrischen Deutung: „Die Resultante aus der Geschwindigkeit des Punktes $C(\alpha, \beta, \gamma)$, wenn er als Massenpunkt des festen Körpers betrachtet wird, und aus der Geschwindigkeit des geometrischen Punktes C (α, β, γ), wenn er als Endpunkt der resultirenden Axe des Momentes der Bewegungsgrössen betrachtet wird, ist in Grösse und Richtung gleich der resultirenden Axe OA der Momente der äusseren Kräfte.“ Lp.

F. KÖTTER. Ueber das Kowalevski'sche Rotationsproblem. Naturf. Ges. Halle LXIV. 13-15.

N. Delonay. Zur Frage über die geometrische Deutung der von S. W. Kowalevski gefundenen Integrale der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Moskau Math. Samml. XVI. 346-352.

A. de Saint-Germain. Sur le mouvement d'un double cône qui roule sur deux droites. C. R. CXII. 215-216.

Unter Anknüpfung an die Note des Hrn. Resal in C. R. CXI. (F. d. M. XXII. 1890. 928) giebt der Verf. eine vereinfachte Herleitung der Gleichungen der Aufgabe nebst einigen Betrachtungen über die günstigste Form, wenn die Beschleunigung der Translation möglichst gross werden soll. Lp.

W. van Loghem. Prijsvraag No. 5 voor het jaar 1889. Nieuw Archief XVIII. 35-41.

Eine Scheibe bewegt sich in ihrer Ebene; den geometrischen Ort der Punkte zu bestimmen, welche plötzlich festgehalten werden können, damit die lebendige Kraft der Scheibe zum n^{ten} Teile des ursprünglichen Wertes abnimmt. Mittels eines Impulses wird ein Punkt plötzlich festgehalten; für den gesuchten Ort ergiebt sich ein Kegelschnitt, welcher symmetrisch liegt in Bezug auf die Gerade, welche den Schwerpunkt der Scheibe mit dem Momentancentrum der Bewegung verbindet. Mo.

W. Jansen. Die Kreiselbewegung. Untersuchung der Rotation von Körpern, welche in einem Punkte oder gar nicht unterstützt sind. Berlin. Friedr. Luckhardt. VI + 54 S. gr. 8° [Poske Z. VI. 47-48].

Der Verf. führt von der bezüglichen Litteratur nur Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, 9. Auflage, und einen Aufsatz des Hrn. M. Koppe an: „Ueber die Bewegungen des Kreisels“ in Poske Z. IV. 82. Die beschriebenen Versuche mit dem unterstützten Kreisel und mit frei in der Luft kreiselnden geschoss-

artigen Körpern können als Bestätigungen der Theorie der Bewegung rotirender Körper benutzt werden; die Theorie selbst folgt jedoch aus den allgemeinen Gesetzen der Dynamik, nicht aber aus derartigen Versuchen, die vielleicht die Aufmerksamkeit auf einzelne Umstände bei der Bewegung lenken können. Die Abwesenheit jeder Bezugnahme auf so einfache Begriffe wie Trägheitsmoment, Deviationsmoment, Hauptträgheitsaxen scheint anzudeuten, dass die Arbeit ohne Rücksicht auf diese geläufigen Vorstellungen durchgeführt ist. Lp.

Hbr. Ueber konische Pendelungen. Arch. f. Art. XCVIII. 471-479.

Versuch einer elementaren Begründung für die konischen Pendelungen der aus gezogenen Feuerwaffen gefeuerten Langgeschosse während des Fluges. Lp.

Th. Schwartze. Zur Theorie der gyroskopischen Bewegung. Exner Rep. XXVII. 101-108, 373-377.

Der Verfasser glaubt, einen Unterschied zwischen dem Massenmittelpunkt einer homogenen rotirenden Kreisscheibe und ihrem „dynamischen Schwerpunkte“ erkannt und bewiesen zu haben, und meint dadurch alle Schwierigkeiten, die bei der gyroskopischen Bewegung vorkommen, beseitigen zu können.

Lp.

F. Schottky. Ueber das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers im Raume von vier Dimensionen. Berl. Ber. 1891. 227-232.

Die Bewegung eines starren Körpers im Raume von n Dimensionen hängt für den Fall, dass keine Kräfte wirken, von dem Gleichungssysteme

$$(A_\alpha + A_\beta)\frac{dp_{\alpha\beta}}{dt} = (A_\alpha - A_\beta)\sum_\gamma p_{\alpha\gamma}p_{\beta\gamma},$$

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_\beta p_{\alpha\beta}x_\beta \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n),$$

$$p_{\alpha\beta} = -p_{\beta\alpha}$$

ab; die A_α bedeuten darin positive Constanten Für $n = 4$ lässt sich dieses System mittels Quadraturen lösen. Setzt man $A_\alpha^2 = a_\alpha$, so findet man

$$\frac{1}{A_1 + A_2} = ka_3 a_4 + l(a_3 + a_4) + m, \ldots,$$

so dass k, l, m symmetrische Functionen von $A_1, \ldots, A_4$ werden. Durch die Substitution

$$kdt = du, \quad ldt = dv, \quad mdt = dw, \quad (A_\alpha + A_\beta)p_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta}$$

gehen dann jene Differentialgleichungen in

$$(1) \qquad dq_{12} = (a_1 - a_2)(q_{13} q_{23}(a_4 du + dv) + \cdots), \cdots,$$
$$(2) \qquad dx_1 = q_{12} x_2 (a_3 a_4 du + (a_3 + a_4) dv + dw) + \cdots$$

über; und hierin hat man ein System totaler Differentialgleichungen, auch wenn u, v, w als unabhängige Veränderliche aufgefasst werden. Die sechs Gleichungen (1) nun enthalten nur u, v, und es lassen sich für sie vier Integrale angeben, die in die eine Formel

$$\left(\frac{q_{23}}{\sqrt{(a-a_2)(a-a_3)}} + \frac{q_{14}}{\sqrt{(a-a_1)(a-a_4)}}\right)^2 + (\cdot)^2 + (\cdot)^2 = \sum_1^4{}_\alpha \frac{C_\alpha}{a - a_\alpha}$$
$$+ \frac{2C_0}{\sqrt{(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)(a-a_4)}}$$

zusammenzufassen sind, die für ein willkürliches a gilt; $C_0, \ldots, C_4$ sind dabei fünf Constanten, zwischen denen eine Beziehung besteht. Damit sind die Gleichungen (1) auf Quadraturen zurückführbar; betrachtet man hierauf in (2) zunächst w allein als Variable, so liegt ein System linearer Gleichungen mit constanten Coefficienten vor:

$$\frac{\partial x_1}{\partial w} = q_{12} x_2 + q_{13} x_3 + q_{14} x_4, \ldots;$$

und nach Ansetzung des allgemeinen Integrals dieses Systems gehören zur vollständigen Bestimmung von $x_1, \ldots, x_4$ wieder nur Quadraturen. Der Weg, um die $p_{\alpha\beta}$ und x_α als Functionen von t darzustellen, ist durch eine Arbeit des Hrn. F. Kötter über die Bewegung eines Ellipsoids in einer Flüssigkeit klargelegt. Mk.

Diego Ollero. Balistica. [1890, Revue d'Art. XXXVIII. 81-88.]

— ———

de Sparre. Le mouvement des projectiles dans l'air. Brux. S. sc. XV A. 55-200.

De Tilly. Rapport. Ibid. B. 60-66.

In dem ersten Teile dieser Abhandlung sucht der Verf. eine Gestalt des Gesetzes des Luftwiderstandes, welche für alle Geschwindigkeiten passt und es ausserdem gestattet, die Quadraturen, zu welchen die Didion'sche Vereinfachung führt, in endlichen Gliedern und in elementaren Functionen durchzuführen. Zu diesem Zwecke benutzt er geschickt die Eigenschaft der Ausdrücke von der Form $\varphi(x, y)dx$, wo $y^2 = (x-a)^2 + b^2$, sich genau integriren zu lassen, und er bestimmt die Function φ und die Constanten derart, dass das analytische Gesetz mit dem des Experimentes für alle Geschwindigkeiten übereinkommt. Er entwickelt die Rechnungen, construirt die Tafel, welche in der Praxis zu ihrem Ersatz bestimmt ist, und macht Anwendung von ihr auf die Bewegung der Projection des Schwerpunktes auf die Schussebene in einem bestimmten Falle (ogivale Geschosse, ähnlich denjenigen, die in den Versuchen benutzt sind, welche den Rechnungen des Obersten Hojol zu Grunde lagen).

Der zweite Teil ist betitelt: „Bewegung des Geschosses um den Schwerpunkt; Ablenkung; Wurfdauer." In dem Luftwiderstande unterscheidet der Verf. sorgfältig den dynamischen Druck, proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit, aber abhängig von der vorderen Gestalt des Geschosses; einen statischen Druck nach vorn, der mit der Geschwindigkeit wächst oder constant ist; einen negativen statischen Druck nach hinten, der mit zunehmender Geschwindigkeit abnimmt. Im § I erforscht der Verf. die Einwirkung der Luft auf ein Element der Geschosswandung nach den auf den Ausfluss der Flüssigkeiten bezüglichen Formeln. Im § II wendet er die gefundenen Formeln auf die Untersuchung der Einwirkung der Luft auf ein Geschoss von ogivaler Gestalt an. In den §§ III, IV und V ermittelt er die Formeln für die Bewegung der Geschosse um den Schwerpunkt, teils unter Be-

nutzung, teils unter Vermeidung der elliptischen Functionen. Der § VI ist der Ablenkung gewidmet, die nur in der Hypothese eines der vierten Potenz der Geschwindigkeit proportionalen Widerstandes untersucht wird, d. h. mit Vermeidung der elliptischen Functionen. Im § VII zeigt der Verf., dass die Bewegung des Geschosses um den Schwerpunkt auf die Schussweite keinen nennenswerten Einfluss hat. Endlich wird in den §§ VIII und IX die Berechnung der Schussdauer unter Benutzung der genauen Widerstandsformel durchgeführt (die zur Verwendung der elliptischen Functionen führt), und dann mit Hülfe der einfacheren Hypothese eines der vierten Potenz der Geschwindigkeit proportionalen Widerstandes, was praktisch zu gleichwertigen Ergebnissen führt. Mn. (Lp.)

A. G. Greenhill. Trajectoire d'un projectile, dans le cas où la résistance de l'air est proportionnelle au cube de la vitesse. Traduit de l'anglais par le capitaine Gossot. Paris. Baudouin [1890, Revue d'Art. XXXVII. 96-97].

Die Originalarbeit erschien in den Proceedings of the Royal Artillery Institution. Lp.

E. Vallier. Note complémentaire sur les méthodes actuelles de balistique. Revue d'Art. XXXVII. 273-276.

Nachtrag zu der Arbeit, über welche in F. d. M. XXII. 1890. 929 berichtet ist. 1. Art der Bogeneinteilung. 2. Berechnung des absteigenden Bogens. 3. Correction der Höhe.

Lp.

N. v. Wuich. Die Berechnung der Schusstafeln seitens des Gusstahlfabrik Friedr. Krupp. Mitt. üb. Art. u. Genie. XXII. 1-16.

Die Gussstahlfabrik Friedr. Krupp hat die von ihr bei Anlage von Schusstafeln angewandten ballistischen Hülfstabellen veröffentlicht und denselben kurze theoretische Erläuterungen (von Hrn. W. Gross verfasst) vorausgeschickt. Obgleich jene

Tabellen nur für Ogivalgeschosse Krupp'scher Gestalt gelten, hielt der Verfasser wegen der weiten Verbreitung dieser Geschosse (auch in Oesterreich) es für keine überflüssige Mühe, die Formeln, welche der Anlage der Krupp'schen Hülfstabellen als Grundlage gedient haben, unter Festhaltung der in Oesterreich nach dem Vorgange des Verf. üblichen Bezeichnungsweise der ballistischen Grössen derart zu entwickeln, dass sich die Darlegungen bequem in den Rahmen seiner Vorträge am höheren Artillerie-Curse und seines Lehrbuches der äusseren Ballistik einfügen lassen, wo er die der Krupp'schen Fabrik als Vorbild dienende Siacci'sche Lösung des ballistischen Problems bereits eingehend erörtert hatte. Lp.

Zaboudski. Supplément à la solution des problèmes du tir courbe. Revue d'Art. XXXVIII. 45-56.

Wiedergabe der Gedanken und besonders der Tabellen der in F. d. M. XXII. 1890. 933 angezeigten Schrift des Verfassers mit einigen kritischen einleitenden Bemerkungen. Lp.

N. Sabudsky. Ueber die Winkelgeschwindigkeit länglicher Geschosse. Journal f. d. russ. Artillerie 1891, No. 1. 1-15. 1 Fig.-Taf.

F. Gossot. Solution approchée du problème balistique pour les canons de la marine. Paris. Baudouin et Cie. [1890. Revue d'Art. XXXVII. 294-295].

A. Christl. Ein Beitrag zum indirecten Schuss der Feld-Artillerie. Mitt. üb. Art. u. Genie. XXII. 427-470.

Zumeist militär-technische Erörterungen, denen zuweilen einige theoretische Ueberlegungen beigemengt sind. Lp.

J. A. LONGRIDGE. The artillery of the future and the new powders. London. E. and F. Spon. [Nature XLV. 146-147].

D. GORJATSCHEFF. Ueber scheibenförmige Wurfgeschosse. Arb. d. phys. Sect. d. kais. Ges. der Freunde der Naturkunde. Moskau. Bd. IV. Heft 1. 16-21.

CELLÉRIER. Sur quelques effets des tremblements de terre. Journ. de Math. (4) VII. 271-352.

Das praktische Problem, das dem Verfasser ursprünglich vorgeschwebt hat, betrifft den Einfluss, den ein Erdbeben, das die Grundmauern trifft, auf die über der Erde befindlichen Mauern ausüben kann. Die vorliegende Arbeit ist indessen rein mathematischen Inhalts. Sie behandelt zunächst die Wirkung von Stössen auf ein einfaches Pendel, dann auf ein zusammengesetztes Pendel und endlich auf einen elastischen Körper. Die Integration der bei dem letzten Problem auftretenden Differentialgleichung und die Discussion der erhaltenen Ergebnisse machen sehr umfangreiche Hülfsuntersuchungen notwendig. Von der Art und Weise der Behandlung ist es nicht möglich, hier eine Vorstellung zu geben, da sie der Rechnung Schritt für Schritt eng angepasst ist. Br.

ED. COLLIGNON. Remarques sur le travail des moteurs employés aux transports. Assoc. Franç. Marseille XX. 205-222.

Zuerst wird eine Formel für die Strecken aufgestellt, die in einer gegebenen Zeit von einem Motor zurückgelegt werden, welcher auf einem Wege von gegebener Neigung eine Last zieht, vorausgesetzt dass die Arbeit während der Zeiteinheit constant ist. Hieraus leitet der Verf. die reducirte Länge einer mit verschiedenen Unebenheiten behafteten Strasse ab hinsichtlich der Zeit beim Durchlaufen in der einen Richtung oder in der entgegengesetzten oder in beiden Richtungen, ohne Unterschied, in welcher. Daran schliesst sich die Aufgabe des brachistochronen

Weges zwischen zwei auf einer Oberfläche gegebenen Punkten, sowie die Bedingung dafür, dass der directe Uebergang von einem Punkte nach einem anderen immer bergan oder bergab gehe; die Untersuchung der Linien gleicher Steigung bei einer Umdrehungsfläche mit verticaler Axe nebst Eingehen auf die Linien gleicher Steigung bei der Kugel, den Umdrehungs-Ellipsoiden und -Hyperboloiden und dem Kreiskegel. Es folgt eine Prüfung des Falles, in welchem der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist (schwimmende Fahrzeuge) und die Ermittelung der Kohlenmenge, die ein Dampfer braucht, um die durch die Formel $Q = KAL^3/T^2$ bestimmte Fahrt zu machen. Hierin bedeutet Q jene Kohlenmenge, L die Weglänge der Fahrt, T die Zeitdauer, K und A Coefficienten, die von der Gestalt und den Abmessungen des Fahrzeugs, von der Wirkungsfähigkeit der Maschine und von der Beschaffenheit der verbrauchten Kohle abhängen. Lp.

B. Hydrodynamik.

H. Jewniewicz. Abriss der Kinematik der Flüssigkeiten. Przeglad techniczny. XXVIII. 94-102, 149-153, 173-177. (Polnisch.)

W. H. Besant. Treatise on hydromechanics. 5th ed., revised. Part I: Hydrostatics. London. 260 S. 8°.

W. Gosiewski. Ueber die Natur der Bewegung im Innern eines flüssigen Elementes. Krak. Denkschr. XVII. 135-142. (Polnisch, 1890.)

Sind (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') die einem flüssigen Elemente zur Zeit t angehörenden Coordinaten; u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes (x, y, z),

$$r = \sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2},$$
$$x'-x'' = ar, \quad y'-y'' = br, \quad z'-z'' = cr,$$
$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = s,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = N_1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = N_2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = N_3,$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2T_1, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2T_2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2T_3,$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 2\varpi_1, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 2\varpi_2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 2\varpi_3,$$

so erhalten die hydrodynamischen Gleichungen folgende Form:

$$\frac{da}{dt} + as = aN_1 + b(T_3 + \varpi_3) + c(T_2 - \varpi_2),$$
$$\frac{db}{dt} + bs = a(T_3 - \varpi_3) + bN_2 + c(T_1 + \varpi_1),$$
$$\frac{dc}{dt} + cs = a(T_2 + \varpi_2) + b(T_1 - \varpi_1) + cN_3,$$
$$s = a^2N_1 + b^2N_2 + c^2N_3 + 2bcT_1 + 2caT_2 + 2abT_3.$$

Um die im flüssigen Elemente während der Zeit von t bis $t+dt$ stattfindenden Veränderungen zu erforschen, muss man für drei Richtungen (a, b, c) die Grösse s und die Differentialquotienten $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ bestimmen. Dies wird für solche Richtungen ausgeführt, die folgenden Bedingungen Genüge leisten:

$$a(N_1-s) + bT_3 + cT_2 = 0,$$
$$aT_3 + b(N_2-s) + cT_1 = 0,$$
$$aT_2 + bT_1 + c(N_3-s) = 0.$$

Die Untersuchung führt zu dem Resultate: „Es giebt zwei Arten momentaner Bewegung im Innern eines flüssigen Elementes, nämlich die eine, bei der das Element sich in drei orthogonalen Richtungen deformirt und gleichzeitig um die einer dieser Richtungen parallele Axe rotirt; die zweite aber, bei der das Element nur in drei Richtungen, mögen sie orthogonal oder schief gegen einander geneigt sein, deformirt wird". Dn.

J. McCowan. On the solitary wave. Phil. Mag. (5) XXXII. 45-58.

Sir G. G. Stokes. Note on the theory of the solitary wave. Phil. Mag. (5) XXXII. 314-316.

J. McCowan. Note supplementary to a paper on the solitary wave. Phil. Mag. (5) XXXII. 553-555.

Indem die Möglichkeit der Fortpflanzung einer Einzelwelle ohne Gestaltänderung und mit constanter Geschwindigkeit längs eines geraden Kanals mit rechteckigem Querschnitte angenommen wird, untersucht der Verf. die Bewegung mit Hülfe der Voraussetzung, dass sie auf eine stetige Bewegung gebracht wird, indem man ihr eine Geschwindigkeit, gleich und entgegengesetzt derjenigen der Wellenfortpflanzung, erteilt. Ist die x-Axe horizontal und positiv in der Richtung der Wellenfortpflanzung, die z-Axe vertical nach oben, φ das Geschwindigkeits-Potential, ψ die Stromfunction, so ist $\psi+i\varphi$ eine Function von $z+ix$, da die Bewegung ja im wesentlichen rotationslos ist. In grosser Entfernung von der Welle ist die Flüssigkeit thatsächlich in Ruhe; daher ist für die stetige Bewegung

$$\psi+i\varphi = -U.(z+ix)+f(z+ix),$$

wo U die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ist. Zur Bestimmung der Gestalt von $f(z+ix)$ ist zu beachten, dass, da die Welle eine einzelne ist, diese Function in Bezug auf x nicht periodisch sein darf. Sie muss ferner endlich und stetig durch die ganze Flüssigkeit sein mit Einschluss der Grenzflächen. Für $x = \pm\infty$ muss sie verschwinden oder endlich und von x sowie von z unabhängig sein; auch muss sie, wenn $\psi = 0$ am Boden ist, eine ungerade Function von $z+ix$ sein. Mithin:

$$f(z+ix) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{2n+1}\operatorname{tang}^{2n+1}\tfrac{1}{2}m(z+ix) \qquad (mz < \pi).$$

Eine erste Annäherung erhält man, wenn man das erste Glied so annimmt, dass

$$\psi+i\varphi = -U.(z+ix)+U.a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}m(z+ix);$$

folglich, wenn q die Geschwindigkeit ist:

$$q^2 = U^2 . \left\{1 + \frac{m^2a^2 - 2ma(1 + \cos mz \cosh mx)}{(\cos mz + \cosh mx)^2}\right\}.$$

Ist h die mittlere Tiefe, η die Erhebung der Oberfläche über den mittleren Spiegel, so ist an der Oberfläche $\psi + U.z = U.\eta$, und die Gleichung der Oberfläche wird:

$$\eta = \frac{a \sin m(h+\eta)}{\cos m(h+\eta) + \cosh mx},$$

und

$$q^2 = U^2.\{1 - 2m\eta \operatorname{cotg} m(h+\eta) + m^2\eta^2(\operatorname{cosec}^2 m(h+\eta) - 2/ma)\}.$$

Entwickelt man und vernachlässigt die Potenzen höher als η^2, so wird die Bedingung für die freie Oberfläche, wo $q^2 = U^2 - 2g\eta$, bis zu jener Annäherung erfüllt sein, wenn $mU^2.\operatorname{cotg} mh = g$ und $3ma = 2\sin^2 mh$. Eine stärkere Annäherung ergiebt sich, wenn man $3ma = 2\sin^2 m(h + \frac{3}{4}\eta_0)$ nimmt, wo. η_0 von derselben Ordnung wie η ist. Da ma wesentlich positiv ist, so muss die Welle eine Erhebungswelle sein. Die nächsten beiden Abschnitte erörtern den Oberflächendruck in der Annäherungstheorie und die Annäherungen von Boussinesq und Rayleigh. Darauf wird auf die Frage eingegangen, was unter der Länge der Welle zu verstehen ist, und eine Untersuchung über die Wege der Massenpunkte, die Energie der Welle und die Grenzhöhe der Welle angestellt. Nach Scott Russell's Beobachtungen überstürzte sich die Welle, wenn die Erhebung ungefähr gleich der Tiefe war; der Verf. jedoch meint, dass drei Viertel der Tiefe mit seinen eigenen Versuchen besser stimme. Im Schlussparagraphen werden die Ansichten von Sir G. G. Stokes kurz besprochen. Die zweite der in der Ueberschrift genannten Abhandlungen bringt die Entgegnung von Stokes und die dritte Note die Erwiderung des Hrn. McCowan. Gbs. (Lp.)

A. E. H. Love. Wave motion in a heterogeneous heavy liquid. Lond. M. S. Proc. XXII. 307-316.

Der Verfasser stellt zunächst die Differentialgleichungen für die parallel zu einer verticalen Ebene vor sich gehende Wellen-

bewegung in einer Flüssigkeit variabler Dichtigkeit auf und vereinfacht dann dieselben durch die Annahme, dass im ungestörten Zustande die Flächen constanter Dichtigkeit Ebenen sind, und dass die Abweichungen von dem ungestörten Zustande hinreichend klein bleiben, um höhere Potenzeu zu vernachlässigen. Im folgenden werden die gewonnenen Gleichungen integrirt.

F. K.

A. E. H. Love. On the theory of discontinuous fluid motions in two dimensions. Cambr. Proc. VII. 175-201.

Der Verfasser stellt eine Abänderung der in der Arbeit von Michell, On the theory of free stream lines, Phil. Trans. 1890 (F. d. M. XXII. 1890. 947) entwickelten Methode dar und löst mit Hülfe derselben die folgenden Aufgaben: 1) Ausfluss eines Flüssigkeitsstrahls aus einem Gefäss, 2) Strömen einer Flüssigkeit gegen eine Scheibe mit erhöhtem Rand, 3) schiefes Auffallen eines Strahls auf eine endliche Platte, 4) Widerstand eines ebenen Hindernisses in einem Kanal von endlicher Weite, 5) Vorbeiströmen der Flüssigkeit an einem schief vorspringenden Damm.

Ho.

N. Joukowsky. Bestimmung der Bewegung einer Flüssigkeit bei irgend einer auf einer Stromlinie gegebenen Bedingung. Phys. Ges. St. Petersburg. XXIII. 89-100.

W. Burnside. On a case of streaming motion. Mess. (2) XX. 144-145.

Aehnlich wie bei einer einzigen geradlinigen Schranke findet der Verf. bei zwei solchen, die sich von $z = -1/k^2$ bis zu $z = -1$ und von $z = 1$ bis zu $z = 1/k^2$ erstrecken, dass die strömende Bewegung einer vollkommenen Flüssigkeit (oder von Elektricität) hinter den zu dem Strome senkrechten Schranken gegeben wird durch

$$\zeta = \frac{i}{k}\left[\frac{\pi u}{2KK'} + Z(u)\right],$$

wo $z = \operatorname{sn} u$.

Lp.

H. J. SHARPE. On liquid jets and the vena contracta. Cambr. Proc. VII. 4-12, 111-119. (1890.)

H. J. SHARPE. On liquid jets under gravity. Cambr. Proc. VII. 264-269. (1891.)

Verf. behandelt Beispiele zweidimensionaler Flüssigkeitsbewegungen, wobei es sich um Ausfluss der Flüssigkeit aus Gefässen handelt; ausserhalb des Gefässes genügen die aufgestellten Stromfunctionen den für den Flüssigkeitsstrahl erforderlichen Bedingungen nur näherungsweise. Ho.

---

v. H. Zur Bestimmung des Ausflusscoefficienten. W. Oestr. Ing. u. Arch. XV. 97-99. (1890.)

Die Beziehung zwischen dem Druck und der Ausflussgeschwindigkeit wird hergestellt, indem der Boden des Gefässes in drei Regionen eingeteilt wird, nämlich in die Oeffnung, die Umgegend der Oeffnung, in welcher der Druck noch von der Bewegung der Flüssigkeit abhängt, und den übrigen Teil, in welchem die Geschwindigkeit so gering ist, dass dort der hydrostatische Druck herrschen würde. Der durchschnittliche Wert des Druckes in der mittleren Region wird ein Bruchteil f des hydrostatischen Druckes für die Mitte der Oeffnung sein; ferner möge $K-1$ das Flächenverhältnis der mittleren Region zur Oeffnung darstellen. Dann erhält man für den Ausflusscoefficienten den Ausdruck

$$m = \tfrac{1}{2}(K+f-Kf).$$

Um den Zusammenhang zwischen K und f zu finden, werden einige Annahmen gemacht, die uns, wie einige Punkte der vorhergehenden Entwickelung, nicht ganz unanfechtbar erscheinen. F. K.

J. BOUSSINESQ. Sur la manière dont les vitesses, dans un tube cylindrique de section circulaire, évasé à son entrée, se distribuent depuis cette entrée jusqu'aux endroits où se trouve établi un régime uniforme. C. R. CXIII. 9-15.

J. Boussinesq. **Calcul de la moindre longueur que doit avoir un tube circulaire, évasé à son entrée, pour qu'un régime sensiblement uniforme s'y établisse, et de la dépense de charge qu'y entraîne l'établissement de ce régime.** C. R. CXIII. 49-52.

Bei gleichmässiger Bewegung in einer Röhre herrscht im Abstande r von der Axe eine Geschwindigkeit, deren Verhältnis zur mittleren Geschwindigkeit

$$\varphi = 2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

ist, wo R den Radius der Röhre bezeichnet.

Wenn die Flüssigkeit durch einen gut erweiterten Ansatz in die Röhre eintritt, so wird jene Beziehung nicht von Anfang an gelten, sondern es wird zuerst die Geschwindigkeit constant sein, und erst allmählich nähert sich das Geschwindigkeitsverhältnis jenem Werte. Setzt man nun das Verhältnis der Geschwindigkeit zur mittleren Geschwindigkeit gleich $\varphi + \omega$, so ist für den Anfang der Röhre, d. h. für (1) $x = 0$, $\omega = 2\mathfrak{r} - 1$, wo $\mathfrak{r}$ gleich r^2/R^2 gesetzt ist; für (2) $x = \infty$ wird $\omega = 0$. (3) Für $\mathfrak{r} = 0$ ist ferner $\mathfrak{r}\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathfrak{r}} = 0$, und (4) für $\mathfrak{r} = 1$ endlich

$$\int_0^{\mathfrak{r}} \mathfrak{r}\frac{\partial\omega}{\partial\mathfrak{r}}\,d\mathfrak{r} = 0.$$

Weiter hat man für $\mathfrak{r}\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathfrak{r}}$ eine Differentialgleichung als Function von x und $\mathfrak{r}$, welche genau mit derjenigen der Wärmebewegung in einem Stabe übereinstimmt. Der Verfasser betrachtet zunächst eine particuläre Lösung von der Form $e^{-xk}\psi(\mathfrak{r})$; die Function $\psi(\mathfrak{r})$ ist durch die Differentialgleichung und durch die Bedingung (3) bestimmt. Die Bedingung (4) liefert eine Gleichung zur Bestimmung von k. Jeder Lösung dieser Gleichung entspricht dann eine particuläre Lösung für $\mathfrak{r}\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathfrak{r}}$. Hieraus erhält man mit Rücksicht auf $\omega = 0$ für $\mathfrak{r} = 1$ eine particuläre Lösung für ω selbst. Durch additive Zusammenfügung erhält man dann eine

Lösung, welche alle Bedingungen mit Ausnahme der ersten erfüllt. Will man sich mit einer endlichen Anzahl von Gliedern begnügen, so hat man die Coefficienten in dem so gewonnenen Ausdruck ω so zu bestimmen, dass für x gleich Null das Integral

$$\int_0^1 (\omega - 2\mathfrak{r} + 1)^2 d\mathfrak{r}$$

ein Minimum werde. Nach dem endlichen Resultate genügt es, allein das zur kleinsten Wurzel gehörende Integral beizubehalten; die entsprechende Lösung der Gleichung für ω wird angegeben.

In der zweiten Abhandlung wird derjenige Wert von x ermittelt, für welchen ω einem vorgegebenen kleinen Betrage gleichkommt, und damit eine untere Grenze für die Länge der Röhre gewonnen, welche erforderlich ist, damit ein permanenter Zustand sich herausbilde. Ferner wird der Druckverlust bestimmt, welcher mit dem Eintritte des permanenten Zustandes verbunden ist. F. K.

Andrade. Sur le mouvement d'un vortex rectiligne dans un liquide contenu dans un prisme rectangle de longueur indéfinie. C. R. CXII. 418-421.

Der Verfasser geht aus von der Lösung, welche Hr. Greenhill für das im Titel bezeichnete Problem gegeben hat; er formt die betreffenden Gleichungen, in welchen elliptische Functionen auftreten, durch Einführung der Weierstrass'schen Function $\wp(u)$ etwas um und giebt dann einen Integralausdruck für die Zeit, welche der Wirbel gebraucht, um seine geschlossene Bahn zu durchlaufen. Es werden die Werte berechnet, welchen sich dieser Ausdruck nähert, wenn der Wirbel der Axe des Prismas unendlich nahe kommt, und wenn der Wirbel sehr stark excentrisch ist. Zum Schlusse wird der Bewegungszustand der Flüssigkeit für den Fall eines centralen Wirbels erörtert.

F. K.

J. Buchanan. The oscillations of a spheroid in a viscous liquid. Lond. M. S. Proc. XXII. 181-214.

Zwei Arten von Schwingungen eines Rotations-Ellipsoides in einer reibenden Flüssigkeit werden behandelt, nämlich die Torsionsschwingungen um die Axe und die Schwingungen in Richtung der Axe. Bei beiden kann angenommen werden, dass die Bewegung an irgend einer Stelle in der Flüssigkeit unabhängig von dem Winkel ist, den die Meridianebene mit einer festen Axenebene einschliesst. Im ersten Falle bewegen sich die einzelnen Teile der Flüssigkeit in Kreisbahnen um die Axe des Ellipsoides, im zweiten Falle bewegt sich jedes Teilchen in einer Meridianebene. Der Verfasser geht von particulären Integralen der betreffenden Differentialgleichungen aus; das Integral zerfällt in ein Product von drei Functionen je einer Veränderlichen. Der erste dieser Factoren ist eine Exponentialfunction, während jeder der beiden anderen Factoren eine durch Kugelfunctionen darstellbare Function der beiden elliptischen Coordinaten ist. F. K.

W. Voigt. Beiträge zur Hydrodynamik I u. II. Gött. Nachr. 1891. 37-84.

In der ersten Abhandlung behandelt der Verfasser nach einander zwei verschiedene Aufgaben der Hydrodynamik. Zunächst kommt das Problem der pulsirenden Kugeln zur Behandlung.

Setzt man das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \frac{A}{r}\cos\frac{2\pi t}{T},$$

so erhält die Geschwindigkeit radiale Richtung, und demnach ist die Lage eines Flüssigkeitsteilchens bestimmt durch die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{A}{r^2}\cos\frac{2\pi t}{T},$$

deren Integral die Gleichung

$$r^3 = r_0^3 - \frac{3AT}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{T}$$

ist, oder, wenn AT klein gegen r_0 ist:

$$r = r_0 - \frac{AT}{2\pi r_0^2} \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Man kann also die Bewegung der Flüssigkeit sich durch die Pulsation einer Kugel nach dem Gesetz

$$\varrho = R - a \sin\frac{2\pi t}{T}$$

hervorgebracht denken.

Es bestehe nun das Potential aus einer Summe von Ausdrücken der obigen Form:

$$\varphi = \left(\frac{A}{r} + \Sigma \frac{A_h}{r_h}\right) \cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Es sei jetzt p_0' ein Punkt in der Nähe des Punktes p_0, von welchem aus die Entfernung r gerechnet wird, δ ihre beiderseitige Entfernung, ϱ die Entfernung des beweglichen Punktes von p_0' und endlich ψ der Winkel, welchen ϱ und δ mit einander einschliessen; dann ist

$$r^2 = \varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos\psi.$$

Ebenso erhält man

$$r_h^2 = \varrho^2 + E_h^2 - 2E_h\varrho\cos\psi_h.$$

Ist ϱ grösser als δ, aber kleiner als die E_h, so erhält man

$$\varphi = \left\{A\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{\delta\cos\psi}{\varrho^2} + \cdots\right) + \Sigma A_h\left(\frac{1}{E_h} + \frac{\varrho\cos\psi_h}{E_h^2} + \cdots\right)\right\} \cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Für die Geschwindigkeit in Richtung von ϱ erhält man also:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = -A\left\{\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{2\delta\cos\psi}{\varrho^3}\cdots\right) + \Sigma A_h \frac{\cos\psi_h}{E_h^2}\right\} \cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Ist ϱ klein gegen die E_h und gross gegen δ, so können die nicht hingeschriebenen Glieder vernachlässigt werden. Nennt man α, β, γ die Richtungscosinus von ϱ, diejenigen von E_h aber $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$ und die Projectionen von δ auf die Axen ξ, η, ζ, so kann man ξ, η, ζ so wählen, dass für ein bestimmtes ϱ, welches durch $\bar{\varrho}$ bezeichnet werden soll, die Beziehungen gelten:

$$\frac{2A\xi}{\bar{\varrho}^3} = \Sigma \frac{A_h\alpha_h}{E_h^2}, \quad \frac{2A\eta}{\bar{\varrho}^3} = \Sigma \frac{A_h\beta_h}{E_h^2}, \quad \frac{2A\zeta}{\bar{\varrho}^3} = \Sigma \frac{A_h\gamma_h}{E_h^2}.$$

Für dieses ϱ ist dann auch

$$\frac{2A\delta\cos\psi}{\bar{\varrho}^2} = \Sigma A_h \frac{\cos\psi_h}{E_h^2}$$

und demnach

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = -\frac{A}{\bar{\varrho}^2}\cos\frac{2\pi t}{T},$$

d. h. die radiale Geschwindigkeit ist dann bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{\delta^2}{\varrho^2}$ resp. $\frac{\bar{\varrho}^2}{E^2}$ unabhängig von der Richtung $\bar{\varrho}$.

Der Verfasser zeigt nun, dass die Bewegung der Pulsation einer Kugel mit dem Punkte p_0' als Mittelpunkt entspricht, berechnet alsdann den Druck, welchen die Flüssigkeit auf die in Frage stehende Kugel ausübt, und gelangt so zu einem Ausdrucke für die Kräfte, welche die Kugeln scheinbar auf einander ausüben. Im Anschluss hieran wird das entsprechende Problem für ein Gebiet von zwei Dimensionen, d. h. für isochron pulsirende Cylinder, behandelt.

Das zweite Capitel giebt eine Darstellung der stehenden Wellen in einem Strome als Beispiel für die Kirchhoff'sche Theorie der Flüssigkeitsstrahlen. Sind x, y die Coordinaten, u, v die Geschwindigkeitscomponenten, endlich φ das Potential und ψ die Stromfunction, so ist $z = x+iy$ eine Function von $\omega = \varphi + i\psi$, und die Ableitung $\frac{dz}{d\omega} = \zeta = \xi + i\eta$ steht zu den Componenten der Geschwindigkeit in der Beziehung:

$$\zeta = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad \eta = \frac{v}{u^2+v^2}, \quad \xi^2+\eta^2 = \frac{1}{u^2+v^2}.$$

Wird nun durch

$$\zeta = F(\omega), \quad \text{resp.} \quad \omega = f(\zeta)$$

eine Abbildung bestimmt, bei welcher einer Geraden $\psi = C$ ein Kreis $\xi^2+\eta^2 = c^2$ entspricht, so ist durch

$$z = \int \zeta d\omega = \int F(\omega) d\omega$$

das Potential einer Flüssigkeitsbewegung bestimmt, bei welcher der durch $\psi = C$ bestimmten Stromlinie eine freie Grenze ent-

spricht. Setzt man

$$2ia\sin(\omega b) = \frac{c-\zeta}{c+\zeta}, \quad \text{oder} \quad \zeta = c\,\frac{1-2ia\sin(\omega b)}{1+2ia\sin(\omega b)},$$

so ist

$$a\cos\varphi b(e^{\psi b}-e^{-\psi b}) = \frac{c^2-\xi^2-\eta^2}{(c+\xi)^2+\eta^2},$$

$$a\sin\varphi b(e^{\psi b}+e^{-\psi b}) = -\frac{2c\eta}{(c+\xi)^2+\eta^2},$$

und man sieht, dass hier der Linie $\psi = 0$ der Kreis $\xi^2+\eta^2 = c^2$ entspricht. Es wird

$$z = \int \zeta d\omega = c\left\{\frac{2i}{kb}\ln\left(\frac{1+k+2ae^{i\omega b}}{1-k+2ae^{i\omega b}}\right) - \omega\right\},$$

oder

$$x = -c\left[\frac{2}{kb}\,\text{arc tang}\,\frac{k\sin\varphi b}{\cos\varphi b - a(e^{\psi b}-e^{-\psi b})} + \varphi\right],$$

$$y = c\left[\frac{1}{kb}\ln\frac{(1+k+2ae^{-\psi b}\cos\varphi b)^2+4a^2e^{-2\psi b}\sin^2(\varphi b)}{(1-k+2ae^{-\psi b}\cos\varphi b)^2+4a^2e^{-2\psi b}\sin^2(\varphi b)} - \psi\right],$$

wo $k = \sqrt{1+4a^2}$ sein soll.

Einem constanten Werte von ψ entspricht also eine aus congruenten Teilen zusammengesetzte Linie, von denen ein einzelner durch die Werte von φ zwischen Null und $\frac{2\pi}{b}$ bestimmt ist. Für die freie Grenze, d. h. für $\psi = 0$, wird

$$x = -c\left\{\frac{2}{kb}\,\text{arc tang}\,(k\,\text{tang}\,\varphi b) + \varphi\right\},$$

$$y = \frac{c}{kb}\ln\frac{(k+1)(k+2a\cos(\varphi b))}{(k-1)(k-2a\cos(\varphi b))}.$$

Für den Fall, dass Kräfte wirken, verliert die Kirchhoff'sche Methode im allgemeinen ihre Anwendbarkeit wegen der complicirten Form der Bedingung für die freien Grenzen. Im Falle der Schwere wird diese Grenzbedingung

$$V^2 = C - 2gy$$

oder, wenn V_0 die Geschwindigkeit für $y = 0$ ist,

$$V^2 = V_0^2 - 2gy \quad \text{oder} \quad \frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_0^2-2gy}.$$

Darf man $\frac{y^2}{V_0^4}$ vernachlässigen, so erhält man

$$\frac{1}{V^2}=\frac{1}{V_0^2}\left(1+\frac{2gy}{V_0^2}\right)=m^2+n^2y$$

oder

$$\xi^2+\eta^2=m^2+\frac{n^2}{i}J\left(\int\zeta\,d\omega\right).$$

Es lassen sich nun Ausdrücke $F(\omega)$ erraten, welche für ein constantes ψ, dessen Wert gleich Null gesetzt werden darf, dieser Gleichung genügen. Ein solcher ist

$$\zeta=a-be^{-ic\omega};$$

derselbe führt auf die Gleichung

$$x=\varphi a-\frac{b}{c}e^{c\psi}\sin c\varphi,\quad y=a\psi-\frac{b}{c}e^{c\psi}\cos c\varphi.$$

Die Stromlinien sind also Trochoiden. Ferner giebt der Verfasser ein Näherungsverfahren für die Bestimmung gewisser Flüssigkeitsbewegungen unter Einfluss äusserer Kräfte, welche ein Potential besitzen. Es wird zunächst die Gestalt der freien Oberfläche bestimmt für den Fall, dass Gleichgewicht herrschen würde. Dann wird eine zweite Näherung gefunden, indem man das Geschwindigkeitspotential φ_1 für eine Flüssigkeitsbewegung bestimmt, bei welcher die vorerwähnte Grenzfläche durch eine feste Wand erzwungen wird. Dann wird aus der bekannten Bedingung die Gleichung der Fläche ermittelt, welche bei dieser Bewegung eine freie Grenze sein könnte. Ist diese Grenze ermittelt, so denkt man sich dieselbe wieder durch eine feste Wand ersetzt und bestimmt dann das zugehörige Geschwindigkeitspotential $\varphi_1+\varphi_2$. Indem man dann wieder die Bedingung für die freien Grenzen ansetzt, erhält man die Gleichung für die Oberfläche in dritter Näherung. Der Verfasser wendet dieses Verfahren, welches natürlich auch weiter fortgesetzt werden kann, auf den Fall an, dass unter dem Spiegel einer schweren Flüssigkeit von unendlicher Tiefe in der Entfernung a von der Oberfläche sich eine der letzteren parallele linienförmige Quelle befindet, und ferner, dass in gleichen Abständen unendlich viele solcher Quellen vorhanden sind.

Im vierten Abschnitt werden alle stationären Bewegungen aufgesucht, welche nur von zwei Coordinaten abhängen. Die Resultate dieses Abschnitts muss Referent als unzutreffend bezeichnen. Herr Voigt folgert nämlich aus der Gleichung

$$\omega''\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2\right)+\omega'\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}\right)+2\tau=0,$$

in welcher ω eine Function von τ allein und ω', ω'' ihre beiden ersten Ableitungen nach τ sind, dass sowohl $\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2$ als $\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}$ Functionen von τ allein sein müssen.

Im fünften Abschnitt behandelt der Verfasser Flüssigkeitsbewegungen, welche im Innern eines Ellipsoids vor sich gehen.

Sollen die Geschwindigkeiten lineare Functionen der Coordinaten sein:

$$\begin{aligned} u &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z,\\ v &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\\ w &= a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z,\end{aligned}$$

so muss wegen der Incompressibilität

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$$

sein. Für die Punkte des Ellipsoids muss

$$\frac{ux}{a^2}+\frac{vy}{b^2}+\frac{wz}{c^2}=0$$

sein; das giebt:

$$a_{11}\frac{x^2}{a^2}+a_{22}\frac{y^2}{b^2}+a_{33}\frac{z^2}{c^2}=0$$

oder

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$$

und

$$\frac{a_{23}}{b^2}+\frac{a_{32}}{c^2}=\frac{a_{31}}{c^2}+\frac{a_{13}}{a^2}=\frac{a_{12}}{a^2}+\frac{a_{21}}{b^2}=0.$$

Die Componenten der Wirbelgeschwindigkeit sind reine Functionen der Zeit. Es ist nämlich:

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = a_{32} - a_{23},$$

$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = a_{13} - a_{31},$$

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = a_{21} - a_{12}.$$

Durch diese ausgedrückt, werden die Coefficienten:

$$a_{32} = \frac{2c^2\xi}{b^2+c^2},\quad a_{13} = \frac{2a^2\eta}{a^2+c^2},\quad a_{21} = \frac{2b^2\zeta}{b^2+a^2},$$

$$a_{23} = -\frac{2b^2\xi}{b^2+c^2},\quad a_{31} = -\frac{2c^2\eta}{a^2+c^2},\quad a_{12} = -\frac{2a^2\zeta}{b^2+a^2}.$$

Nun sind aber die Ableitungen von ξ, η, ζ:

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z} = \eta\zeta\frac{2a^2(b^2-c^2)}{(c^2+a^2)(a^2+b^2)},$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v}{\partial z} = \zeta\xi\frac{2b^2(c^2-a^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)},$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \xi\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\frac{\partial w}{\partial y} + \zeta\frac{\partial w}{\partial z} = \xi\eta\frac{2c^2(a^2-b^2)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}.$$

Man hat also Gleichungen, deren Aehnlichkeit mit denen für die Rotation eines starren Körpers in die Augen springt.

Die Bestimmung der Stromlinien, welche sich von dem oben angedeuteten Gesichtspunkte aus übrigens leicht bewerkstelligen lässt, wird allgemein nicht durchgeführt; vielmehr beschränkt sich der Verfasser auf den Fall eines Rotationsellipsoids. F. K.

H. Willotte. Étude sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide. Journ. de Math. (4) VII. 399-431.

Der Verfasser geht aus von den Formeln für den Stoss zweier Körper, indem er die Componenten der Schwerpunktsgeschwindigkeit und die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit durch die Kraft ausdrückt, welche die Körper während des Stosses auf einander ausüben. Die Richtung derselben ist be-

kannt, ihre Grösse wird durch die Bedingung bestimmt, dass die lebendige Kraft erhalten bleibt.

Dann wird angenommen, dass die eine Masse eine unendlich kleine kugelförmige Masse sei, und die Aenderung berechnet, welche die lebendige Kraft der endlichen Masse durch einen Zusammenstoss mit der kleinen Masse erfährt.

Der Verfasser berechnet dann die Anzahl der Stösse, welche ein Oberflächenelement einer Masse in einem Medium erfährt, das aus solchen unendlich kleinen Massen gebildet wird, welche sich gegenseitig nicht beeinflussen, und stellt schliesslich Betrachtungen über die Aenderungen an, welche die Bewegung und namentlich die lebendige Kraft hierbei erfahren. F. K.

F. Kötter. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Berl. Ber. 1891. 47-56; J. für Math. CIX. 51-81, 89-111.

Bewegt sich ein fester Körper, auf den keine äusseren Kräfte wirken, in einer incompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit, deren Gebiet einfach zusammenhängend ist und sich nach allen Seiten ins Unendliche erstreckt; ist ferner der Anfangszustand wirbelfrei, und ruht die Flüssigkeit im Unendlichen; besitzen endlich die auf die Flüssigkeit wirkenden äusseren Kräfte ein Potential; so lassen sich mittels des Hamilton'schen Princips die Differentialgleichungen, von denen die Bewegung des Körpers abhängt, aufstellen, ohne dass der eigentlich hydrodynamische Teil des Problems gelöst zu werden braucht. Einfache Fälle derartiger Bewegungen sind zuerst von Thomson und Tait (Handbuch der theoretischen Physik, deutsche Uebersetzung, 1. Aufl. 1871, I § 331-332) behandelt. Ferner hat Kirchhoff [J. für M. LXXI, F. d. M. II. 1869-1870. 731; vgl. Kirchhoff's Mechanik, Vorl. 19] jene Gleichungen für den Fall eines Rotationskörpers, auf den keine äusseren Kräfte wirken, integrirt. Zugleich hat Kirchhoff den allgemeinen Gleichungen eine sehr elegante Form gegeben. Durch eine Transformation der Kirchhoff'schen Gleichungen gelang es sodann Clebsch [Math. Ann. III., F. d. M. II. 1869-1870.

733], drei neue integrable Fälle des in Rede stehenden Problems zu finden, von denen einer eine directe Erweiterung des Kirchhoff'schen Falles ist, während von den beiden übrigen der eine in dem letzten als Specialfall enthalten ist. Auch in diesem allgemeinsten Falle wirken auf den Körper keine äusseren Kräfte.

Clebsch hat die Aufgabe nur soweit verfolgt, dass er die Lösung auf Quadraturen zurückführte. Später hat Herr Weber [Math. Ann. XIV, F. d. M. X. 1878. 643] unter der Voraussetzung, dass der den Körper in Bewegung setzende Impuls sich auf eine Einzelkraft reducirt, sämtliche für die Bewegung in dem allgemeinsten Clebsch'schen Falle in Betracht kommenden Grössen durch Thetafunctionen zweier Veränderlichen dargestellt, deren Argumente lineare Functionen der Zeit sind. Es war dies ein Resultat, das sich aus den Clebsch'schen Formeln nicht ohne weiteres ableiten liess. Sagt doch Clebsch selbst, dass die Umformung seines fünften Integrals (das Integral für die Zeit hat er nicht explicit aufgestellt) mit grossen Schwierigkeiten verknüpft zu sein scheine.

Für den complicirteren Fall, wo das impulsive Kraftsystem aus einer Einzelkraft und einem Kräftepaar besteht, stand eine der Weber'schen analoge Darstellung bisher noch aus. Diese Lücke wird durch die vorliegenden Arbeiten, deren erste nur ein Auszug aus der ausführlicheren zweiten ist, ausgefüllt; und damit erst kann das allgemeine Clebsch'sche Problem als völlig durchgeführt angesehen werden. Bemerkenswert ist, dass auch hier zur Darstellung der Bewegung nur Thetafunctionen zweier Veränderlichen erforderlich sind.

Um den Gedankengang des Herrn Kötter zu verstehen, ist es notwendig, auf das Clebsch'sche Problem näher einzugehen. Bei demselben wird angenommen, dass die Gestalt und Massenverteilung des sich bewegenden Körpers, auf den keine äusseren Kräfte wirken, eine derartige ist, dass die lebendige Kraft T desselben sich durch einen Ausdruck von der Form

$$(1) \qquad 2T = \frac{u^2}{a_1} + \frac{v^2}{a_2} + \frac{w^2}{a_3} + \frac{p^2}{b_1} + \frac{q^2}{b_2} + \frac{r^2}{b_3}$$

darstellen lässt, mit der beschränkenden Nebenbedingung, dass

zwischen den Constanten die Gleichung

$$(2)\qquad a_1\left(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}\right)+a_2\left(\frac{1}{b_3}-\frac{1}{b_1}\right)+a_3\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}\right)=0$$

besteht. Darin sind u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten X, Y, Z des Anfangspunktes O eines im Körper festen Coordinatensystems in Bezug auf diese Axen; p, q, r sind die Rotationsgeschwindigkeiten des Körpers nach denselben Axen. Für die obige Form von T haben die sechs zwischen u, v, w, p, q, r bestehenden Differentialgleichungen (über diese vergl. Kirchhoff's Mechanik, Vorl. 19, § 2) ausser den drei Integralen, die man von vorne herein kennt, noch ein viertes von der Form: eine quadratische Function von u, v, w, p, q, r ist gleich einer Constante. Ein fünftes Integral, das aber im folgenden keine Rolle spielt, findet Clebsch durch das Princip des letzten Multiplicators. Das erwähnte vierte Integral ermittelt Clebsch, indem er an Stelle der u, v, w, p, q, r die folgenden Unbekannten einführt:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\partial T}{\partial u}, & x_2 = \dfrac{\partial T}{\partial v}, \quad x_3 = \dfrac{\partial T}{\partial w}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{\partial T}{\partial p}, & y_2 = \dfrac{\partial T}{\partial q}, \quad y_3 = \dfrac{\partial T}{\partial r}. \end{cases}$$

(Es sind dies die Componenten und Drehungsmomente des Impulses, der die momentane Bewegung hervorbringen würde, bezüglich der im Körper festen Axen.) Dadurch nehmen die von Kirchhoff aufgestellten Bewegungsgleichungen die Form an:

$$(4)\qquad \frac{dx_1}{dt} = b_3 y_2 x_3 - b_2 y_3 x_2, \quad \frac{dy_1}{dt} = y_2 y_3 (b_2 - b_3) + x_2 x_3 (a_2 - a_3),$$

zu denen noch vier andere kommen, die aus den hingeschriebenen durch cyklische Vertauschung der Indices hervorgehen. Vier Integrale dieser Gleichungen sind

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2 = J^2, \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = JJ_1, \\ a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 = L, \\ -(a_2 a_3 x_1^2 + a_3 a_1 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2) + b_1 a_1 y_1^2 + b_2 a_2 y_2^2 + b_3 a_3 y_3^2 = L_1. \end{cases}$$

Das vierte Integral ist das von Clebsch gefundene; dasselbe ergiebt sich mittels der Relation (2). J ist die Einzelkraft des

den Körper in Bewegung setzenden Impulses, J_1 das Drehungsmoment des Kräftepaares jenes Impulses.

An diese Resultate, die er in selbständiger Darstellung reproducirt, knüpft Herr Kötter seine eigenen Erörterungen an. Die erste Aufgabe besteht darin, die sechs Grössen $x_1, \ldots, y_3$, zwischen denen die vier Gleichungen (5) bestehen, durch zwei neue Grössen auszudrücken. Es genügt, die Aufgabe für den Specialfall $b_1 = b_2 = b_3$ zu lösen, da sich der allgemeine Fall durch Einführung neuer Constanten an Stelle der a, b auf jenen Specialfall zurückführen lässt. Unter der Voraussetzung $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ werden nun an Stelle der Grössen x_α, y_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ die folgenden linearen Verbindungen derselben betrachtet:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \left.\begin{matrix}\xi_\alpha\\ \eta_\alpha\end{matrix}\right\} = x_\alpha\Bigg(&\frac{\sqrt{(s_1-a_1)(s_1-a_2)(s_1-a_3)}}{\sqrt{s_1-a_\alpha}\,\sqrt{\psi'(s_1)}} \\ &\pm i\,\frac{\sqrt{(s_2-a_1)(s_2-a_2)(s_2-a_3)}}{\sqrt{s_2-a_\alpha}\,\sqrt{\psi'(s_2)}}\Bigg) \\ &+ y_\alpha\left(\frac{\sqrt{s_1-a_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} \pm i\,\frac{\sqrt{s_2-a_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\right). \end{aligned}\right.$$

Darin ist

$$\psi(s) = (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4).$$

Die oberen Zeichen beziehen sich auf ξ, die unteren auf η. Die durch (6) definirten Grössen ξ, η genügen nun folgenden drei Gleichungen:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\xi_\alpha^2 + \Sigma\eta_\alpha^2 = 0, \\ &\Sigma\xi_\alpha\eta_\alpha = 0, \\ &\Sigma d_\alpha^2\xi_\alpha^2 + \Sigma\frac{\eta_\alpha^2}{d_\alpha^2} = 0, \end{aligned}\right. \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

wo

$$(7^a)\qquad d_\alpha = \frac{\dfrac{\sqrt{s_3-a_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} + i\,\dfrac{\sqrt{s_4-a_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\dfrac{\sqrt{s_1-a_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} + i\,\dfrac{\sqrt{s_2-a_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}}$$

ist. In Folge der Gleichungen (7) lassen sich die sechs Grössen ξ_α, η_α als Producte eines allen gemeinsamen Factors S und je

einer hyperelliptischen Function des Wertepaares s_1, s_2 darstellen. Indem man dann irgend eine der Gleichungen (5) oder besser noch eine in gewisser Weise von einem willkürlichen Parameter abhängende Combination dieser Gleichungen benutzt, erhält man auch S durch hyperelliptische Functionen von s_1 und s_2 dargestellt. Damit sind auch die x_a, y_a durch hyperelliptische Functionen ausgedrückt. Geht man dann von diesen zu den Thetafunctionen zweier Veränderlichen über und setzt die so erhaltenen Ausdrücke in die Differentialgleichungen (4) ein, so ergeben sich die Argumente der Thetafunctionen als lineare Functionen der Zeit.

Da es zu weit führen würde, auf weitere Einzelheiten der sehr umfangreichen Entwickelungen einzugehen, müssen wir uns mit obiger Darlegung des Gedankenganges der Arbeit wie ihres Zusammenhanges mit früheren Arbeiten begnügen. Hinsichtlich der schliesslichen Resultate sei noch Folgendes erwähnt. Die Thetafunctionen werden genau so definirt, wie es Frau von Kowalevski in ihrer Abhandlung über die Rotation (Acta Math. Bd. XII, F. d. M. XXI. 1889. 935) im Anschluss an die Untersuchungen des Herrn Königsberger gethan hat. Die Grössen $x_1 = \frac{\partial T}{\partial u}$, $y_1 = \frac{\partial T}{\partial p}$, ... lassen sich als Brüche mit gemeinschaftlichem Nenner darstellen; und zwar setzt sich letzterer linear aus zwei Thetafunctionen zusammen. Die beiden Argumente jeder der Thetafunctionen sind lineare Functionen der Zeit. Die Zähler der genannten Ausdrücke unterscheiden sich von dem gemeinsamen Nenner nur dadurch, dass an Stelle der Thetafunctionen andere Thetafunctionen treten und auch die constanten Factoren andere Werte annehmen. Eine analoge Darstellung mit demselben Nenner ergiebt sich auch für u, v, w, p, q, r. Weiter werden auch die Richtungscosinus der im Körper festen gegen die im Raume festen Axen durch Thetafunctionen ausgedrückt. Der Nenner der neun Richtungscosinus ist genau derselbe wie in den Ausdrücken für $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial p}$, u, p, etc. Von den Zählern der Richtungscosinus enthalten jedoch nur die

drei zwischen der Axe des Impulses und den drei im Körper festen Axen Thetafunctionen mit denselben Argumenten wie im Nenner, während die in den Zählern der sechs übrigen Richtungscosinus auftretenden Thetafunctionen Argumente besitzen, die aus den vorher genannten Argumenten durch Addition und Subtraction eines gewissen Constantenpaares entstehen. Endlich werden auch die Coordinaten des Anfangspunktes des im Körper festen Axensystems ermittelt. Die Ausdrücke für diese haben analoge Formen wie die für die Richtungscosinus, nur dass bei der dem Anfangsimpulse parallelen Axe noch ein der Zeit proportionales additives Glied hinzutritt, bei den beiden anderen Coordinaten ein Factor, der eine einfach periodische Function der Zeit ist. Wn.

R. A. Sampson. On Stokes's current function. Lond. Phil. Trans. CLXXXII (A). 449-518.

Die „Stromfunction" ψ genügt der Gleichung

$$D\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} = 0,$$

wenn $\mu = \cos\theta$, und die Entwickelung des Abstandes eines beliebigen Punktes von einem Punkte in der Symmetrieaxe hängt von den Functionen $I_n(\cos\theta)$ oder $I_n(\mu)$ ab, wo

$$(1-\mu^2)\frac{d^2 I_n(\mu)}{d\mu^2} + n(n-1)I_n(\mu) = 0.$$

Der Verfasser bemerkt, dass es rätlich ist, diese Function $I_n(\cos\theta)$ und andere Lösungen der dadurch befriedigten Differentialgleichung zu erörtern, bevor man die Anwendung der Function ψ auf die Flüssigkeitsbewegung betrachtet. Die ersten drei Capitel der Abhandlung sind dieser Erörterung gewidmet, und die Theorie gleicht sehr nahe derjenigen der Kugelfunctionen. Der Verf. geht zurück auf Heine und auf Untersuchungen von O. E. Meyer, Butcher und Hicks.

Die in der Abhandlung gegebenen Anwendungen auf die Hydrodynamik sind eher von mathematischem als physikalischem Interesse; sie hängen vornehmlich mit der Bewegung zäher Flüssigkeiten zusammen und nehmen Bezug auf Arbeiten von

Overbeck und Herman. Die Abhandlung schliesst mit einem Versuche, die Strömung hinter einem Sphäroid oder durch ein Hyperboloid zu discutiren, an deren Begrenzung ein Gleiten stattfinden kann. Cly. (Lp.)

L. M. J. Stoel. Metingen over den invloed van de temperatuur op de inwendige wrijving van vloeistoffen tusschen het kookpunt en den kritischen toestand. Leiden. E. Ydo. 57 S. 8°.

Die vorliegende Dissertation verfolgt den Zweck, den Einfluss der Temperatur auf die innere Reibung bei Flüssigkeiten zwischen dem Siedepunkte und dem kritischen Zustande festzustellen. Der Inhalt ist experimenteller Natur; die hydrodynamischen Gleichungen, welche für zähe Flüssigkeiten gelten, werden im Anschluss an Herrn Warburg's Abhandlung in Wiedemann's Ann. XVII nur zu Hülfe gezogen, um ein Urteil über die Grösse der Correction zu bilden, welche die Zusammendrückbarkeit und die Aenderung der Reibungscoefficienten mit der Dichtigkeit veranlassen. Mo.

E. Oekinghaus. Ueber den durch die Rotation der Erde bewirkten Seitendruck fliessender Gewässer. Hoppe Arch. (2) X. 95-102.

Der Verfasser berechnet den Seitendruck eines von Süd nach Nord laufenden Stromes in einer dem Referenten unrichtig erscheinenden Weise. Die Arbeit, welche in Folge der hierbei auftretenden Reibung geleistet wird, hätte sich weniger umständlich berechnen lassen. F. K.

K. Ziolkowsky. Druck einer Flüssigkeit auf eine sich gleichmässig in ihr bewegende Ebene. Arbeiten der kais. Ges. der Freunde der Naturkunde. Moskau. IV. Hft. 2. 13-17. (Russisch.)

P. W. Lippert. Zur Klärung der Luftwiderstandsfragen. W. Oestr. Ing. u. Arch. XVI. 219-221, 236-239, 245-247, 274-275.

J. Popper. Zur Klärung der Luftwiderstandsfragen. Ibid. 262-263, 284.

A. Platte. Zur Klärung der Luftwiderstandsfragen. Ibid. 275.

Die erste Abhandlung giebt Betrachtungen über den Luftwiderstand, welche zum wesentlichen Teil auf Beobachtungen von O. Lilienthal [Der Vogelflug, Berlin 1889] beruhen und mit der Theorie des Fliegens zusammenhängen. Der Referent steht den hier in Betracht kommenden Fragen zu fern, um zu der Discussion zwischen den Herren Lippert und A. Platte einerseits und Herrn Popper andererseits Stellung nehmen zu können.

F. K.

A. von Miller-Hauenfels. Die Schwebearbeit beim Vogelflug und dessen Nachahmungen. W. Oestr. Ing. u. Arch. XVI. 352-353.

S. P. Langley. Experiments in aerodynamics. Smithsonian contributions to knowledge. Washington. [Nature XLV. 108-109, angezeigt durch Lord Rayleigh].

N. Joukowsky. Ueber das Schweben der Vögel. Arbeiten der phys. Section d. kais. Ges. f. Freunde d. Naturkunde. IV. Hft. 2. 29-43. (Russisch.)

Der Verfasser betrachtet die Aufgabe des Schwebens der Vögel nicht als ein Problem der Aerodynamik, welches unüberwindliche Schwierigkeiten darbieten würde, sondern als eine Aufgabe der Mechanik eines starren Körpers, indem er annimmt, dass die Gesetze des auf die Flügel und den Körper der Vögel wirkenden Luftwiderstandes durch das Experiment gefunden worden sind. Die Ableitungen stützen sich auf folgende zwei empirischen Gesetze: 1) auf das Gesetz des Sinus des vom relativen Winde mit dem Flügel gebildeten Winkels (der Vogel wird als eine ebene Platte betrachtet, da die Concavität der Flügel nur auf die in den Formeln vorkommenden Constanten Einfluss

ausübt, der übrigens nach Otto Lilienthal's Tafeln gefunden werden kann); dasselbe giebt bekanntlich für den Luftwiderstand

$$R = 0{,}13 s v^2 \sin i,$$

wo s die Fläche der Flügel und v die Geschwindigkeit des Vogels bedeuten; 2) auf eine von Hrn. Joukowsky durch Versuche gefundene Verallgemeinerung des Avanzini'schen Gesetzes über die Lage des Centrums des Luftwiderstandes. Diese Verallgemeinerung soll in einer besonderen Arbeit ausführlicher behandelt werden. Da der Verfasser Lord Rayleigh's Meinung über das Schweben der Vögel teilt, dass nämlich ein Vogel in ruhiger Luft oder bei gleichmässigem Winde sich nicht, ohne mit den Flügeln zu arbeiten, in der Höhe zu erhalten vermag, so untersucht er nur die folgenden vier Fälle des Schwebens eines Vogels: 1) Bei ruhiger Luft, wobei die Bewegung in einer verticalen Ebene stattfinden oder auch aus derselben herausgehen kann, die Höhe aber stets abnimmt. 2) Bei horizontalem, die oberen Schichten der Luft schneller als die unteren bewegendem Winde; es ist ein Steigen des Vogels möglich. 3) Bei stossweise blasendem Winde; eine Zunahme der Höhe ist auch hier möglich. Die Veränderung der Geschwindigkeit des Windes wird vom Verfasser als dem harmonischen Gesetze

$$w = C + e . \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

folgend angenommen. 4) Bei aufwärts gerichtetem Winde. Die Möglichkeit des Steigens der Vögel ist in diesem Falle schon von Hubert Airy und O. Lilienthal erwiesen worden.

Die Integrationen sind grösstenteils näherungsweise ausgeführt, indem bei der Berechnung der ersten Hälfte jeder Periode gewisse kleine Grössen vernachlässigt, dann die dadurch entstehende Veränderung der Energie berechnet und daraus eine Correction der Anfangsgeschwindigkeit für die nächste Hälfte jeder Periode abgeleitet werden. Der Verlauf der Curve, die vom Vogel beschrieben wird, ist somit im allgemeinen gegeben.

Bb.

A. DE CALIGNY. Recherches hydrauliques. Belg. Bull. (3) XXI. 113-117, 311-313, 396-399, 515-517.

Fortsetzung der früheren Untersuchungen über die Ausnutzung der Kraft der Gezeiten. Mn. (Lp.)

H. SCHEFFLER. Die Hydraulik auf neuen Grundlagen. Leipzig. Fr. Förster. IV + 225 S. mit 3 Taf. 8°.

G. LINDNER. Theorie der Schleuderpumpen. Z. deutscher Ing. XXXV. 576-582, 971.

Der Verfasser entwickelt zunächst auf ziemlich umständliche Weise eine Beziehung zwischen dem Druck und der Geschwindigkeit für den Durchfluss durch eine ebene Röhre, welche sich um eine zu ihr senkrechte Axe mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit dreht. Ein hierbei untergelaufener Fehler wird in der Notiz verbessert.

Dagegen bleibt ein viel groberer Irrtum unverbessert, welcher auf das Folgende hinausläuft. Ein Flüssigkeitsteilchen behält unverändert sein Volumen bei. Das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedons von den Seiten udt, vdt, wdt (u, v, w Componenten der Geschwindigkeit) hat das Volumen $u.v.w.(dt)^3$; also müsse $u.v.w$ für ein Flüssigkeitsteilchen constant sein.

Die weiteren Betrachtungen sind rein praktischer Natur und bedürfen hier keiner Erörterung. F. K.

J. BARTL. Zur Auswahl der zweckmässigsten Schaufelform für Kreiselpumpen. Z. deutscher Ing. XXXV. 1046-1052.

Es wird zunächst auf graphischem Wege für eine gegebene Radarbeitshöhe und gegebene Geschwindigkeit des Rades die Schaufelform auf graphischem Wege bestimmt. Dann wird untersucht, wie sich die verschiedenen Formen, welche der erste Abschnitt für verschiedene Radgeschwindigkeiten ergeben hatte, bezüglich der Ingangsetzung der Pumpe und der hierzu erforder-

lichen Geschwindigkeit verhalten. Im dritten Abschnitt werden die Pressungsverhältnisse besprochen, und dann endlich die hydraulischen Widerstände. Im letzten Abschnitt werden die Schaufelwinkel berechnet und der Einfluss der Halbmesserverhältnisse untersucht. F. K.

A. Bottiglia. Sulle velocità di massimo rendimento ed a vuoto delle turbine. Torino Atti. XXVI. 541-550.

Der Verfasser ermittelt zunächst einen allgemeinen Ausdruck für die Arbeit L, und bestimmt dann die Geschwindigkeit für den grössten Nutzeffect, sowie diejenige, bei welcher gar keine Arbeit geleistet wird. Aus diesen allgemeinen Formeln werden dann Beziehungen zwischen den beiden Geschwindigkeiten für die verschiedenen Arten von Turbinen abgeleitet. F. K.

E. Cavalli. Contribuzione alla teoria delle turbine elicoidali. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII_2. 145-151.

Der Verfasser stellt folgenden Satz auf:

Bei einer Schraubenturbine ist die Bahn eines Flüssigkeitsteilchens eine Cykloide oder ein Kreisbogen, je nachdem die Turbine mit möglichst grossem oder ohne Nutzeffect läuft. Und zwar ist der Durchmesser des erzeugenden Kreises der Cykloide gleich demjenigen der Kreisbahnen.

Dabei ist unter der Bahn verstanden die Bahn in einer durch die Axe gehenden Ebene, welche sich mit dem Flüssigkeitsteilchen um die Axe dreht. F. K.

R. Stribek. Der Einfluss der Schaufelstärken der Turbinen. Z. deutscher Ing. XXXV. 612-615.

Wesentlich technisch. F. K.

F. J. Vaes. Ueber die graphische Bestimmung der Kolbenbeschleunigung. Z. deutscher Ing. XXXV. 129.

Ohne Beweis wird eine graphische Bestimmung der Kolbenbeschleunigung mitgeteilt, welche Herr F. J. Vaes in der Tijdschrift van het Koninglijk Instituut van Ingenieurs 1890/91 gegeben hat. F. K.

N. Joukowsky. Ueber das Paradoxon von Dubuat. Arbeiten d. phys. Section der kais. Ges. der Freunde der Naturkunde. Moskau. IV. Hft. 1. 21-24. (Russisch.)

A. Legrand. Le traité des corps flottants d'Archimède (περὶ ὀχουμένων). Traduction nouvelle. Almeida J. (2) X. 437-457.

Nach der Einleitung über die Geschichte dieser Schrift, welche nur aus der lateinischen Uebersetzung des Wilhelm von Moerbek bekannt ist, folgt die vollständige Uebersetzung des ersten Buches und der blossen Sätze des zweiten nach dem von Hrn. J. Heiberg veröffentlichten Texte (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 8). Lp.

C. Neumann. Ein merkwürdiger Satz im Gebiete der Hydrodynamik. Leipz. Ber. XLIII. 567-570.

Abstrahirt man von der Reibung, und nimmt man an, dass eine Geschwindigkeitsfunction (nach v. Helmholtz: ein Geschwindigkeitspotential) existirt, so wird der Punkt der grössten Flüssigkeitsgeschwindigkeit niemals im Innern der Flüssigkeit, sondern stets an ihrer Oberfläche sich befinden. N.

Capitel 5.

Potentialtheorie.

L. Kronecker. Die Clausius'schen Coordinaten. Berl. Ber. 1891. 881-890.

Ist

$$\mathfrak{P}(z, \zeta) = \frac{1}{n-2}\left(\sum_h (z_h - \zeta_h)^2\right)^{-\frac{1}{2}(n-2)}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n)$$

das Elementarpotential einer n-fachen Mannigfaltigkeit, ist ferner

$$\text{(B)} \qquad \mathrm{Pot}_k = +\int \mathfrak{F}(z_1, z_2, \ldots, z_n) \frac{\partial \mathfrak{P}(z, \zeta)}{\partial \zeta_k} dv$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die Integration über das Gebiet

$$F_0(z_1, z_2, \ldots, z_n) < 0$$

auszudehnen ist, so lautet die Gleichung, welche der Poisson'schen Gleichung im dreidimensionalen Raume analog ist:

$$\text{(A)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{Pot}_k}{\partial \zeta_k} = -\varpi \mathfrak{F}(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n),$$

und zwar ist

$$\varpi = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}.$$

Der Ableitung der Gleichung (A) ist der vorliegende Aufsatz gewidmet, und dazu benutzt der Verfasser die sogenannten Clausius'schen Coordinaten t, z_1^0, z_2^0, $\ldots$, z_n^0, die mit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$\text{(C)} \qquad z_k = z_k^0 - t\,(z_k^0 - \zeta_k).$$

$z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0$ bilden dabei ein Wertsystem, das der Gleichung $F_0 = 0$ genügt, vertreten also nur die Stelle von $n-1$ Variabeln. Transformirt man das Integral (B) auf die neuen Variabeln und bildet dann die linke Seite von (A), so erhält man nach mehrfachen Reductionen einen Ausdruck, der sich von der rechten Seite von (A) dadurch unterscheidet, dass an Stelle von ϖ ein über das Gebiet $F_0 = 0$ zu erstreckendes Integral steht. Um die Gleichung (A) selbst zu erhalten, ist noch zu zeigen, dass, wenn man das Gebiet $F_0 < 0$ in zwei Teile zerlegt, deren einer den Punkt $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ enthält, der für den andern Teil gebildete Ausdruck $\sum \frac{\partial \mathrm{Pot}_k}{\partial \zeta_k}$ verschwindet, dass man daher das zuletzt erwähnte Integral nur über die Begrenzung des ersten Teiles zu erstrecken braucht. Wählt man dafür ein der Kugel analoges Gebilde, so ergiebt sich die Richtigkeit von (A). Die Gültigkeit dieser Gleichung setzt voraus, dass die Dichtigkeitsfunction $\mathfrak{F}$ im Punkte $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ nach den verschiedenen Richtungen hin stetig ist.

Bemerkt werden mag, dass die hier benutzten Coordinaten Verallgemeinerungen der Variabeln sind, deren sich Clausius bei der Ableitung der Poisson'schen Gleichung bedient. Kronecker zieht die Clausius'sche Ableitung der Gauss'schen vor, da sie geringerer Voraussetzungen bezüglich der Dichtigkeit bedarf.

Wn.

P. Appell. Sur des potentiels conjugués. S. M. F. Bull. XIX. 68-70.

Bestehen zwischen den vier Functionen T, X, Y, Z der reellen Variabeln x, y, z die Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x}-\dfrac{\partial Y}{\partial z}+\dfrac{\partial Z}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial y}-\dfrac{\partial Z}{\partial x}+\dfrac{\partial X}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial z}-\dfrac{\partial X}{\partial y}+\dfrac{\partial Y}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

so genügen diese Functionen sämtlich der Laplace'schen Differentialgleichung, d. h. es ist

$$(2)\qquad \varDelta_2 X = 0,\quad \varDelta_2 Y = 0,\quad \varDelta_2 Z = 0,\quad \varDelta_2 T = 0.$$

Wählt man ferner für T eine beliebige Lösung von $\varDelta_2 T = 0$, so kann man stets unendlich viele Functionen X, Y, Z bestimmen, die den Gleichungen (1) genügen, und zwar kann man dieselben durch bestimmte Integrale ausdrücken (die Integrale sind in dem vorliegenden Aufsatze nicht mitgeteilt).

Das System (1) bildet einen speciellen Fall eines allgemeineren Systems von vier Functionen mit vier Variabeln, das man erhält, wenn man auf den linken Seiten der Gleichungen (1) resp. die Ausdrücke $-\frac{\partial X}{\partial t}$, $-\frac{\partial Y}{\partial t}$, $-\frac{\partial Z}{\partial t}$, $+\frac{\partial T}{\partial t}$ hinzufügt. An Stelle jeder der Gleichungen (2) tritt dabei eine Gleichung der Form:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Wn.

P. MOLENBROEK. Bemerkungen zum elementaren Beweise des Green'schen Satzes. Wiedemann Ann. (2) XLIV. 784-785.

Im Anschluss an einen früheren Aufsatz (F. d. M. XXII. 1890. 881) zeigt der Verfasser, dass man mit geringer Abänderung des dort geführten Beweises auch die allgemeine Form des Green'schen Satzes ableiten kann. Wn.

S. KOWALEVSKI. Sur un théorème de M. Bruns. Acta Math. XV. 45-52.

In seiner Dissertation [Berlin 1871, cf. F. d. M. III. 1871. 497] hat Herr Bruns die Frage, ob sich die Potentialfunctionen V_a, V_i eines homogenen Körpers in Bezug auf einen äusseren oder inneren Punkt über den Bereich hinaus, für den diese Functionen ursprünglich definirt sind, fortsetzen lassen, auf die Frage nach der Existenz einer Function U zurückgeführt, die der Gleichung

$$(1)\qquad \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi k$$

genügt, die ferner an einer geschlossenen Fläche S die Bedingungen

$$U = 0,\quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

erfüllt. Herr Bruns hat gezeigt, dass eine solche Function in der That existirt, und dass sich dieselbe in der Nähe eines jeden regulären Punktes x_1, y_1, z_1 von S nach ganzen Potenzen von $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$ entwickeln lässt. Für dieses Resultat wird in der vorliegenden Arbeit ein neuer Beweis mitgeteilt. Derselbe beruht darauf, dass zur Bestimmung eines Punktes des Raumes an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z neue Veränderliche eingeführt werden, nämlich der senkrechte Abstand s des Punktes von der Fläche S und die Parameter u, v, welche die Lage eines Punktes der Fläche bestimmen. Es wird also gesetzt:

$$x = x_1 + \xi s,\quad y = y_1 + \eta s,\quad z = z_1 + \zeta s,$$

wo die Coordinaten x_1, y_1, z_1 eines Flächenpunktes sowie die Richtungscosinus ξ, η, ζ der Flächennormale in diesem Punkte gegebene Functionen von u und v sind. Das Bogenelement nimmt in den neuen Variabeln die Form an:

$$dx^2+dy^2+dz^2 = Pdu^2+Q\,dv^2+ds^2+2r\,du\,dv,$$

und die Coefficienten P, Q, r lassen sich durch die Gauss'schen Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung der Fläche S ausdrücken. Kennt man diese Coefficienten, so lässt sich nach dem Vorgange von Jacobi der Ausdruck $\varDelta U$ auf die neuen Variabeln transformiren; und die Gleichung (1) geht dadurch in folgende über:

$$(2)\qquad \Omega\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}+A_1\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+B_1\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}+a_1\frac{\partial U}{\partial u}+b_1\frac{\partial U}{\partial v}+c_1\frac{\partial U}{\partial s}$$
$$= -4\pi k\Omega^2,$$

und zwar ist

$$\Omega^2 = PQ-r^2.$$

Um die gewünschte Entwickelung von U für Punkte in der Nähe von S zu erhalten, muss man das Integral der Gleichung (2) nach steigenden Potenzen von s entwickeln, unter der Bedingung, dass für $s=0$ sowohl U als $\frac{\partial U}{\partial s}$ verschwindet. Da die Grössen A_1, B_1, a_1, b_1, c_1 ganze Functionen zweiten Grades von s sind, deren Coefficienten sich in der Umgebung jedes Wertsystems u_0, v_0 nach positiven ganzen Potenzen von $u-u_0$, $v-v_0$ entwickeln lassen, so hängt die Möglichkeit der gesuchten Entwickelung für U nur davon ab, dass der Coefficient Ω von $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$ für den Punkt der Oberfläche, in dessen Nähe die Entwickelung gelten soll, nicht verschwindet. Nun lässt sich aber Ω auf die Form bringen

$$\Omega^2 = (EG-F^2)\left(1-\frac{s}{\varrho_1}\right)^2\left(1-\frac{s}{\varrho_2}\right)^2,$$

wo E, F, G die Gauss'schen Fundamentalgrössen erster Ordnung, ϱ_1, ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien des betrachteten Flächenpunktes sind. Für einen Punkt, in dem die Flächennormale eine bestimmte Richtung hat, können ϱ_1 und ϱ_2 nicht verschwinden.

daher verschwindet auch Ω für keinen solchen Punkt. Dasselbe gilt für solche ausserhalb S liegende Punkte, für die der absolute Betrag von s eine gewisse Grenze nicht überschreitet. U kann somit auch in der Umgebung derartiger Punkte nach Potenzen von $u-u_0$, $v-v_0$, $s-s_0$ entwickelt werden. Wn.

G. A. Maggi. Aggiunta alla nota: „Sui principii della teoria della funzione potenziale". Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 232-235.

Zur Bildung der ersten Ableitungen des Potentials U eines Körpers für innere Punkte transformirt der Verfasser in bekannter Weise den Ausdruck für U auf Polarcoordinaten, deren Pol der angezogene Punkt P ist. Er bildet dann ebenso den Ausdruck $U+\Delta U$, in den U übergeht, wenn die x-Coordinate von P um Δx wächst. Vergleicht man in dem dreifachen Integrale für U und $U+\Delta U$ solche Elemente, die sich auf parallele Radien beziehen, so gelangt man durch einen strengen Grenzübergang ohne Benutzung der teilweisen Integration zu der bekannten Gleichung, die $\frac{\partial U}{\partial x}$ durch die Summen eines Oberflächen- und eines Raumintegrals ausdrückt. Wn.

G. A. Maggi. Sulla teoria della funzione potenziale di superficie I, II. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 87-98, 220-231.

G. A. Maggi. Osservazioni alla nota: „Sulla teoria della funzione potenziale di superficie". Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 960-961.

In der Arbeit wird der Satz über die Discontinuität der ersten Differentialquotienten des Flächenpotentials auf folgende neue Art abgeleitet. Ist P_0 ein Punkt der Fläche, P ein unendlich naher, auf der Normale von P_0 liegender Punkt; wird ferner das Flächenelement durch seine Projection auf die Tangentialebene von P_0 ersetzt; sind endlich ϱ, ϑ Polarcoordinaten in dieser Ebene, r die Entfernung eines Flächenpunktes von P,

so wird der Ausdruck für das Potential U eines gewissen, den Punkt P_0 umschliessenden Flächenteils in Bezug auf P folgendermassen zerlegt:

$$U = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\varrho} \frac{k}{\cos\varphi} \frac{\varrho}{r} d\varrho = k_0 Y + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\varrho} \left(\frac{k}{\cos\varphi} - k_0\right) \frac{\varrho}{r} d\varrho.$$

Darin bezeichnet k_0 die Dichtigkeit der Flächenbelegung im Punkte P_0, und es ist

$$Y = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\varrho} \frac{\varrho}{r} d\varrho.$$

Ist nun n die Entfernung der Punkte P und P_0, ist ferner p das von einem Flächenpunkte auf die Tangentialebene von P_0 gefällte Lot, so ist

$$r^2 = \varrho^2 + (n+p)^2.$$

Bei gewissen, allgemein zulässigen Annahmen über den Umfang des betrachteten Flächenstücks lässt sich dann $\frac{1}{r}$ nach dem binomischen Satze in eine nach steigenden Potenzen von $\frac{p(2n+p)}{\varrho^2+n^2}$ fortschreitende, gleichmässig convergirende Reihe entwickeln. Daraus ergiebt sich eine Reihe für Y. In dem ersten Gliede derselben kann man die Integration nach ϱ ausführen und dann

$$\frac{Y - Y_0}{n}$$

bilden, wo Y_0 den Wert von Y in P_0 bezeichnet. Durch Uebergang zur Grenze 0 erhält man

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial n}\right)_0 = \mp 2\pi - N_0,$$

wo N_0 eine gewisse convergente Reihe bezeichnet. Damit hat man die Discontinuität der Hülfsgrösse Y, und aus dieser folgt leicht auch die von $\frac{\partial U}{\partial n}$.

Auch die Formel, welche $\frac{\partial U}{\partial n}$ als Summe eines Linien- und eines Flächenintegrals darstellt, ergiebt sich ohne teilweise Integration durch strenge Grenzbetrachtungen. Wn.

Ph. Gilbert. Sur le potentiel d'une couche superficielle sans épaisseur. Brux. S. sc. XV A. 11-12.

Fall scheinbarer Unbestimmtheit. Mn.

J. Brill. Note on the application of quaternions to the discussion of Laplace's equation. Cambr. Proc. VII. 120-125. (1890.)

J. Brill. On quaternion functions, with especial reference to the discussion of Laplace's equation. Cambr. Proc. VII. 151-156. (1891.)

In der ersten Note wird als Verallgemeinerung einer Function w einer complexen Veränderlichen z eine Quaternion

$$r = -\delta + i\alpha + j\beta + k\gamma$$

betrachtet, welche die Bedingung

$$\nabla r = -\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) + i\left(-\frac{\partial\delta}{\partial x} + \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right)$$
$$+ j\left(-\frac{\partial\delta}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + k\left(-\frac{\partial\delta}{\partial z} + \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) = 0$$

erfüllt, so dass die Functionen α, β, γ der Veränderlichen x, y, z der Laplace'schen Gleichung genügen. In der zweiten Note werden

$$u = y + kx, \quad v = z - jx$$

als Fundamentallösungen der Gleichung $\nabla r = 0$ gewählt, und es ergiebt sich als Lösung jener Gleichung (an Stelle einer Potenzreihe einer complexen Variable) eine Reihe von der Form

$$r = A + uB + vC + \frac{1}{2!}\{u^2D + (uv + vu)E + v^2F\}$$
$$+ \frac{1}{3!}\{u^3G + (u^2v + uvu + vu^2)H + (uv^2 + vuv + v^2u)K + v^3L\} + \cdots,$$

worin die Coefficienten A, B, C, ... Quaternionen sind.

Ho.

M. Bôcher. Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Gekrönte Preisschrift und Dissertation. Göttingen. Dieterich'sche Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner). IV + 66 S. 4°.

Die vorliegende Schrift ist eine Bearbeitung der folgenden, von der philosophischen Facultät in Göttingen gestellten Preisaufgabe: „Man kann die Mehrzahl der in der Potentialtheorie auftretenden Reihenentwickelungen und Integraldarstellungen unter einheitlichem Gesichtspunkte ableiten, indem man die sämtlichen bei dieser Darstellung in Betracht kommenden Orthogonalsysteme als Ausartungen des Systems confocaler Cykliden betrachtet und unter Zugrundelegung des letzteren zunächst für einen von sechs confocalen Cykliden begrenzten Körper geeignete Reihenentwickelungen aufstellt. Die Facultät wünscht, dass der hiermit bezeichnete Gedanke ins Einzelne durchgeführt, auch von der ganzen Theorie eine zusammenhängende Darstellung gegeben werde."

Die Grundlage der Darstellung, der eine kurze Uebersicht über die wichtigsten die „Randwertaufgabe der Potentialtheorie" (so wird das fragliche Problem kurz bezeichnet) betreffenden Arbeiten vorausgeschickt ist, bildet die Theorie der Cykliden. Dieser Theorie ist demgemäss das erste der drei Capitel der Arbeit gewidmet. Der Verfasser beschränkt sich hier im wesentlichen auf die Zusammenstellung bekannter Resultate, ohne auf Beweise oder Erläuterungen über die Gestalt der Flächen einzugehen. Nachdem die Cykliden als diejenigen Flächen definirt sind, welche sich durch eine Gleichung zweiten Grades zwischen pentasphärischen Coordinaten darstellen lassen, ergiebt sich eine Einteilung derselben in 26 Arten aus der Weierstrass'schen Theorie der Elementarteiler. Es folgt eine Betrachtung der Realitätsverhältnisse, sowie der Ausartungen derselben; die reellen Systeme confocaler Cykliden werden aufgezählt. Das Capitel schliesst mit einer Betrachtung der cyklidischen Coordinaten und ihrer Ausartungen.

Das zweite Capitel enthält allgemeine Erläuterungen über die Lamé'sche Gleichung und deren Auftreten in der Potential-

theorie auf Grund der vorher besprochenen krummlinigen Coordinatensysteme. An Stelle der von Lamé selbst in die Analysis eingeführten Differentialgleichung, die drei singuläre Punkte besitzt, wird eine allgemeinere betrachtet; und es wird mit dem Namen „Lamé'sche Gleichung" eine überall reguläre homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten bezeichnet, deren im Endlichen gelegene singuläre Punkte $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sämtlich die Exponenten 0 und $\frac{1}{2}$ besitzen, und die im Unendlichen nur einen uneigentlich singulären Punkt aufweist. Jede Lösung einer Lamé'schen Gleichung wird eine Lamé'sche Function genannt. Aus dieser Definition ergiebt sich die Form der Differentialgleichung, die mit der von Herrn Klein untersuchten (cf. F. d. M. XXII. 1890. 516) übereinstimmt. Es wird darauf hingewiesen, dass man nach Herrn Klein's Vorgang die Singularität im Unendlichen durch Einführung homogener Variabeln fortschaffen kann. Doch ist das für das Folgende unnötig, da man es bei den Anwendungen stets so einrichten kann, dass unendlich grosse Werte der unabhängigen Variabeln nicht in Betracht kommen. Der Zusammenhang der obigen Definition mit der von Heine wird erläutert, auf Specialfälle und Ausartungen der allgemeinen Lamé'schen Functionen kurz hingewiesen.

Für die Anwendungen auf die zu behandelnde Potentialaufgabe kommt nur der Specialfall $n = 5$ in Betracht; denn auf diesen führt die Zerlegung der auf cyklidische Coordinaten transformirten Gleichung $\Delta V = 0$. Nach den Untersuchungen des Referenten (J. für Math. LXXXII) und des Herrn Darboux (C. R. LXXXIII) [s. auch F. d. M. VIII. 1876. 623, 624] ist eine Particularlösung jener Gleichung

$$V = N^{\frac{1}{2}}\psi(\mu, \nu, \varrho,) = N^{\frac{1}{2}}E_1(\mu)E_2(\nu)E_3(\varrho),$$

wo N eine vollständig bekannte Function der cyklidischen Coordinaten μ, ν, ϱ, die E Lamé'sche Functionen sind. Eine solche Particularlösung wird als Potentialfunction, die Function $\psi = E_1E_2E_3$ als Lamé'sches Product bezeichnet. E_1, E_2, E_3 sind Particularlösungen einer und derselben Lamé'schen Gleichung $n = 5$, welche die Punkte $e_1, \ldots, e_5$ als einfache singuläre

Punkte besitzt, und die ausserdem zwei accessorische, keiner Beschränkung unterworfene Parameter enthält. Es fragt sich nun, welche besonderen Fälle in der allgemeinen Lösung enthalten sind. Die verschiedenen neben der allgemeinen Cyklidenschar in Betracht kommenden Flächenscharen entstehen aus ersterer dadurch, dass zwei oder mehrere der singulären Punkte $e_1, \dots, e_5$ zusammenfallen. Zu untersuchen ist also, welche Modificationen besonderer Art dadurch entstehen. Zunächst ergiebt sich, dass, wenn e_1 eine mehrfache Wurzel ist, welche sich auf drei verschiedene Elementarteiler verteilt, die zugehörige Lamé'sche Function $E(\lambda)$ in das Product einer Function $n = 4$ und eines Factors $(\lambda - e_1)^{-\frac{1}{4}}$ zerfällt. Die Lamé'sche Gleichung $n = 4$ aber lässt sich durch trigonometrische Functionen lösen. Neben diesem Specialfall existiren sechs Arten Lamé'scher Functionen: 1) allgemeine Lamé'sche Functionen $n = 5$, 2) Functionen der dreiaxigen Flächen zweiten Grades, 3) Kugelfunctionen eines Arguments, deren Index aber unbeschränkt ist, 4) Functionen der zweiaxigen Cylinder zweiten Grades, 5) Functionen des Rotationscylinders (Bessel'sche Functionen), 6) Functionen des parabolischen Cylinders. Uebrigens kann dieselbe Art Lamé'scher Functionen bei sehr verschiedenen Flächensystemen auftreten. So kommen die Functionen der dreiaxigen Flächen zweiten Grades nicht nur bei dem allgemeinen System der confocalen Flächen zweiten Grades vor, sondern auch bei confocalen Kegeln zweiten Grades und bei allen Rotationscykliden. Ebenso treten die Kugelfunctionen auch beim Rotationskegel (Kegelfunctionen) und beim Kreisring (Ringfunctionen) auf etc. Diese Thatsachen, die, einzeln genommen, schon alle bekannt waren, finden durch die Darlegungen des Verfassers eine höchst anschauliche gemeinsame Erklärung.

Das dritte Capitel ist der Erledigung der Randwertaufgabe gewidmet. Die Lösung derselben beruht auf dem sogenannten Oscillationstheorem, das für Kugelfunctionen von Thomson und Tait gefunden, von Herrn Klein aber (Math. Ann. XVIII, F. d. M. XIII. 1881. 460) zuerst klar formulirt und auf die Lamé'schen Functionen ausgedehnt ist. Eine Untersuchung der Lamé'schen

Curve $y = E(x)$ und ihrer Oscillationen in den einzelnen Segmenten der x-Axe führt zu folgendem Satze (Oscillationstheorem): „Die accessorischen Parameter a und b einer Lamé'schen Gleichung $n = 5$ können stets und nur auf eine Weise so bestimmt werden, dass eine erste Particularlösung existirt, welche in einem ersten beliebigen Segmente $m_1 m_2$ eines Intervalls der reellen x-Axe genau m Halboscillationen ausführt, und dass gleichzeitig eine andere Particularlösung existirt, welche in einem beliebigen Segmente $n_1 n_2$ eines andern Intervalls genau n Halboscillationen ausführt." Die Anwendung dieses Theorems ist folgende: Das allgemeine Cyklidensechsflach wird durch ein Schema charakterisirt, welches aus drei Segmenten $m_1 m_2$, $n_1 n_2$, $r_1 r_2$ besteht, die bezw. in den Intervallen μ, ν, ϱ der reellen λ-Axe liegen, aber diese Intervalle oder Teile derselben beliebig oft überdecken können. Nun kann man drei Particularlösungen $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, $E_3(\lambda)$ der Lamé'schen Gleichung so auswählen, dass sie in den Punkten m_1, n_1, r_1 der λ-Axe verschwinden; dann aber kann man mittels des Oscillationstheorems die accessorischen Parameter so bestimmen, dass die Zweige E_1 resp. E_2 in den Segmenten $m_1 m_2$ resp. $n_1 n_2$ genau m resp. n Halboscillationen ausführen. Bei dieser Bestimmung verschwindet das Product $E_1(\mu) E_2(\nu) E_3(\varrho)$ auf den fünf Seitenflächen $\mu = m_1$, $\mu = m_2$; $\nu = n_1$, $\nu = n_2$; $\varrho = r_1$ des Sechsflachs. Indem man nun den Oscillationszahlen m, n der Reihe nach alle ganzzahligen positiven Werte beilegt, erhält man die sämtlichen Lamé'schen Producte, welche auf den fünf genannten Seitenflächen verschwinden. Addirt man alle, nachdem man sie mit willkürlichen Constanten multiplicirt hat, so bleibt noch die Aufgabe zu lösen, diese Constanten so zu bestimmen, dass die Doppelsumme auf der Fläche $\varrho = r_2$ eine gegebene Function von μ, ν ist. Die Bedeutung dieses Verfahrens liegt darin, dass man aus allen möglichen Potentialen $N^{\frac{1}{2}} E_1(\mu) E_2(\nu) E_3(\varrho)$, deren Zahl ∞^5 ist, ∞^2, welche eine discrete oder eventuell eine continuirliche Reihenfolge bilden, derart auswählen kann, dass die Doppelsumme, ev. das Doppelintegral, welche man aus diesen ∞^2 Producten nach Hinzufügung geeigneter Coefficienten zusammensetzen kann, die Randwertaufgabe

für einen durchaus rechtwinkligen Körper löst, welcher von irgend sechs Flächen des Coordinatensystems begrenzt ist.

Die Bestimmung der willkürlichen Constanten ist stets möglich. Doch fehlt für die wirkliche Anwendung noch Folgendes: 1) fehlt noch eine übersichtliche und brauchbare Darstellung der Fundamentallösungen der Lamé'schen Gleichung; 2) bleibt noch die Aufgabe zu lösen, die accessorischen Parameter a und b der Lamé'schen Functionen aus den jeweils vorgeschriebenen Oscillationseigenschaften wirklich zu berechnen; 3) ist noch zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die erhaltene Reihe convergirt. Immerhin ist die Aufgabe formal gelöst.

Zum Schluss bespricht der Verfasser ziemlich kurz, wie man durch die Ausartungen des Cyklidensechsflachs aus der allgemeinen Lösung die Lösung für die meisten Körper erhält, bei denen bis jetzt die Potentialaufgabe durch Reihenentwickelung erledigt ist. Wenn das Oscillationstheorem versagt, muss man seine Zuflucht zu unendlich grossen Zahlen von Oscillationen nehmen, wodurch man auf Integraldarstellungen gelangt.

Wn.

F. W. Dyson. The potentials of ellipsoids of variable densities. Quart. J. XXV. 259-288.

Der Verfasser betrachtet zunächst das Potential einer unendlich dünnen ellipsoidischen Schale für Punkte des inneren hohlen Raumes unter der Annahme, dass die Dichtigkeit der Schale an der Stelle x, y, z (d. h. die über dem Flächenelement der Grenzfläche liegende Masse) $= k\,p\,H_i(x, y, z)$ ist, wo p das vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene des Punktes x, y, z gefällte Lot, H_i eine ganze homogene Function vom Grade i, k eine Constante bezeichnet. Führt man Polarcoordinaten ein, deren Anfangspunkt der Mittelpunkt der Schale ist, entwickelt die reciproke Entfernung eines Punktes der Masse von dem angezogenen Punkte in bekannter Weise wie bei einer Kugelschale, und benutzt bekannte Eigenschaften der Kugelfunctionen, so reducirt sich die Aufgabe, das Potential der Schale für in-

nere Punkte zu finden, auf die Ermittelung einer endlichen Zahl von Doppelintegralen von der Form

$$\iint \frac{l^{2p} m^{2q} n^{2r}}{\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)^{k+1}}\, d\omega.$$

Darin sind l, m, n die Richtungscosinus eines beliebigen vom Mittelpunkte ausgehenden Radius, $d\omega$ ist das Flächenelement einer Kugel vom Radius 1, a, b, c sind die Halbaxen der inneren Grenzfläche der Schale, p, q, r, k ganze Zahlen. Die Integration ist über die ganze Kugelfläche zu erstrecken. Die benutzte Entwickelung setzt zunächst voraus, dass der angezogene Punkt dem Mittelpunkte näher liegt, als der Endpunkt der kleinsten Axe. Das unter dieser Voraussetzung gewonnene Resultat aber gilt ohne weiteres für alle inneren Punkte. Das obige Doppelintegral nun lässt sich durch eine bekannte, von Jacobi herrührende Transformation und durch Differentiiren nach einem Parameter aus dem bekannten Integral

$$\iint \frac{d\omega}{\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}} = 2\pi abc \int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{(a^2+\psi)(b^2+\psi)(c^2+\psi)}}$$

ableiten.

Durch diese Methode gelingt es dem Verfasser, in einfachen Fällen das Potential der unendlich dünnen ellipsoidischen Schale durch ein einfaches Integral auszudrücken. Es sind dies die (zum Teil schon bekannten) Fälle

$$H = x,\quad H = x^2,\quad H = yz,\quad H = x^3,\quad H = x^2y,\quad H = xyz,$$
$$H = x^4,\quad H = x^3y,\quad H = x^2yz,\quad H = x^2y^2.$$

Für diese Fälle ergiebt sich zugleich das Potential der Schale in Bezug auf einen äusseren Punkt durch das Ivory'sche Verfahren. Letzteres Potential unterscheidet sich von dem für innere Punkte ebenso, wie sich beim Potential homogener Ellipsoide das Resultat für einen äusseren von dem für einen inneren Punkt unterscheidet.

Für den Fall $H = \left(\frac{x}{a}\right)^n$ führt obige Methode der directen Berechnung nicht mehr zum Ziele. Wenigstens gelingt es dem

Verf. hier nur, das Resultat, dessen Form er aus dem Resultat der einfacheren Fälle erraten hat, mittels der Dirichlet'schen charakteristischen Bedingungen zu verificiren. Auch für den noch allgemeineren Fall

$$H = f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$$

wird das Resultat nicht abgeleitet, sondern nur verificirt. Dies Resultat lautet: das Potential der unendlich dünnen Schale, deren Dichtigkeit $p.f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$ ist, in Bezug auf einen inneren Punkt ist:

$$V_i = 2\pi abc \int_0^\infty \left[1 + \frac{\psi P}{2^2}\delta + \frac{\psi^2 P^2}{2^2.4^2}\delta^2 + \cdots\right] \times f\left(\frac{ax}{a^2+\psi}, \frac{by}{b^2+\psi}, \frac{cz}{c^2+\psi}\right)\frac{d\psi}{\sqrt{R}};$$

für den äusseren Punkt tritt an die Stelle der unteren Grenze 0 der Parameter ε des durch den angezogenen Punkt gelegten confocalen Ellipsoids. Die in der vorstehenden Formel vorkommenden Buchstaben haben folgende Bedeutung:

$$P = 1 - \frac{x^2}{a^2+\psi} - \frac{y^2}{b^2+\psi} - \frac{z^2}{c^2+\psi},$$

$$R = (a^2+\psi)(b^2+\psi)(c^2+\psi),$$

und δ ist eine symbolische Bezeichnung für die Operation:

$$\delta.\varphi = \frac{a^2+\psi}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{b^2+\psi}{b^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{c^2+\psi}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Für das Potential eines vollen Ellipsoids, dessen Dichtigkeit

$$\varrho = \frac{\lambda}{\pi abc}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\lambda-1} f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$$

ist ($\lambda > 0$), findet der Verfasser unter Benutzung derselben Bezeichnung

$$V_i = \int_0^\infty P^\lambda \left[1 + \frac{\psi P}{2^2.1.(1+\lambda)}\delta + \frac{\psi^2 P^2}{2^4.1.2.(1+\lambda)(2+\lambda)}\delta^2 + \cdots\right] \times f\left(\frac{ax}{a^2+\psi}, \frac{by}{b^2+\psi}, \frac{cz}{c^2+\psi}\right)\frac{d\psi}{\sqrt{R}},$$

ein Resultat, das ebenfalls verificirt wird. Dasselbe wird auf mehrere specielle Fälle angewandt, und dann daraus durch den bekannten Grenzübergang das Potential einer elliptischen Scheibe mit der Dichtigkeit

$$\sigma = \frac{\lambda}{\pi ab}\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$$

abgeleitet. Der Ausdruck für dasselbe unterscheidet sich von dem letzten Ausdruck für V_0 nur dadurch, dass in P und R $c = 0$ zu setzen ist, dass ferner z in f nicht vorkommt, dass endlich in der Operation δ das letzte Glied fortfällt. Durch nochmaligen Grenzübergang ergiebt sich endlich das Potential einer begrenzten geraden Linie bei einer gewissen nicht homogenen Massenverteilung. Wn.

O. Dziobek. Die zweiten Differentialquotienten des Potentials der Schwere und die Möglichkeit ihrer experimentellen Bestimmung. Berl. Phys. Ges. Verh. X. 27-33.

Das Potential der Schwere hat bei Vernachlässigung der Glieder höheren Grades die Form

$$V = C - gz + \tfrac{1}{2}(g_{11}x^2 + g_{22}y^2 + g_{33}z^2 + 2g_{12}xy + 2g_{13}xz + 2g_{23}yz),$$

falls die positive z-Axe senkrecht nach oben gerichtet ist. Von den Coefficienten dieses Ausdrucks kann man durch Beobachtungen über die Veränderung der Grösse der Schwere nur die drei: g_{13}, g_{23}, g_{33} bestimmen. Zur Ermittelung der übrigen Coefficienten betrachtet der Verfasser das Kräftepaar, das durch die Zusammensetzung der Kräfte entsteht, welche bei Annahme des obigen Potentialwertes auf die verschiedenen Punkte eines um seinen Schwerpunkt drehbaren Körpers wirken, und discutirt insbesondere die Wirkung der Componente des Kräftepaares, dessen Axe lotrecht ist. In Folge dieses Kräftepaares müsste bei einer Drehwage der an einem Faden hängende Hebel, auch wenn auf ihn nur die Schwere wirkt, eine Gleichgewichtslage haben, bei welcher der Faden bereits gedreht ist. Ferner müsste man, wenn man den ganzen Apparat auf eine Drehscheibe setzt und diese dreht, mehrere solche Gleichgewichtslagen erhalten,

da bei letzterer Drehung das Kräftepaar sich ändert. Durch Beobachtung verschiedener der erwähnten Gleichgewichtslagen würde man genügende Daten erhalten, um die unbekannten Coefficienten von V zu bestimmen. Leider scheint die Anwendung dieser sinnreichen Methode an den der Drehwage anhaftenden Fehlerquellen zu scheitern. Wn.

O. Geschoeser. Ueber die Anziehung von Massen, die gleichförmig über gerade Linien oder ebene Flächen verteilt sind. Pr. Gymn. Oels. 27 S. 4°, auch Diss. Rostock.

Aus dem von Schellbach gestellten Thema zur Oberlehrerprüfung entstanden: „Es sind zwei mit Atomen gleichförmig besetzte Strecken AB und A_1B_1 gegeben; es soll die Grösse der Anziehung berechnet werden, welche die beiden Strecken auf einander ausüben, wenn das Newton'sche Gesetz zu Grunde gelegt wird.“ Die Lösung wird nur für den Fall berechnet, dass AB und A_1B_1 derselben Ebene angehören. Die übrigen behandelten Beispiele sind in den Aufgabensammlungen von Jullien, Schlömilch etc. oder in den Lehrbüchern der Mechanik von Schell, Thomson und Tait u. s. w. enthalten. Lp.

F. H. Bigelow. The solar corona, an instance of the Newtonian potential function in the case of repulsion. Silliman Journ. (3) XLII. 1-11.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Capitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

V. v. Lang. Einleitung in die theoretische Physik. 2. Auflage. Braunschweig. F. Vieweg u. Sohn. XI + 983 S. 8°.

Die neue Auflage des alle Teile der theoretischen Physik umfassenden Lehrbuches hat nahezu den doppelten Umfang der ersten Auflage, über die F. d. M. II. 1869-1870. 779, V. 1873. 509 berichtet ist. Fast alle Abschnitte sind völlig umgearbeitet, und in einigen derselben hat auch der Stoff eine erhebliche Erweiterung erfahren. Hinsichtlich der Darstellung weicht die zweite Auflage von der ersten insofern wesentlich ab, als bei der früheren Bearbeitung nur die Kenntnis der Elementarmathematik vorausgesetzt wurde, während bei der Neubearbeitung von vorne herein die Methoden der Differentialrechnung angewandt werden. Doch wird für die benutzten mathematischen Sätze stets eine Andeutung des Beweises gegeben, so dass das Buch auch für solche, die nur die Grundbegriffe der höheren Analysis kennen, verständlich ist.

Der erste Abschnitt behandelt auf nahezu 100 Seiten die Mechanik des Punktes und des starren Körpers; der zweite ist der Schwere und der allgemeinen Gravitation gewidmet. Die

Neubearbeitung geht hier, was in der ersten Auflage fehlte, auch auf die allgemeinen Lehrsätze über die Kräfte, die nach dem verkehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirken, ein. Die beiden folgenden Abschnitte enthalten die Theorie des Magnetismus und der Elektricität. Neu sind hier folgende Capitel: Magnetische Induction, stationäre Strömung der Elektricität in körperlichen und flächenförmigen Leitern, Bewegung der Elektricität in linearen Leitern, allgemeine Gleichungen des elektromagnetischen Feldes (in letzterem Capitel sind auch die Hertz'schen Entdeckungen kurz berührt).

Es folgen die Abschnitte: feste Körper (Symmetrieverhältnisse der Krystalle, Elasticität, periodische Bewegungen, Stoss), Flüssigkeiten (Hydrostatik, Hydrodynamik, Oberflächenspannung), Gase (Aerostatik, Aerodynamik, kinetische Gastheorie). Die beiden letzten Abschnitte endlich behandeln die Optik (theoretische und geometrische) sowie die Wärme (Wärmeleitung, die in der ersten Auflage fehlte, und mechanische Wärmetheorie).

Das Buch kann als für eine erste Einführung in die theoretische Physik recht geeignet bezeichnet werden. Einzelne Disciplinen, wie die Optik, ferner die Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus, sind so ausführlich behandelt, dass die betreffenden Abschnitte kürzere Lehrbücher ersetzen können. Zahlreiche Hinweise auf ausführlichere Lehrbücher sowie auf Originalarbeiten erhöhen die Brauchbarkeit des Buches; an einzelnen Stellen, z. B. in der Optik, hätten die früheren Litteraturnachweise wohl einer Ergänzung bedurft. Wn.

J. Pionchon. Introduction à l'étude des systèmes de mesures usités en physique. Bordeaux Mém. (4) II. 1-252.

Wie schon aus dem Titel hervorgeht, ist die Arbeit eine Einführung in das absolute Masssystem und die damit zusammenhängenden Fragen, berechnet auf einen des Gegenstandes noch nicht kundigen Leser. Der Stoff ist deshalb sehr gründlich, von den einfachsten geometrischen Betrachtungen ausgehend, bis zu den verschiedenen elektrischen Masssystemen

behandelt. Ueberall werden nur die Masszahlen der Grössen in die Gleichungen eingeführt, wodurch der Begriff der Dimension ganz klar herausgearbeitet wird. Das Gramm behandelt der Verfasser durchgängig als Einheit der Kraft. Eine Anzahl von Noten und ein Litteraturverzeichnis sind beigegeben. Das Buch ist als Lehrbuch gedacht, wegen seiner übersichtlichen Anordnung und Gründlichkeit aber auch als Nachschlagebuch zu benutzen, wenn man sich z. B. über die Grundlagen der verschiedenen, bisher vorgeschlagenen elektrischen Masssysteme Rat holen will. Eine Einführung in die Praxis physikalischer Messungen soll folgen. Br.

C. A. Porges. Ueber die wichtigsten internationalen Mass-Einheiten. Mitt. üb. Art. u. Genie. XXII. 489-540.

Darstellung des Gegenstandes „in einer solchen Weise, wie sie dem Praktiker vielleicht nicht unwillkommen sein dürfte“.

Lp.

W. Peddie. On the use of dimensional equations in physics. Edinb. M. S. Proc. IX. 30-36.

Aufstellung der Bedeutung und Erläuterungen für den Gebrauch der dimensionalen Gleichungen. Die Erläuterungen sind gut gewählt und sehr belehrend. Gbs. (Lp.)

J. D. Everett. Illustrations of the *C. G. S.* system of units, with tables of physical constants. London. Macmillan and Co. [Nature XLIV. 489-490].

L. Clark. A dictionary of metric and other useful measures. London. E. and F. N. Spon. [Nature XLIII. 487].

M. Wille. Das metrische Masssystem und die neuen deutschen Urmasse. Zeitschr. deutsch. Ing. XXXV. 405-409, 435-440.

J. H. Gore. The decimal systems of measures of the seventeenth century. Silliman Journ. (3) XLI. 22-28.

Th. Schwartze. Ueber die physikalische Bedeutung der Dimensionsformeln der elektrischen Grössen. Exner Rep. XXVII. 234-236.

W. Peddie. A manual of physics. London. Baillière, Tindal and Co.

Anzeige in Nature XLVI. 52-54. Gbs.

O. J. Lodge. Opening address. Nature XLIV. 382-387.

A. Fick. Die stetige Raumerfüllung durch Masse. Würzburg. Phys.-med. Ges. XXV. 14 S.

Der Verfasser hält die Annahme einer stetigen Raumerfüllung durch Masse für logisch unmöglich und stellt seinerseits die Ansicht auf: „Die ganze Masse der Welt ist geteilt in Mengen von endlichem Betrage, deren jede in jedem Augenblicke sich in einem bestimmten mathematischen Punkte ohne Ausdehnung befindet. Dieser Satz schliesst ohne weiteres den zweiten in sich, dass die Aufeinanderwirkung der Massen, d. h. die Veränderung ihrer Geschwindigkeiten mit der Aenderung ihrer gegenseitigen Entfernungen nach bestimmten Gesetzen, durchaus nur Wirkung in die Ferne ist. Er schliesst ferner die Behauptung in sich, dass der stetige Raum selbst von Masse völlig leer zu denken ist.“ Ueber die Art und Weise, wie der Verfasser die erste Annahme bekämpft und seine Ansicht stützt, lässt sich im Auszuge nicht wohl berichten. Br.

W. Sutherland. A kinetic theory of solids, with an experimental introduction. Phil. Mag. (5) XXXII. 31-43, 215-225, 524-553.

Die in diesen Abhandlungen beschriebenen Forschungen hatten ihren Ursprung in einer Experimentaluntersuchung, die einen zweifachen Zweck verfolgte, nämlich sich zu vergewissern, ob es ein allgemeines Gesetz giebt, das die elastischen Eigenschaften der Metalle mit der Temperatur verknüpft, wie dies bei Gasen geschieht, und es, wenn möglich, zu entdecken; ferner,

falls dies fehl schlüge, Versuchsmittel zu erlangen zur Auffindung der Werte der elastischen Constanten der Metalle bei dem absoluten Nullpunkte. Das erste erreichte Resultat war, dass das Gesetz der Aenderung der Starrheit (rigidity) der Metalle mit der Temperatur für alle das nämliche ist. Wenn n die Starrheit bei der absoluten Temperatur Θ und N bei dem absoluten Nullpunkte ist, während T den Schmelzpunkt bedeutet, so ist $n/N = 1-(\Theta/T)^2$. Demnächst zeigte es sich, dass das Gesetz der Aenderung des Young'schen Elasticitätsmoduls mit der Temperatur für alle Metalle nahezu dasselbe ist. Die empirische Gleichung $q/Q = 1-0{,}823\Theta/T$, in der Q der Modul bei dem absoluten Nullpunkt ist, stellt mit bemerkenswerter Genauigkeit die Versuchsergebnisse dar. Diese Ergebnisse erheben sich nach des Verfs. Meinung zu der Stufe eines experimentellen Beweises dafür, dass die Starrheit (und allgemein die Elasticität) wesentlich eine kinetische Erscheinung ist, und sie führen zur kinetischen Theorie der festen Körper, dem Gegenstande der Erwägung in der Abhandlung. Die experimentelle Einleitung beschäftigt sich mit der Starrheit und dem Young'schen Modulus. Zuerst wird ein Bericht über die Versuche des Verfs. zur Wirkung der Temperatur auf die Elasticität gegeben; zweitens werden alle brauchbaren Daten über denselben Gegenstand zusammengetragen; drittens ebenso alle brauchbaren Daten in Betreff der absoluten Werte der Starrheit und des Young'schen Moduls bei ungefähr 15° C; viertens wird das allgemeine Gesetz, welches diese elastischen Constanten mit der Temperatur verknüpft, aufgestellt, und es werden ihre Werte bei dem absoluten Nullpunkte bestimmt. Der theoretische Teil der Abhandlung behandelt seinen Gegenstand in der folgenden Ordnung: 1. Aufstellung der charakteristischen Gleichungen fester Körper. 2. Prüfung der Gleichungen unter der Annahme, dass die Molekeln unveränderlich sind. 3. Prüfung der Gleichungen unter der Voraussetzung, dass die Molekeln sich etwas bei einem Temperaturwechsel ändern. 4. Weiterer augenscheinlicher Grund für die Aenderung mit dem Temperaturwechsel. 5. Schwingungsperioden der Metallmolekeln. 6. Vergleichung des theoretischen Wandels des

Young'schen Modulus gemäss der Temperatur mit der experimentellen Abwandlung. 7. Die Starrheit nach der kinetischen Theorie. 8. Verhältnis der seitlichen Zusammenziehung zur Dehnung im Young'schen Versuche. 9. Das Gesetz von Dulong und Petit, von Joule und Kopp, und die Gleichung für zusammengesetzte feste Körper. 10. Der Parameter der molecularen Kraft. Gbs. (Lp.)

Robert Geigel. Gedanken über Molecularattraction. Sitzber. d. Würzb. Physik-med. Ges. Sep. 5 S. (20. Juni 1891).

Ein Versuch, die Molecularkräfte, insbesondere die Entstehung einer „elastischen" Molekel aus starren unelastischen Atomen zu erklären. Hierzu wird angenommen, dass, wenn zwischen zwei sehr nahe an einander befindlichen Atomen und ebenso ausserhalb derselben noch kleinere (ebenfalls starre und unelastische) Körperchen in fortwährender Bewegung sind, sodass sie von innen und aussen an die Atome anstossen, bald die innere, bald die äussere Wirkung überwiegt, je nach dem Abstand der Atome, und dass so, ohne Annahme innewohnender Kräfte, bald Abstossung bald Anziehung resultirt, während für gewisse Entfernungen Gleichgewicht besteht. Lp.

Th. Schwedoff. Sur la distribution dans l'espace de l'énergie d'une masse en mouvement. Almeida J. (2) X. 493-508.

Der Verf. behandelt die folgende Frage: Die Gesetze der Verteilung der Energie im Raume sind wohl bekannt, wenn die active Masse in Ruhe verharrt. Was wird aber aus diesen Gesetzen bei einer Bewegung dieser Masse? Was wird aus den Wellenoberflächen und äquipotentiellen Oberflächen, den Strahlen und Kraftlinien, dem Potential und der Kraft, wenn die Translationsgeschwindigkeit des activen Centrums mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Action im Raume vergleichbar wird? Die Untersuchung wird an dem Beispiele einer elektrischen, positiven oder negativen Masse e durchgeführt, von der als

Princip angenommen wird, dass die elektrostatische Wirkung sich im Raume mit einer endlichen Geschwindigkeit c fortpflanzt.

Lp.

Max Möller. Ueber ruhende und strömende Energie. Drei Hauptsätze der Dynamik. Deutsche Bauztg. XXV. 453-456, 458-459.

Die drei Sätze lauten wörtlich:

„Der statische Druck, welchen eine Masse auf die Flächen-Einheit der Umschliessung ausübt, ist der in der Raum-Einheit angehäuften Energie proportional.“

„Der in einem eingeschlossenen Raume vorhandene Druck ist gleich der Summe aus dem statischen Druck, vermehrt um den Druck stehender Wellen.“

„Im Aether nimmt das Potential der Elektricität und in der Luft das Potential des Schalles bei der freien Ausbreitung der Wellen nach dem Mass der Kraftausbreitung ab“.

Weder die Sätze noch ihre Begründung hat Referent vollständig verstanden. F. K.

K. Pearson. Ether squirts. American J. XIII. 309-362.

In drei früheren Abhandlungen [Cambr. Phil. Trans. XIV. 71ff.; Lond. M. S. Proc. XX. 38ff. und ebenda 297ff.] hat der Verfasser eine Moleculartheorie entwickelt, nach welcher die Atome (als letzte Erfahrungsobjecte) Kugeln seien, die in einer vollkommenen Flüssigkeit pulsiren, und gezeigt, dass diese Hypothese die Thatsachen der chemischen Verwandtschaft, Cohäsion, Spectral-Analyse, optische, elektrische und magnetische Phänomene zu erklären im Stande sei und zu einer allgemeineren Elasticitätstheorie führe. Die vorliegende Arbeit verfolgt den Zweck, zu beweisen, dass man zu denselben Ergebnissen gelangt, wenn man Atome als „Ether Squirts“ in einem vollkommen flüssigen Aether annimmt. Der Aether ist dabei in beständigem inneren Flusse gedacht, und die Ether Squirts sind als die Emanations- und Resorptionspunkte der Strömungen aufgefasst. Diese

Auffassung macht natürlich eine Umprägung der einfachsten mechanischen Grundbegriffe notwendig. Masse ist z. B. die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in einem squirt. Das Gravitationsgesetz wird für zwei Massen abgeleitet, aber im allgemeinen sind Kräfte nicht mehr central, sondern hängen auch von den Bewegungen ab. Cohäsion, chemische Verwandtschaft, Dissociation erscheinen in einem ganz anderen Lichte u. s. w. Die Entwickelung der Hypothese wird überall durch, zum Teil umfangreiche, Rechnungen unterstützt. Br.

G. Jäger. Eine neue Methode, die Grösse der Molekeln zu finden. Wien. Ber. C. 1233-1238.

Der Verfasser geht von der Fiction aus, dass die Molekeln wie die kleinst möglichen Teilchen eines auffallenden Wassertropfens anzusehen seien, der sich so lange in kleinere Tropfen teilt, bis die Arbeit, welche notwendig ist, um die durch die Teilung bewirkte Vergrösserung der Gesamtoberfläche zu erzeugen, der gesamten lebendigen Kraft gleich geworden ist, und setzt diese Gleichung für die Molekeln an. Bezeichnet r den Radius, α die Capillaritätsconstante, ϱ die Dichte und u die Geschwindigkeit der Molekel, so ergiebt sich die Gleichung:

$$r = \frac{1,24\,\alpha}{\varrho u^2}.$$

Hieraus berechnet der Verfasser für diejenigen Flüssigkeiten, deren Capillaritätsconstanten er selbst in einer früheren Arbeit bestimmt hat, Wasser, Aether, Aethylalkohol, Methylalkohol, Schwefelkohlenstoff, Chloroform, Aceton die Radien r und findet in Einheiten der neunten Decimale des Centimeters: 25, 38, 26, 18, 36, 40, 35. Die Uebereinstimmung mit früheren Ableitungen derselben Grössen ist sehr gut, was der Verfasser als ein Moment für die Berechtigung der gemachten Fiction ansehen zu können glaubt. Aus der mitgeteilten Gleichung folgt noch, dass r von der Temperatur abhängt. Br.

Cellérier. Lois des chocs moléculaires. Journ. de Math. (4) VII. 109-155.

Eine Molekel betrachtet der Verfasser geometrisch als einen rings convexen Körper. Es werden zunächst die geometrischen und mechanischen Grundlagen, die für den Stoss zweier solcher, als elastisch angenommenen Molekeln in Betracht kommen, und die sehr umfangreiche Nomenclatur entwickelt. Der Verfasser stellt sich dann die Aufgabe, in einem gegebenen Gemisch aus zwei Gasen die Anzahl der Stösse und die Aenderungen in der Energieverteilung zu studiren. Vom allereinfachsten Falle ausgehend und allmählich eine Beschränkung nach der andern fallen lassend, gelangt er schliesslich zu der allgemeinsten Lösung. Im zweiten Teil werden die entwickelten Formeln in langwierigen Rechnungen auf den Fall kugelförmiger Molekeln angewandt. Es folgen einige erweiternde Betrachtungen und ein kurzer Vergleich mit den einschlägigen Erfahrungsthatsachen.

Br.

G. J. Michaelis. Ueber die Moleculartheorie der Elasticität fester Körper. Wiedemann Ann. XLII. 674-680.

Herr Warburg hat eine Theorie des Gleichgewichts eines Systems von Molecülen aufgestellt, welche die Erscheinungen der Nachwirkung qualitativ erklärt. Herr Michaelis hat dann gezeigt, dass durch Einführung von Kräften, welche die Molecüle in ihren ursprünglichen Richtungen festzuhalten bestrebt sind, die Theorie in besseren Einklang mit der Erfahrung gebracht werden könne. In der vorliegenden Abhandlung werden derartige Kräfte aus der Voraussetzung entwickelt, dass bei den elastischen Erscheinungen die Wechselwirkung der Molecüle nur in kleinen Entfernungen merklich ist, dass demzufolge die Teilchen in einer Wirkungssphäre als parallel anzusehen sind, und ihre Schwerpunkte nicht gleichmässig angeordnet liegen, wenn auch die mittlere Anordnung in einem endlichen Teil des Körpers isotrop ist.

Der Verfasser untersucht den Einfluss, welchen die Drehung

der Molecüle auf die elastischen Kräfte hat, und wendet die Resultate seiner Untersuchung auf zwei Beispiele an. Es ergiebt sich bei einem Cylinder, auf dessen Enden Kräfte parallel zur Axe wirken, eine Spannungsdifferenz, welche der äusseren Kraft ungefähr proportional ist, wie bei der elastischen Nachwirkung beobachtet wird. Wirkt auf einen Cylinder eine magnetische Kraft, so ergiebt die Theorie eine Spannungsdifferenz, welche nahezu der zweiten Potenz der äusseren magnetischen Kraft proportional ist. F. K.

E. Riecke. Zur Moleculartheorie der piezoelektrischen und pyroelektrischen Erscheinungen. Gött. Nachr. 1891. 191-202.

Der Verfasser geht von folgender Vorstellung aus: „Die Molekeln der Krystalle sind umgeben von Systemen elektrischer Pole, welche in ihrer Anordnung dieselben Symmetrieeigenschaften besitzen, wie die Krystalle selbst. Sofern die hierdurch gegebene Verteilung elektrischer Massen an und für sich ein elektrisches Moment besitzt, sind ihre Fernwirkungen durch eine dem Krystall äusserlich aufliegende entgegengesetzt elektrische Schicht compensirt. Wird der Zustand des Druckes und der Temperatur, unter welchem sich der Krystall befand, irgendwie geändert, so werden die Mittelpunkte der Molekeln bestimmte, gegenseitige Verschiebungen erleiden; es werden ausserdem die Molekeln um ihre Mittelpunkte gedreht“. Auf die Mittelpunkte der Molekeln werden dann nämlich elektromotorische Kräfte ausgeübt angenommen, die von den Dilatationen abhängen. Die Componenten der erzeugten Momente werden den Componenten der elektromotorischen Kraft (die für alle Molekeln gleich ist) proportional gesetzt. Die Proportionalitätsfactoren sind für ein System charakteristisch. Bei Annahme einer bestimmten Polverteilung in den verschiedenen, in Frage kommenden Systemen gelangt dann der Verfasser zu Formeln, welche für jedes System die Componenten der inducirten Momente als Functionen der Dilatationen darstellen. Diese Formeln sind identisch mit den von Hrn. Voigt auf anderem Wege entwickelten. Br.

E. Riecke. Ueber eine mit den elektrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhängende Fläche. Gött. Nachr. 1891. 223-231.

Durch einen Druck, der in einer bestimmten Richtung auf ein Element des Turmalins ausgeübt wird, entsteht ein elektrisches Moment, dessen Grösse und Richtung durch die von Hrn. Voigt entwickelten Formeln gegeben wird. Trägt man in dieser Richtung das Moment seiner Grösse nach auf, so wird der Endpunkt, wenn die Richtung des Druckes sich ändert, eine Fläche beschreiben. Diese für die elektrischen Eigenschaften des Turmalins charakteristische Fläche untersucht der Verfasser. Die Schnitte senkrecht zur Symmetrie-Axe sind Hypocykloiden, die durch Rollen eines Kreises in einem anderen mit dreifachem Radius entstehen, die Schnitte durch die Symmetrieaxe Curven vierter Ordnung. Br.

S. U. Pickering. Chemical action and the conservation of energy. Nature XLIII. 165-166.

G. N. Huntly. Chemical action and the conservation of energy. Nature XLIII. 246-247.

„Chemische Affinität oder die von den Atomen besessene potentielle Energie wird in einem höheren oder geringeren Masse befriedigt, wenn diese Atome sich vereinigen, und ein entsprechender Betrag kinetischer Energie muss erscheinen. In allen gewöhnlichen calorimetrischen Methoden nimmt diese kinetische Energie die Form der Wärme an. Ein „endothermischer" zusammengesetzter Körper ist also eine Unmöglichkeit, wenn der Ausdruck in dem Sinne eines „aus seinen constituirenden Atomen mit Wärmeabsorption gebildeten Körpers" gebraucht wird. Dasselbe Princip, welches die Verbindungen von Atomen beherrscht, muss auch jene verwickelten Reactionen beherrschen, mit denen wir gewöhnlich zu thun haben". Diese Ideen werden im einzelnen durchgeführt, damit die Gültigkeit des Gesetzes der Erhaltung der Energie erhelle. Hr. Huntly bemängelt Ver-

schiedenes in den Ausführungen des Hrn. Pickering unter Verweisung auf die Arbeiten namhafter Physiker. Lp.

E. HARTIG. Der Tragmodul als Mass der Härte. Civiling. XXXVII. 339-364.

In den Mitteilungen des K. K. Gewerbemuseums in Wien hatte Herr Kirsch den Tragmodul als Mass der Härte vorgeschlagen. Der Verfasser sucht diese Anschauung zu stützen, indem er eine Reihe von Metallen nach der Grösse ihres Tragmoduls ordnet und dann zeigt, dass diese Anordnung den landläufigen Begriffen der Härte entspricht. Nachdem alsdann noch an einigen anderen Beispielen dargethan ist, dass der Tragmodul oder die Elasticitätsgrenze ein geeignetes Mass der Härte sei, wendet sich der Verfasser der Erörterung des Zusammenhangs von Elasticitätsgrenze und Proportionalgrenze zu. F. K.

J. C. McCONNEL. On the plasticity of an ice-crystal. Lond. R. S. Proc. XLIX. 323-343. Cly.

O. E. MEYER. Ein Verfahren zur Bestimmung der inneren Reibung von Flüssigkeiten. Wiedemann Ann. XLIII. 1-42.

Die Coulomb'sche Methode hat durch Herrn von Helmholtz und von Piotrowski die Abänderung erfahren, dass die Flüssigkeit in das Innere des schwingenden festen Körpers, welcher Kugelform erhält, verlegt wurde. Herr Meyer schlägt eine ähnliche Versuchsanordnung vor; nur behält er die ursprüngliche Plattenform bei, sodass die Flüssigkeit sich zwischen zwei Scheiben befindet, die durch einen Cylinder verbunden sind. Die Theorie dieser von Herrn Mützel (Wiedemann Ann. XLIII. 5) experimentell angewandten Methode wird folgendermassen entwickelt.

Für die Winkelgeschwindigkeit ψ eines Flüssigkeitsteilchens

gilt die Differentialgleichung

$$\varrho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\eta\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r^2\psi}{r\partial r}\right)=\eta\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

mit der Nebenbedingung, dass für die festen Grenzen ψ gleich der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ des Apparates ist, und dass ψ und φ für $t=0$ gegebene Grössen sind. Hierbei ist zu beachten, dass am Rande $\psi=\frac{d\varphi}{dt}$, sodass also auch $\frac{d\varphi}{dt}$ gegeben ist. Für φ gilt die Differentialgleichung

$$M\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\tau\varphi-2\pi\eta\left\{R^3\int_{-c}^{+c}dx\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=R}\right.$$
$$\left.+\int_0^R dr\,r^3\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=c}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=-c}\right]\right\},$$

wo M das Trägheitsmoment der festen Masse, $-\tau\varphi$ das von der Aufhängung herrührende Moment, und der Rest der rechten Seite das von der Flüssigkeit auf die feste Masse ausgeübte Drehungsmoment ist.

Der Verfasser entwickelt nun zunächst eine particuläre Lösung

$$\psi = CF(m,x,r)e^{-m^2t},$$

wo

$$F(m,x,r)=\frac{\cos px}{\cos pc}+\sum_n b\sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{c-x}{c}\pi\right)\frac{S(qr)}{S(qR)},$$

$$p=\frac{\varrho}{\eta}m^2,\quad q^2=\frac{\varrho}{\eta}m^2-\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{c}\right)^2,\quad b=\frac{4}{2n-1}\frac{p^2}{\pi q^2};$$

endlich ist

$$S(qr)=\int_{-1}^{+1}dz\sqrt{1-z^2}\,e^{iqrz},$$

$2c$ die Höhe und R der Radius des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes. Ferner muss $\frac{d\varphi}{dt}=Ce^{-m^2t}$ sein; das giebt für m die Gleichung:

$$Mm^2+\frac{\tau}{m^2}+\pi\eta R^4 p\operatorname{tang}pc-2\pi\eta cR^2\Sigma b^2S'(qR)=0.$$

Eine ähnliche particuläre Lösung wird noch entwickelt für eine Bewegung der Flüssigkeit, welche die Bewegung der festen Teile gar nicht beeinflusst. Sie ist

$$\psi = A \sin\left(\nu \frac{x}{c} \pi\right) S(\varkappa r) e^{-\mu^2 t},$$

wo ν eine ganze Zahl und $\varkappa$ eine Wurzel der transcendenten Gleichung

$$S(\varkappa R) = 0 \quad \text{und} \quad \mu^2 = \frac{\eta}{\varrho}\left(\varkappa^2 + \nu^2 \left(\frac{\pi}{c}\right)^2\right)$$

ist. Aus den particulären Lösungen setzt der Verfasser die allgemeine Lösung zusammen und bestimmt dann die Coefficienten aus dem Anfangszustande nach bekannten Methoden.

Da es sich um Schwingungen handelt, kommen für m^2 nur complexe Werte in Betracht, deren es nur zwei conjugirte giebt. Ist die Schwingungsdauer T und das logarithmische Decrement λ, so erhalten wir die Gleichung

$$0 = M \frac{\lambda + \pi i}{T} + \tau T \frac{\lambda - \pi i}{\pi^2 + \lambda^2} + \pi \sqrt{\eta \varrho}\, R^4 (ai - b)$$
$$- 32 \sqrt{\frac{\eta \varrho}{T}}\, c R^2 \Sigma \frac{(\lambda + \pi i)(\lambda - \pi i - h^2 T)(v + wi)}{\pi (2n-1)^2 (v^2 + w^2)},$$

wo

$$(a + ib)^2 = \frac{\lambda + i\pi}{T}, \quad (v + iw)^2 = \left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{c}\right)^2 \frac{\eta}{\varrho} T - \lambda + i\pi,$$
$$h = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}.$$

Aus dem reellen und imaginären Bestandteil wird τ eliminirt; das giebt bei Vernachlässigung höherer Potenzen von λ

$$2 M \lambda = \sqrt{\eta \varrho T} \left\{ R \sqrt{\frac{(\pi - \lambda)^2}{2}} + 2 c R^2 K \right\},$$

wo

$$K = \Sigma \left(\frac{4}{2n-1}\right)^2 \frac{(\pi^2 - 3 \lambda h^2 T) w - \pi (2\lambda + h^2 T) v}{(v^2 + w^2)^2}.$$

Zunächst wird K vernachlässigt, um einen angenäherten Wert von η zu erhalten, und dann derselbe in K eingesetzt. F. K.

F. Reuleaux. Neue Betrachtungen und Versuche über die Zapfenreibung. Glaser's Ann. XXVIII. 239-243; Zeitschr. deutsch. Ing. XXXV. 932-933.

Nachdem der Verfasser die ältere Formel für den Reibungswiderstand am Umfang eines cylindrischen Zapfens: $F = fP$ zurückgewiesen, wendet er sich der Darstellung der Reye'schen Theorie für neue Zapfen zu.

Alsdann wird der Fall eines eingelaufenen Zapfens behandelt; die Druckverteilung über die Berührungsfläche von Zapfen und Lager wird auf Grund der Hypothese erörtert, dass die Abnutzung an einer bestimmten Stelle proportional der an jener Stelle in der Zeiteinheit geleisteten Reibungsarbeit sei. Es werden mit einander verglichen der stärkste Druck, welcher an der tiefsten Stelle stattfindet, mit dem durchschnittlichen Wert des Druckes, sowie mit dem Drucke, welcher bei gleichmässiger Verteilung stattfindet. Ferner wird der Einfluss erörtert, welchen eine Verminderung der Berührungsflächen mit sich bringt. Es stellt sich heraus, dass dieselbe, entgegen der älteren Theorie, aber entsprechend einigen Erfahrungsthatsachen, günstig wirkt. Als Versuchsapparat dient eine Axe, welche sich in einer Hülse drehen kann und durch ein schweres Pendel in Bewegung gesetzt wird. F. K.

C. Brodmann. Untersuchungen über den Reibungscoefficienten von Flüssigkeiten. Diss. Göttingen. 8°.

N. Joukowsky. Ein Apparat zur Bestimmung der Zähigkeit der Schmieröle. Arb. d. phys. Section der kaiserl. Gesellschaft der Freunde der Naturkunde. Moskau. IV. Heft 1. 25-27.

C. Puschl. Ueber die inneren Kräfte von Flüssigkeiten und Gasen. Wien. Ber. C. 994-1012.

Eine Reihe einzelner Betrachtungen über die Zusammenhänge von innerer Arbeit, Druck, Volumen, Temperatur, Elasti-

citäts- und Ausdehnungscoefficient, besonders über die Maxima und Minima sowie über das Wachsen und Abnehmen der beiden letzten; im Auszug nicht wiederzugeben. Br.

MENDELEEFF. On the variation of density of water at different temperatures. Nature XLIV. 334-335.

Die von dem russischen Gelehrten vorgeschlagene Formel ist

$$S_t = 1 - \frac{(t-4)^2}{(A+t)(B-t)C},$$

$$A = 94{,}10, \quad B = 703{,}51, \quad C = 1{,}90, \quad V_t = \frac{1}{S_t}.$$

Lp.

K. FUCHS. Ueber den osmotischen Druck. Exner Rep. XXVII. 176-186.

Die Entwickelungen des Verfassers führen ihn zu der Annahme, dass der osmotische Druck die Summe von zwei ganz verschiedenen Drucken ist, deren einer von den Molecularkräften unabhängig ist, während der andere durch die Molecularkräfte bestimmt wird. Lp.

N. UMOW. Eine Ergänzung des Gesetzes der Hydrodiffusion und neue Diffusiometer. Phys. Ges. St. Petersb. XXIII. 1891. 335-370.

B. Elasticitätstheorie.

E. BELTRAMI. Intorno al mezzo elastico di Green. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 717-726, 779-807; Cimento (3) XXIX. 241-251, XXX. 126-137.

Setzt man in die Differentialgleichungen für die Bewegung eines isotropen elastischen Mediums für die Componenten der Verrückung die entsprechenden Ableitungen einer Function, so erhält man Gleichungen, welche die ersten Ableitungen einer und

derselben Gleichung sind. Der Verfasser wirft die Frage auf, welche elastischen Medien diese Eigenschaft ebenfalls besitzen. Als Antwort ergiebt sich für das elastische Potential genau derselbe Ausdruck, welchen Green als Bedingung dafür erhalten hatte, dass ebene Transversal-Wellen für jede beliebige Orientirung der Wellenebene möglich sind. Der Verfasser zeigt, dass das Potential durch geeignete Wahl der Axen auf eine einfache kanonische Form gebracht werden kann, und leitet dann aus derselben die Bedingung dafür ab, dass das Potential ein positives Zeichen habe. Dann wird vermittelst eines äusserst eleganten Verfahrens das Potential, welches zunächst durch sechs Componenten der Deformation dargestellt war, durch die sechs Druckcomponenten ausgedrückt.

In der zweiten Note betrachtet der Verfasser die geometrische Beziehung zwischen den Tripeln der Hauptdilatationen und der Hauptdrucke, welche bei isotropen Medien bekanntlich zusammenfallen. Der Verfasser untersucht dann die Frage, wann bei einer solchen Deformation, welche nur in einer linearen Längenänderung besteht, eine der drei Hauptdruckrichtungen mit der Richtung der Längenänderung zusammenfällt. Bei einem allgemeinen Medium giebt es höchstens dreizehn Richtungen, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, dagegen hat bei einem Green'schen Medium, und nur bei einem solchen, jede beliebige Richtung diese Eigenschaft.

Schliesslich erörtert der Verfasser für das in Frage stehende Medium die analoge Frage, wann die Richtung eines einzelnen Hauptdruckes, falls die beiden anderen Hauptdrucke gleich Null sind, mit der Richtung einer Hauptdilatation zusammenfallen kann.

F. K.

E. Cesàro. Sul calcolo della dilatazione e della rotazione nei mezzi elastici. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 459-466.

Von der bekannten Betti'schen Formel

$$\Sigma\left\{\int Xu'dS+\int Lu'ds\right\}=\Sigma\left\{\int X'udS+\int L'uds\right\}$$

ausgehend, in welcher X, Y, Z äussere Kräfte, L, M, N gleichzeitig wirkende Oberflächenkräfte, u, v, w die durch dieselben bewirkten Componenten der Verrückung und $X', Y', Z', L', M', N', u', v', w'$ ein zweites System von Grössen dieser Art bezeichnen, entwickelt der Verfasser, indem er $v' = w' = 0$ setzt, für u' aber den reciproken Wert der Entfernung von einem Punkte im Innern des Körpers annimmt, für u die Formel

$$4\pi Bu = U + \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

wo

$$U = \int \frac{XdS}{r} + \int \frac{Lds}{r} + B\int u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds$$
$$+ B\int\left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial n} ds,$$

$$\Phi = (A-B)\int \frac{\Theta dS}{r} + B\int\left(u \frac{\partial \xi}{\partial n} + v \frac{\partial \eta}{\partial n} + w \frac{\partial \zeta}{\partial n}\right)\frac{ds}{r},$$

Θ die kubische Dilatation ist, und A sowie B Constanten bezeichnen. Entsprechende Formeln gelten natürlich für v und w.

Dann erhält man zur Bestimmung der Rotationscomponenten die Gleichungen

$$4\pi BT_1 = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad 4\pi BT_2 = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},$$
$$4\pi BT_3 = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$$

und für die kubische Dilatation die Gleichung

$$4\pi B\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} + \Delta^2 \Phi,$$

oder da offenbar $\Delta^2 \Phi = -4\pi(A-B)\Theta$ ist:

$$4\pi A\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Da durch diesen Ausdruck Θ für alle Punkte im Innern bestimmt ist, so ist es auch Φ und damit die Ausdrücke u, v, w. Das

Integral $\int \frac{\Theta dS}{r}$ kann man direct bestimmen, indem man

$$u' = \frac{\partial r}{\partial \xi}, \quad v' = \frac{\partial r}{\partial \eta}, \quad w' = \frac{\partial r}{\partial \zeta}$$

setzt.

Der Verfasser giebt dann noch zwei andere Ableitungen für die fundamentale Formel

$$4\pi Bu = U + \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

F. K.

H. Poincaré. Sur la théorie de l'élasticité C. R. CXII. 914-915.

Erledigung eines Einwandes, den Herr Brillouin in einer Besprechung der „Théorie mathématique de la lumière" gegen einen bestimmten Punkt erhoben hatte. F. K.

M. Gebbia. Proposizioni fundamentali della statica dei corpi elastici. Palermo Rend. V. 320-323.

Der Verfasser bestimmt zunächst durch verschiedene Grenz- und Stetigkeitsbedingungen für einen unendlich ausgedehnten elastischen Körper drei verschiedene typische Arten von Deformationen. Dann wird ohne Beweis mitgeteilt, dass die Deformation, welche ein endlicher elastischer Körper S erfährt, sich aus den drei vorerwähnten typischen Deformationen zusammensetzen lasse. Endlich wird der Satz angegeben, dass die Arbeit, welche die auf einen Teil S eines Körpers wirkenden Kräfte bei der Deformation leisten, welche S durch die auf einen Teil S' wirkenden Kräfte erfährt, gleich ist der Arbeit der Kräfte in S' bei der Deformation, welche durch die in S wirkenden Kräfte hervorgerufen wird. F. K.

R. Marcolongo. Sulla deformazione di un corpo elastico isotropo indefinito limitato da un piano indefinito, per speciali condizioni ai limiti. Napoli Rend. (2) V. 25-32.

Der Verfasser geht aus von der Integralformel für die kubische Condensation

$$-4\pi\varrho\Omega^2\theta = \varrho\int\limits_S\left(X\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+Y\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+Z\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)dS$$
$$+\int\limits_s\left(L\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+M\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+N\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)ds$$
$$+2\varrho\omega^2\int\limits_s\left(u_s\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial x\partial z}+v_s\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial y\partial z}+w_s\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial z^2}\right)ds.$$

Sind nun ξ, η, ζ die Verrückungen, welche durch ein Kraftsystem $X'=0$, $Y'=0$, $Z'=0$, L', M', N' hervorgerufen werden, so ist nach Betti's Reciprocitätstheorem

$$\int(X\xi+Y\eta+Z\zeta)dS+\int\limits_s(L\xi+M\eta+N\zeta)ds-\int(L'u_s+M'v_s+N'w_s)ds=0$$

und folglich

$$-4\pi\varrho\Omega^2\theta = \varrho\int\limits_S\left\{X\left(\xi+\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\right)+Y\left(\eta+\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+Z\left(\zeta+\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)\right\}dS+\int\limits_s\left\{L\left(\xi+\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\right)+M\left(\eta+\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+N\left(\zeta+\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)\right\}ds+2\varrho\omega^2\int\limits_s\left\{u_s\left(\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial x\partial z}-\frac{L'}{2\varrho\omega^2}\right)\right.$$
$$\left.+v_s\left(\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial y\partial z}-\frac{M'}{2\varrho\omega^2}\right)+w_s\left(\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial z^2}-\frac{N'}{2\varrho\omega^2}\right)\right\}ds.$$

Werden nun $\xi, \eta, \ldots$ so bestimmt, dass für die begrenzende Ebene

$$\xi=-\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x},\quad \eta=-\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y},\quad \frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial z^2}-\frac{N'}{2\varrho\omega^2}=0$$

ist, so fallen L, M, w_1 aus der Formel heraus, und man erhält die kubische Dilatation für den Fall, dass an der Grenze die Normalkraft N und die in der Ebene liegenden Componenten der Verrückung bekannt sind, vorausgesetzt dass ξ, η, ζ, L', M' gefunden sind. Ist aber erst θ bekannt, so kann man auch die Componenten u, v, w leicht finden (cf. F. d. M. XXI. 1889. 1023).

F. K.

H. Resal. Sur les expressions des pressions dans un corps élastique homogène. C. R. CXII. 911-914.

Von den Ausdrücken der Druckcomponenten p_{xx} und p_{xy} ausgehend, ermittelt der Verfasser zunächst für die sechs Druckcomponenten Ausdrücke, in welchen noch 10 Coefficienten vorhanden sind. Dann wird das Coordinatensystem um die z-Axe gedreht. Einerseits werden danach die Druckcomponenten für das neue Coordinatensystem durch die bekannten Formeln für das alte System ausgedrückt, andererseits werden die Druckcomponenten nach Analogie der für das alte System geltenden Formeln durch die Deformationscomponenten dargestellt und darauf die letzteren durch die für das alte System geltenden Deformationen ausgedrückt. Durch Vergleich der beiden so gewonnenen Ausdrücke erhält man die gewünschte Reduction der Constanten.

F. K.

M. Brillouin. Déformations homogènes finies. Énergie d'un corps isotrope. C. R. CXII. 1500-1502.

Man erhält die in Frage stehenden Deformationen, wenn man die nach der x-Axe genommene Componente der Verrückung

$$u = D_1 x + G_3 y + G_2 z + 2R_3 y - 2R_2 z$$

setzt und die beiden anderen Componenten Werten gleich setzt, welche hieraus durch cyklische Vertauschung der Indices und Buchstaben x, y, z folgen. Setzt man

$$\operatorname{tang} \omega = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2},$$

so erhält man

$$u = [D_1 + 2(R_2^2 + R_3^2)\cos^2\omega]x + (G_3 - 2R_1R_2\cos^2\omega)y$$
$$+ (G_2 - 2R_1R_3\cos^2\omega)z$$
$$+ \cos^2\omega\{-2(R_2^2 + R_3^2) + 2(R_1R_2 + R_3)y + 2(R_1R_3 - R_2)z\}.$$

Der zweite Teil giebt eine blosse Rotation, der erste die eigentliche Deformation.

Die Energie kann offenbar nur von dem ersten Teil abhängig sein und zwar nur von den Invarianten der quadratischen Form

$$[D_1 + 2(R_2^2 + R_3^2)\cos^2\omega]\xi^2 + \cdots + 2(G_1 - 2R_2R_3\cos^2\omega)\eta\zeta + \cdots.$$

Die Componenten der Spannung erhält man aus der Energie vermittelst der Formeln

$$X_x = \frac{\partial E}{\partial D_1}, \quad Y_z + X_y = \frac{\partial E}{\partial G_3}, \quad Y_x - X_y = \frac{\partial E}{2\partial R_3}.$$

Aus ihrem gewöhnlichen Ausdruck $\frac{\lambda}{2}J_1^2 + \mu J_2$, wo J_1 und J_2 Invarianten sind, wird der folgende Wert der Energie abgeleitet:

$$E = \frac{\lambda}{2}\left(D_1 + D_2 + D_3 + 4\frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2}{1 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2}\right)^2$$
$$+ \mu\Big\{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + \tfrac{1}{2}G_1^2 + \tfrac{1}{2}G_2^2 + \tfrac{1}{2}G_3^2$$
$$+ 2\frac{4(R_1^4 + R_2^4 + R_3^4) + 5(R_1^2R_2^2 + R_2^2R_3^2 + R_3^2R_1^2)}{(1 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2)^2}$$
$$+ 2\frac{2D_1(R_2^2 + R_3^2) + 2D_2(R_3^2 + R_1^2) + 2D_3(R_1^2 + R_2^2) - G_1R_2R_3 - G_2R_3R_1 - G_3R_1R_2}{1 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2}\Big\}.$$

F. K.

D. Severini. Principi della reciprocità e della correlatività nell'equilibrio dei sistemi elastici. Il Politecnico. XXXVIII. (1890.) 541-559, XXXIX. (1891.) 5-11, 123-132.

Das „Reciprocitätsprincip", das als ein besonderer Fall eines von Betti aufgestellten Satzes gelten darf, kann folgendermassen ausgedrückt werden: Ist a die in der Richtung der wirkenden Kraft berechnete Verschiebnng eines Punktes A eines elastischen

Körpers, wenn an einem anderen Punkte B desselben eine Kraft angreift, deren Grösse $= 1$ ist; ist ferner b die in der Richtung der wirkenden Kraft gerechnete Verschiebung des Punktes B, wenn an A eine Kraft angreift, deren Grösse ebenfalls $= 1$ ist, so ist $a = b$.

Wirken auf die n Punkte $M_1, \ldots, M_n$ eines Systemes die Kräfte $p_1, \ldots, p_n$, und bezeichnet a_{rs} die Verschiebung, welche der Punkt M_r in der Richtung von p_r erleidet, wenn eine Kraft, deren Grösse $= 1$ und deren Richtung diejenige von p_s ist, am Punkte M_s angreift, setzt man ferner:

$$\|a_{rs}\| = a,$$

$$(1) \qquad p_{rs} = \frac{\partial \lg a}{\partial a_{rs}},$$

so ergiebt sich:

$$(2) \qquad a_{rs} = \frac{\partial \lg p}{\partial p_{rs}},$$

wo $p = \|p_{rs}\|$ ist. Die Gleichungen (1), (2) bilden das „Correlativitätsprincip".

Die beiden Principe werden auf verschiedene Probleme der Baukunst angewandt. Vi.

A. Sayno. Sull'equilibrio di elasticità dei solidi cilindrici che resistono alla flessione. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 1131-1142.

Die Ausdrücke, welche man für die elastischen Kräfte bei cylindrischen, auf Biegung beanspruchten Stäben gewöhnlich annimmt, entsprechen nicht genau allen Gleichungen der Elasticitätstheorie.

Diese Gleichungen zerfallen in verschiedene Gruppen; die erste Gruppe drückt aus, dass ein elementares rechtwinkliges Parallelepipedon unter Einfluss der auf seine Oberfläche wirkenden Spannkräfte im Gleichgewichte ist. Dazu kommen die Beziehungen zwischen den Deformationen, welche sich linear durch die elastischen Kräfte ausdrücken lassen. Endlich müssen an der cylindrischen Oberfläche die drei Componenten des Druckes gleich

Null sein. Indem der Verfasser die angenommenen Ausdrücke für die elastischen Kräfte in diese Bedingungen einsetzt, erhält er Ausdrücke, welche erkennen lassen, mit welcher Genauigkeit die Gleichungen erfüllt sind. Die Rechnung wird für den kreisförmigen und den elliptischen Querschnitt durchgeführt.

F. K.

W. A. Steklow. Eine Aufgabe aus der Theorie der Elasticität. Charkow Ges. (2) III. 1-34. (Russisch.)

In dieser Arbeit verallgemeinert der Verfasser den zuerst von Hrn. Maurice Lévy angedeuteten Fall der Lösung des Problems vom Gleichgewichte eines unendlich dünnen Stabes, wenn, ausser den an dessen Enden wirkenden Kräften, noch auf seine Axe ein constanter Druck längs der Hauptnormale zu derselben wirkt. Von Herrn Lévy und nachher von Halphen sind nur die Fälle des Gleichgewichts ebener Curven untersucht worden; der Verfasser dagegen beschränkt sich auf den Fall isotroper Stäbe, deren Querschnitte zwei Hauptträgheitsmomente gleich haben, und giebt, indem er eine der willkürlichen Constanten der Null gleich setzt, die volle Lösung der angeführten Frage für eine beliebige Form der Gleichgewichtscurven.

Die endgültige Lösung dieser Aufgabe bei den gemachten Einschränkungen ist vom Verfasser in der Form eines elliptischen Integrals ausgedrückt; dabei ist die Windung für alle Punkte der Gleichgewichtscurve dieselbe; der Hauptvector der durch einen Querschnitt wirkenden Druckkräfte (Spannungen) ist in jedem Punkte der Curve ihrer ersten Krümmung proportional; endlich giebt der Verfasser, um die Richtung dieses Hauptvectors zu bestimmen, eine kinematische Construction an. In einem Specialfalle dieser Aufgabe kann die Gleichgewichtscurve, wie bei Kirchhoff, eine Schraubenlinie sein.

Bb.

W. A. Steklow. Vom Gleichgewichte elastischer cylindrischer Körper. Charkow Ges. (2) III. 42-93. (Russisch.)

Indem der Verfasser bemerkt, dass in de Saint-Venant's Auf-

gabe die ursprünglich der Axe des Cylinders parallelen Geraden nach der Deformation in algebraische Curven dritter Ordnung übergehen, und dass in dieser Aufgabe mitunter gewisse Annahmen über die inneren Druckkräfte gemacht werden, stellt er sich in der vorliegenden Abhandlung die umgekehrte und zugleich allgemeinere Frage: er lässt nämlich die besagten Annahmen über die Verteilung der Druckkräfte im Inneren des Cylinders weg und sucht, wie diese inneren Druckkräfte und die auf sein freies Ende wirkenden Kräfte beschaffen sein müssen, damit unter der Annahme, dass keine Massenkräfte und keine Kräfte auf die Seitenflächen des Cylinders wirken, die ursprünglich der Axe des Cylinders parallelen Geraden nach der Deformation in algebraische Curven n^{ter} Ordnung übergehen. Die Untersuchung führt den Verfasser zu dem Schlusse: Wirken auf die Seitenflächen des Cylinders und auf dessen innere Massen gar keine Kräfte, wohl aber auf eine der Endflächen desselben, so kann keine im natürlichen Zustande der Axe des Cylinders parallele Gerade in eine algebraische Curve übergehen, deren Ordnung höher als die dritte ist, und dann, dass die einzige allgemeine Lösung, welche alle möglichen Fälle umfasst, in denen jede der Axe des Cylinders parallele Gerade in eine algebraische (parabolische) Curve übergeht, die de Saint-Venant'sche ist. Weiter zeigt der Verfasser, dass der angeführte Schluss über die Ordnung der algebraischen Curven, welche im natürlichen Zustande der Axe des Cylinders parallel waren, auch dann seine Geltung nicht verliert, wenn auf eine der Endflächen des cylindrischen Körpers Kräfte von gegebenem Vector und Moment, ferner auf die Mantelfläche Kräfte wirken, die in auf der Axe des Cylinders senkrechten Ebenen liegen, und deren Projectionen auf den Coordinatenaxen

$$X = X_0 + X', \quad Y = Y_0 + Y'$$

sind, wo X_0, Y_0, X', Y' willkürliche Functionen von x und y bedeuten.

Der Verfasser schliesst die Abhandlung mit der vollständigen Lösung zweier Specialfälle der letzten Aufgabe. Bb.

W. A. Steklow. Ueber das Gleichgewicht elastischer Rotationskörper. Charkow Ges. (2) III. 173-251. (Russisch.)

Der Verfasser führt die in einem beliebigen orthogonalen Coordinatensysteme bestehenden Gleichungen für das Gleichgewicht eines isotropen Körpers an, wenn auf denselben keine Massenkräfte wirken, wendet diese Formeln auf Rotationskörper an, indem er die Meridiancurve als zu dem orthogonalen Systeme mit den Parametern α und β gehörig betrachtet, wobei zu dem Systeme des Parameters α die Meridiancurve selbst gehört. Auf diese Weise erhält er ein System orthogonaler krummliniger Coordinaten α, β, φ, wo φ den Azimutalwinkel der Meridianebene bedeutet. Weiter specialisirt der Verfasser die Lösung der Frage durch die Annahme, dass die Projectionen der Verrückungen der Punkte des Rotationskörpers auf den Axen des genannten Coordinatensystems von dem Winkel φ unabhängig sind, und schreitet zur Betrachtung derjenigen Körper, welche durch Rotationsflächen zweiter Ordnung begrenzt sind.

Hier verweilt der Verfasser bei dem Falle, wo die kubische Dilatationsconstante (die kubische Ausdehnungsconstante) θ, welche in Folge der gemachten Annahme nur von den Coordinaten α und β abhängt, sich als eine Reihe darstellen lässt, deren allgemeines Glied ein Product zweier Functionen ist, von denen jede nur von einem der Parameter α, β abhängt.

Unter diesen Voraussetzungen giebt der Verfasser mehrere specielle Lösungen von Fragen über das Gleichgewicht eines Kreiscylinders, welcher Kräften unterworfen ist, die auf seine Mantelfläche wirken; über das Gleichgewicht eines hohlen Cylinders unter der Wirkung von Kräften, die auf seine Endflächen wirken, und endlich betrachtet er mit Hülfe sphärischer Coordinaten einige Fälle des Gleichgewichts elastischer, durch Kugel- und Kegelflächen begrenzter Rotationskörper: 1) wenn die Kräfte, welche auf die Kegelflächen des Körpers wirken, gegeben sind, und 2) wenn die auf die sphärischen Flächen des Körpers wirkenden Kräfte gegeben werden. Bb.

A. E. H. Love. Note on the present state of the theory of thin elastic shells. Lond. R. S. Proc. XLIX. 100-102.

Bezieht sich auf den Aufsatz des Verfassers: „On the small free vibrations and deformations of a thin elastic shell“ (Phil. Trans. CLXXIX, F. d. M. XX. 1888. 1075) und auf die sich anschliessenden Forschungen von Lord Rayleigh, Basset und Lamb über denselben Gegenstand. Cly. (Lp.)

C. Chree. On thin rotating isotropic discs. Cambr. Proc. VII. 201-215.

Verfasser untersucht eine dünne kreis- oder kreisringförmige Platte aus einem isotropen Material von constanter Dichte, welche mit constanter Winkelgeschwindigkeit um ihre Axe rotirt. Die Ausdrücke, welche er für die Formänderungen und Spannungen ableitet, unterscheiden sich von denjenigen, welche er früher für eine volle kreisförmige Platte durch ein von Herrn Pearson in Betreff der Oberflächenbedingungen beanstandetes, näherungsweises Verfahren gefunden hat (Cambr. Trans. XIV und Quarterly Journ. XXIII), nur durch Glieder höherer Ordnung in Bezug auf die Dicke der Platte, und gehen für die kreisringförmige Platte bei Vernachlässigung höherer Glieder in Ausdrücke von Grossmann (Verein zur Beförderung des Gewerbfleisses, Berlin 1883) und Maxwell (Scientific papers, vol. I) über.
Ho.

O. J. Lodge, A. G. Greenhill, J. A. Ewing, C. V. Boys, A. M. Worthington, G. H. Bryan, K. Pearson, C. Chree. The flying to pieces of a whirling ring. Nature XLIII. 439, 461-463, 488; XLIV. 82.

O. J. Lodge, W. H. Macaulay. The meaning of algebraic symbols in applied mathematics. Nature XLIII. 513, 558.

A. S. Herschel. Tension of a „girdle of the Earth“. Nature XLIII. 514.

J. T. Nicolson. Spinning disks. Nature XLIII. 514.

J. A. Ewing. The stresses in a whirling disk. Nature XLIII. 514.

O. J. Lodge. The whirling ring and disk. Nature XLIII. 533-534.

In der ersten Notiz giebt Hr. Lodge die kritische Geschwindigkeit, bei welcher ein rotirender Ring zerspringen muss, nach der Formel $T = v^2 \varrho$ (T = Festigkeit, ϱ = Dichtigkeit des Materials) für ein Stahlband, das für den (englischen) Quadratzoll 30 Tonnen Belastung tragen kann, zu 800 Fuss in der Secunde an und bemerkt dazu, dass ein derartiges Stahlband, um den Erdäquator gelegt, demnach springen müsste, wenn es nicht durch die Schwere zusammengehalten würde. An diese kurze Mitteilung schliessen sich die anderen Erörterungen alle an. Dieselben betreffen 1) die Auswertung solcher Formeln in Zahlen, 2) den Beweis jener Formel und derjenigen für eine rotirende Scheibe, besonders von Hrn. Ewing nach Grossmann und von Hrn. Nicolson nach Maxwell, 3) irrige Folgerungen, veranlasst durch das schiefe Beispiel des Hrn. Lodge von einem schwimmenden Kabel um den Aequator. Lp.

A. Ritter. Beitrag zur Theorie des elastischen Stosses. Z. deutscher Ing. XXXV. 1383-1386.

Nachdem der Verfasser zunächst in äusserst eleganter und anschaulicher Weise die Erscheinungen erörtert hat, welche eintreten, wenn auf ein Ende eines zunächst im Gleichgewicht befindlichen Stabes von einem bestimmten Zeitpunkte ab eine constante Druckkraft wirkt, werden auf der gewonnenen Grundlage die Erscheinungen beim Stosse einer elastischen Stange gegen eine ruhende Wand besprochen. Alsdann wird der Stoss zweier Stangen gegen einander behandelt. F. K.

H. Lamb. On the flexure of a flat elastic spring. Phil. Mag. (5) XXXI. 182-188.

Wenn nach der gewöhnlichen Theorie der Biegung ein Stab

von beispielsweise rechteckigem Querschnitte ein wenig dadurch gebogen wird, dass man in einer zu einer Seitenfläche parallelen Ebene Kräftepaare gegen ein Paar Gegenseiten anbringt, sodass diese einen Kreisbogen bilden, so nehmen die übrigen Flächen eine antiklastische Krümmung an. Thomson und Tait haben angemerkt (Natural Philosophy § 717), dass dieses Streben nach antiklastischer Krümmung in manchen Fällen dem Biegungsgrade eine Grenze steckt, jenseits deren die Theorie nicht anwendbar ist. In der vorliegenden Arbeit wird die oben bezeichnete Schwierigkeit besprochen und eine Lösung gegeben; die benutzte Methode ist eine Abart derjenigen, welche der Verf. in der Abhandlung benutzte: „On the flexure of an elastic plate“ (Lond. M. S. Proc. XXI, F. d. M. XXII. 1890. 1007). Die Hauptergebnisse stehen in Uebereinstimmung mit den Betrachtungen von Thomson und Tait. Die Ausdehnungen und Zusammenziehungen der Mittelfläche des Bandes, welche durch das Streben nach der entgegengesetzten Krümmung in der Richtung der Breite hervorgerufen werden, halten diese Krümmung in Schach, so dass die Zwangsform nie merklich von der eines Cylinders abweicht. Für gewisse Werte von ϱ, dem Krümmungsradius des Kreisbogens, hat das zur Aufrechthaltung der Biegung nötige Kräftepaar den von der gewöhnlichen Theorie gegebenen Wert; bei dem entgegengesetzten Extrem dagegen strebt es dem einer Platte eigentümlichen Werte zu. Die Formeln der Abhandlung bestimmen auch den Wert für die Zwischenfälle. Die mathematische Entwickelung der Abhandlung ist ungemein knapp gefasst, und es würde ein grosser Raum erforderlich sein, um bloss die Bezeichnung zu erklären, weshalb die mathematische Analyse weggelassen ist. Gbs. (Lp.)

B. Hille. Beitrag zur Berechnung kreisförmiger Biegungsfedern. Civiling. XXXII. 199-222.

Der Verfasser geht von allgemeinen Formeln für die Horizontal- und Verticalverschiebung des freien Endes einer eingespannten Feder aus und specialisirt dieselbe dann sowohl in

Bezug auf das Moment der angreifenden Kräfte als auch in Bezug auf die Querschnittsform der Feder in verschiedener Weise. Die hierbei auszuführenden elementaren Quadraturen erfordern ein Referat an dieser Stelle nicht. F. K.

F. Chaudy. Note sur les arcs élastiques d'égale résistance. Génie civil. XIX. 220-221.

Um einen aus zwei Gurtungen gebildeten elastischen Bogen constanten Widerstandes zu erlangen, wird zu den gegebenen äusseren Kräften mit einer passenden Poldistanz ein Seilpolygon gezeichnet, welches völlig innerhalb der beiden Gurtungen liegt. Werden nun die Querschnitte, welche ein senkrecht zum Seilpolygon geführter Schnitt in den beiden Gurtungen bildet, so bestimmt, dass der Schwerpunkt der aus beiden zusammengesetzten Fläche in das Seilpolygon fällt, und dass der Quotient aus dem Normaldruck und der ganzen Querschnittsfläche constant ist, so erhält man einen Bogen gleichmässiger Beanspruchung.

F. K.

H. Diesener. Die Festigkeitslehre und die Statik im Hochbau. 2. Aufl. Halle. Hofstetter. VIII + 250 S.

H. Müller-Breslau. Ueber einige Aufgaben der Statik, welche auf Gleichungen der Clapeyron'schen Art führen. Z. f. Bauwesen. XLI. 103-128.

Der Verfasser geht aus von der Clapeyron'schen Gleichung für drei auf einander folgende Stützenmomente eines continuirlichen Balkens mit constantem Querschnitt, und zwar von der allgemeinsten Form mit Rücksicht auf die Senkung der Stützen und auf variable Temperatur in dem einzelnen Querschnitt. Es wird zunächst eine graphische Auflösung des so entstehenden Gleichungssystems für die Stützenmomente gegeben, und zwar mit Unterscheidung der beiden Fälle, dass der Balken an den

beiden Enden frei aufliegt, und dass er an den beiden Enden unter den Winkeln τ_0 und τ_n eingespannt ist.

Im § 3 wird gezeigt, dass das Verfahren (natürlich erst nach einigen vorbereitenden Umwandlungen) auch auf den Fall eines Trägers mit veränderlichem Querschnitt anzuwenden ist.

Im § 4 wird das Verfahren auf die Bestimmung der Biegungsmomente in den Knotenpunkten von Fachwerken angewandt, deren Gurtungen mit einander vernietet und deren Wandglieder gelenkartig befestigt sind. Den Ausgangspunkt bilden die Formeln, welche der Verfasser in der Wien. Allg. Bauztg. 1885 unter dem Titel „Zur Theorie der Biegungsspannungen in Fachwerkträgern" veröffentlicht hat (F. d. M. XVII. 1885. 972).

Im § 5 wird eine Theorie von Trägern entwickelt, deren obere Gurtungen gekrümmt und in den Knotenpunkten ohne Gelenk verbunden sind, während die unteren Gurtungen und die Wandglieder gerade und gelenkartig sind; hierdurch werden für die Knotenpunktsmomente der oberen Gurtung Gleichungen geliefert, die den Clapeyron'schen ganz ähnlich sind. F. K.

FR. ENGESSER. Die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Centralbl. der Bauverw. XI. 483-486.

Nachdem der Verfasser kurz die Euler'sche Formel besprochen, zählt er zunächst die vereinfachenden Annahmen auf, welche ihrer Ableitung zu Grunde liegen. Zwei derselben, nämlich die Annahme, dass die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, und dass die Schubkräfte unberücksichtigt bleiben dürfen, sind nicht immer erfüllt. Der Verfasser unternimmt es deshalb, die Knickfestigkeit mit Rücksicht auf diese beiden Umstände zu berechnen.

Nachdem er die Aufgabe für Vollträger gelöst hat, wendet er sich der Berechnung von Fachwerkträgern und Rahmenträgern zu. F. K.

R. VON THULLIE. Berechnung der Gitterstäbe auf Knickfestigkeit. W. Oestr. Ing. u. Arch. XV. 76-78.

Die Schwarz-Rankine'sche Formel für die Knickfestigkeit lautet:

$$F = \frac{P}{\tau}\left(1+\alpha\frac{Fl^2}{J}\right)$$

(P Druckkraft, τ die zulässige Druckspannung, F Querschnittsfläche, J Trägheitsmoment, l Länge, α Coefficient).

Der Ausdruck $\frac{J}{F^2}$ ist von der Dimension Null, also eine Zahl ϑ, welche nur von der Form und nicht von der Dimension des Querschnitts abhängt. Führt man diese Zahl an Stelle von J ein, so ergiebt sich

$$F = \frac{P}{\tau}\left(1+\alpha\frac{l^2}{\vartheta F}\right)$$

und daraus die Formel von Asimont:

$$F = \frac{P}{\tau}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\alpha\tau l^2}{\vartheta P}}\right).$$

Der Verfasser bestimmt den Wert ϑ für eine Anzahl von Querschnittsformen. F. K.

R. von Thullie. Beitrag zur Berechnung der Stäbe auf Knickfestigkeit. W. Oestr. Ing. u. Arch. XVI. 11-14, 24-26.

Auch in diesem Artikel wird der Coefficient ϑ in der Asimont'schen Formel für eine Reihe von Querschnitten bestimmt. Ferner wird eine graphische Bestimmung von F vermittelst der Parabeln vorgeschlagen, welche sich bei festgehaltenem Werte von $F_0 = P/\tau$ ergeben, wenn $\frac{\alpha}{0,0009}\frac{l^2}{\vartheta}$ als Abscisse und F als Ordinate betrachtet wird. F. K.

G. H. Bryan. On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, with applications to the „buckling" of the sides of a ship. Lond. M. S. Proc. XXII. 54-67.

Die vorliegende Abhandlung enthält das zweidimensionale Analogon zu der von Euler gegebenen Bestimmung der Knick-

festigkeit. Bei dieser handelt es sich um die Frage, bis zu welcher Grenze ein aufrecht stehender, durch einen Druck belasteter Stab im stabilen Gleichgewicht ist. Hier wird die Frage behandelt, unter welchen Umständen eine ebene Platte, auf deren Rand Druckkräfte wirken, deren Richtung in der Ebene der Platte liegt, im stabilen Gleichgewicht ist.

Bei stabilen Platten darf für keine Verrückung die durch die Krümmung entstehende potentielle Energie grösser sein als der von der Ausdehnung herrührende Verlust an potentieller Energie.

Bei rechteckigen Platten kann man die Verrückung durch eine doppelt unendliche periodische Reihe ausdrücken. Indem der Verfasser die gewonnenen Ausdrücke einsetzt, erhält er als untere Grenze für die dritte Potenz der Dicke einen Bruch, dessen Zähler und Nenner eine doppelt unendliche Reihe bilden, bei welcher die einzelnen Glieder proportional den Quadraten der Coefficienten der oben erwähnten Fourier'schen Reihe sind. Die kleinste zulässige Dicke erhält man offenbar, indem man die untere Grenze zu einem Maximum macht.

Nach Durchführung der erforderlichen Rechnung wendet der Verfasser das gewonnene Resultat auf das im Titel genannte praktische Problem an. Den Schluss macht die Untersuchung am Rand gleichmässig gedrückter kreisförmiger Platten.

F. K.

F. Stark. Beitrag zur Berechnung des continuirlichen Trägers. Techn. Blätter. XXIII. 107-112.

Nach Mohr kann man die elastische Linie eines continuirlichen Trägers ansehen als eine Kettenlinie, bei welcher die Horizontalspannung gleich EJ (übliche Bezeichnung) ist mit der Momentenfläche des Trägers als Belastungsfläche. Der Verfasser zeigt nun, dass bei einem continuirlichen Träger mit gleich hohen Stützen die Auflagerreactionen, welche den Momentenflächen als ideellen Belastungsflächen entsprechen, gleich Null sind, und leitet hieraus den Satz von Clapeyron ab. F. K.

Steiner. Einfache Ableitung eines Satzes zur Berechnung von continuirlichen Balken mit balancirten Stützen. Techn. Blätter. XXII. 212-214. (1890.)

Bei den in Frage stehenden Balken sind die Drucke der Stützen beide gleich dem arithmetischen Mittel der Reactionen an den Zwischenstützen eines gleich belasteten continuirlichen Balkens mit gleichen Spannweiten und festen Stützen.

Dieser Satz wird mit Benutzung von Castigliano's Princip bewiesen. F. K.

C. A. Carus Wilson. The influence of surface-loading on the flexure of beams. Phil. Mag. (5) XXXII. 481-503.

In dieser Abhandlung werden einige Versuche beschrieben, die in der Absicht angestellt wurden, den wirklichen Zustand der Spannung (strain) in einem zweifach unterstützten und central belasteten Balken zu bestimmen, wenn die Oberflächenbelastung mit in Betrachtung gezogen wird. Die gewählte Forschungsmethode stützt sich auf die folgende Annahme. 1) Der wahre Spannungszustand im Mittelpunkte des Balkens kann gefunden werden, indem man über den vom Beugen herrührenden Zustand den von der Oberflächenbelastung herrührenden lagert. 2) Der Spannungszustand, der von der Oberflächenbelastung allein herrührt, kann mit bedeutender Annäherung an die Wirklichkeit dadurch gefunden werden, dass man den Balken auf einer flachen Platte statt auf zwei Stützen ruhen lässt. 3) Die von der Biegung allein herrührenden Spannungen können aus den Bernoulli-Saint-Venant'schen Resultaten erhalten werden, nämlich: α) Die Streckung (stretch) für irgend einen Querschnitt ist der Entfernung von der neutralen Axe proportional. β) Die centrale Axe ist ungestreckt. γ) Für dieselben Punkte in verschiedenen Querschnitten ist die Streckung dem Biegungsmomente proportional. Die Abhandlung beschäftigt sich hauptsächlich mit den Versuchen und den Folgerungen, die aus ihnen gezogen werden können; diese Folgerungen werden in die Form von Lehrsätzen gebracht. Sie enthält auch Auszüge aus Mitteilungen

von Stokes und Boussinesq an den Verfasser bezüglich einiger Punkte der mathematischen Theorie. Gbs. (Lp.)

M. R. v. Thullie. Bestimmung der Einflusslinien für die inneren Kräfte des continuirlichen Trägers mit drei Stützpunkten. W. Oestr. Ing. u. Arch. XVI. 416-417.

H. Müller-Breslau. Ueber die Einflusslinien continuirlicher Balken mit drei Stützpunkten. Ibid. 476.

M. R. v. Thullie. Erwiderung zu den vorstehenden Bemerkungen. Ibid. 476-477. F. K.

A. Klingatsch. Beitrag zur Construction der Influenzcurven für den continuirlichen Träger constanten Querschnittes. W. Oestr. Ing. u. Arch. XVI. 293-296.

F. K.

J. Melan. Zur Berechnung zusammengesetzter Holzträger. W. Oestr. Ing. u. Arch. XVI. 46-47.

R. v. Thullie. Zur Berechnung der Holzträger. Ibid. 279-283.

J. Melan. Zur Berechnung der Holzträger. Ibid. 299.

Aus Anlass von Versuchsergebnissen, welche Herr Hauptmann Bock mitteilt (W. Oestr. Ing. u. Arch. XVI. 21, 30), unterzieht Herr Melan die gewöhnliche Theorie zusammengesetzter Balken, welcher die Vorstellung zu Grunde liegt, dass durch die Verdübelung oder Verzahnung eine gegenseitige Verschiebung der einzelnen Balken gehindert werde, einer Kritik. Alsdann wird eine neue Theorie auf der Voraussetzung begründet, dass die gegenseitige Verschiebung der Balken und damit der Spannungsunterschied proportional dem Zahn- oder Dübeldruck sei. Herr von Thullie folgt im wesentlichen der Theorie des Herrn Melan und sucht dieselbe durch Berücksichtigung des Umstandes zu verbessern, dass in der Nähe der Bruchbelastung die

Druckspannung nicht mehr proportional dem Abstande von der neutralen Axe sei.

In der zweiten Note verteidigt Herr Melan seine Art der Berechnung. F. K.

E. A. Werner. Träger auf zwei Stützen. Wien. Allg. Bau-ztg. LVI. 41-46, 51-53, 59-62.

Dem Referenten ist es unmöglich, über die vorliegende Arbeit zu berichten, da es ihm nicht gelungen ist, zum Verständnis derselben vorzudringen. F. K.

E. Brik. Zur Berechnung der verdübelten, verzahnten und der Klötzel-Holzträger. W. Oestr. Ing. u. Arch. XVI. 349-353, 357-360.

Der Verfasser berechnet den Biegungswiderstand zusammengesetzter Holzträger, indem er denselben aus zwei Teilen zusammensetzt, nämlich aus dem Widerstand, welcher von der gemeinschaftlichen Biegung der Balken herrührt, und dem zu der besonderen Biegung des einzelnen Balkens gehörenden Widerstand, welche eine Folge des Nachgebens der Verbindungen ist.

Die entwickelte Theorie scheint uns aus dem Grunde nicht ganz einwandfrei, weil ohne weiteres angenommen wird, dass die von der besonderen Biegung herrührende Maximalspannung bei allen Balken dieselbe sei. F. K.

C. Skibinski. Ueber hölzerne zusammengesetzte Brückenträger. W. Oestr. Ing. u. Arch. XVI. 328-332.

G. di Simone. Sulle travi rette di uguale resistenza. Il Politecnico. XXXIX. 447-462, 560-576, 621-637, 641-648.

Theorie der geradlinigen, horizontalen Balken gleichen Widerstandes mit Betrachtung des Eigengewichtes. Vi.

A. F. Jorini. Massimo momento indotto in una trave semplice da un treno di pesi vincolati. Il Politecnico. XXXIX. 299-307.

Eine neue Lösung des im Titel angegebenen Problems.

Vi.

R. Pfleger. Tabellen über die berechnete Tragfähigkeit der beim Hochbau zu verwendenden eisernen Träger. Ein Hülfs- und Nachschlagebuch für Architekten und Bauunternehmer. Leipzig. Engelmann. VI + 89 S. 12°.

F. Heinemann. Excentrische Druckbelastung ausserhalb des Kernes bei Mauerwerkskörpern ringförmigen Querschnitts. Hannov. Zeitschr. XXXVII. 158-163.

Im wesentlichen Tabellen, welche auf Grund älterer Formeln von Keck (Hannov. Zeitschrift 1882. 627) berechnet sind.

F. K.

H. Müller-Breslau. Ueber Langer'sche Brückenträger. Centralbl. der Bauverw. XI. 349-353.

Die in Frage stehenden Träger werden im wesentlichen gebildet durch einen Stabbogen *ARB* mit gelenkartigen Knoten, versteift durch zwei gegliederte, in einem Gelenk *C* an einander hängende steife Scheiben *AC* und *CB*, welche mit dem Bogen durch Stäbe verbunden sind.

Der Verfasser berechnet die in den Stäben des Versteifungswerkes stattfindenden Spannungen unter der Voraussetzung, dass die Höhe des Versteifungsfachwerks und die Strecke, um welche der Bogen *AR* über der Geraden *AR* liegt, überall in einem constanten Verhältnis stehen. F. K.

J. Glauser. Dynamische Wirkungen bewegter Lasten auf eiserne Brücken. Glaser's Ann. XXIX. 113-117.

Mit Hülfe von Betrachtungen, deren Richtigkeit Referent nicht einzusehen vermag, wird für die Längenänderung eines einzelnen Stabes als Function der Zeit eine Differentialgleichung zweiter Ordnung aufgestellt und dann integrirt. Die übrigen Betrachtungen sind technischer Natur. F. K.

J. Melan. Zur rechnungsmässigen Ermittelung der Biegungsspannungen in Beton- und Monierconstructionen. W. Oestr. Ing. u. Arch. XV. (1890.) 223-226.

Beim Beton sind die Elasticitätscoefficienten für Zug und Druck von einander verschieden, daher werden bei gebogenen Betonplatten auf die Berechnung nicht dieselben Formeln anzuwenden sein wie bei gewöhnlichen elastischen Materialien. Der Verfasser entwickelt die entsprechenden Formeln für die in Frage stehende Substanz. Die Monierplatte ist eine Betonplatte mit eingelegtem Eisengeflecht. Eine Theorie des Biegungswiderstandes auch eines solchen Gebildes wird unter der Annahme entwickelt, dass die Adhäsion zwischen Beton und Eisen hinreicht, um die Teile, welche ursprünglich in Berührung sind, auch nach der Deformation im Zusammenhang zu halten.

Im Anschluss an diese Entwickelungen wird das Beton- und Moniergewölbe besprochen. F. K.

P. Neumann. Ueber die Berechnung der Monierconstructionen. W. Oestr. Ing. u. Arch. XV. 209-212. (1890.)

Der Verfasser behandelt die Theorie der Monierconstructionen nach ähnlichen Principien wie Herr Melan, nur wird beim Beton, genau wie bei völlig elastischen Körpern, ein einheitlicher Elasticitätscoefficient zu Grunde gelegt. F. K.

J. Melan. Zur Berechnung von Betongewölben. W. Oestr. Ing. u. Arch. XVI. 142-143.

Die Entwickelungen des letzten Teils der obigen Abhandlung werden weiter ausgeführt. F. K.

W. WITTMANN. Die Standfestigkeit freitragender Steintreppen. Centralbl. der Bauverw. XI. 288-289.

KÖNIGER. Zur Berechnung freitragender Steintreppen. Ibid. 380-381.

W. WITTMANN. Zur Berechnung freitragender Steintreppen. Ibid. 456.

Von mathematischem Interesse dürfte die Berechnung der Strecke sein, bis zu welcher eine Stufe eingemauert werden muss, damit sie, als Balkenträger betrachtet, die erfolgende Belastung verträgt. Herr Königer betont, dass die Stufe auch auf Torsion beansprucht wird, und berechnet die entsprechende Tiefe der Einmauerung. Die Redaction hebt hervor, wie misslich bei der geringen Kenntnis, welche wir von dem Verhalten des auf Biegung und Drehung beanspruchten Steines besitzen, Berechnungen der vorliegenden Art immerhin bleiben.

F K.

TH. LANDSBERG. Berechnung freitragender Wellblechdächer. Z. f. Bauwesen. XLI. 381-396.

Ausgangspunkt der Untersuchung ist eine Gleichung zur Bestimmung des in der Zugstange herrschenden Zuges. Der Verfasser erhält dieselbe, indem er die horizontale Längenänderung erstens durch die in dem Bogen herrschenden Momente und Axialkräfte und zweitens durch die Spannung der Zugstange ausdrückt. Die Momente und Kräfte im Innern des Bogens lassen sich nach den Regeln der Statik durch die Spannung der Zugstange und durch die Belastung ausdrücken, und man erhält so eine lineare Gleichung zur Berechnung der in der Zugstange herrschenden Kraft; ist diese Gleichung aufgelöst, so kann man die Beanspruchung des Daches finden. Der Verfasser führt die Rechnung für verschiedene Arten der Belastung durch.

F. K.

A. MEYERHOF. Die Biegungsspannungen der Z-Eisen. Z. deutscher Ing. XXXV. 696-701.

L. Vianello. Die Biegungsspannungen der Z-Eisen. Z. deutscher Ing. XXXV. 1225.

Herr Meyerhof giebt auf Grund von leicht abzuleitenden Formeln für die Meistbeanspruchungen bei der in Frage stehenden Querschnittsform Tabellen für diese Beanspruchung.

Herr Vianello löst die in Betracht kommende Aufgabe, die neutrale Faser und die höchste Beanspruchung für den Fall zu finden, dass die Ebene des Momentes schief zu den Hauptaxen des Querschnitts liegt, durch geometrische Construction.

F. K.

A. Hübner. Die Gestelle einhüftiger Portalkrane. Z. deutscher Ing. XXXV. 582-585.

Es kommt im wesentlichen auf folgende Aufgabe der Festigkeitslehre an: Von den beiden Schenkeln eines rechten Winkels ist der eine senkrecht von oben nach unten, der andere horizontal gerichtet. Der erstere ist drehbar an seinem unteren Endpunkte befestigt, dagegen ruht der Endpunkt des anderen Schenkels auf horizontaler Unterlage und kann demgemäss gleiten. Auf irgend einen Punkt des horizontalen Schenkels wirken eine verticale äussere Kraft und ein gegebenes Moment. Es soll die Ausweichung bestimmt werden, welche das aufliegende Ende des horizontalen Schenkels erfährt. F. K.

J. W. Schwedler. Ueber eisernen Oberbau. Centralbl. der Bauverw. XI. 90-96.

Uebersetzung einer älteren Arbeit des bekannten (†) Bauingenieurs, welche 1882 in den „Minutes of proceedings of the institution of civil engineers" erschien. Der für den Mathematiker interessanteste Teil ist im Jahrgange 1889 der Z. für Bauwesen viel ausführlicher behandelt worden (F. d. M. XXI. 1889. 899). Ein Referat über die vorliegende Abhandlung ist daher nicht erforderlich. F. K.

ZIMMERMANN. Beziehung zwischen Schienenquerschnitt und Schwellenabstand. Centralbl. der Bauverw. XI. 223.

Um den Zusammenhang zwischen dem Trägheitsmoment J des Schienenquerschnittes und dem Abstand a der Querschwellen zu ermitteln, geht der Verfasser aus von der Gleichung für das grösste Biegungsmoment

$$M = \frac{8B+7D}{4B+10D}\frac{Ga}{4},$$

welche er in seinem Buche „Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues" (Ernst u. Korn 1888) abgeleitet hat. Hierin bedeuten G die in der Mitte angreifende Belastung, B die Grösse $\frac{6JE}{a^3}$ und D eine Constante, welche von der Bettung abhängt. Ist k die zulässige Beanspruchung, W das Widerstandsmoment, so muss sein

$$M \leqq Wk = \frac{J}{e}k.$$

Man erhält also den kleinsten zulässigen Wert von J, indem man in die erste Gleichung für B und M die Werte $\frac{6EJ}{a^3}$ und $\frac{J}{e}k$ einsetzt und die so entstehende Gleichung nach J auflöst. Setzt man den Wert $\frac{1}{4}\frac{Ge}{k}a$, d. h. den kleinsten Wert, welchen J für einen frei aufliegenden Balken haben müsste, gleich J_0 und die von a unabhängige Grösse $\frac{1}{6}\frac{Dk}{EGe}$ gleich φ, so wird

$$J = J_0\{1-\varphi a^2+\sqrt{(1-\varphi a^2)^2+\tfrac{1}{5}\varphi a^2}\}.$$

F. K.

MOHR. Ueber die Berechnung der Kosten der Anschaffung und Erneuerung der Eisenbahnschienen. Civiling. XXXVII. 39-50.

Die Kosten werden nach den Regeln der Zinseszinsrechnung bestimmt und dann das gewonnene Resultat mit Hülfe einer graphischen Darstellung näher beleuchtet. F. K.

F. Conrad. Ueber die Festsetzung der Rücklagen zum Erneuerungsfonds der Privateisenbahnen. Glaser's Ann. XXIX. 93-99.

Die Aufgabe wird mit Betrachtungen, wie sie in der Zinseszinsrechnung angewandt werden, behandelt. F. K.

W. Launhardt. Die zweckmässigste Höhe des Personen-Fahrgeldes auf den Eisenbahnen. Hannov. Zeitschr. XXXVII. 114-122.

Da die Abhandlung auf verschiedene Aufgaben aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten führt, welche sich vielleicht als Uebungsbeispiele verwerten lassen, so soll ihr Inhalt hier kurz besprochen werden.

Kilometrische Verkehrsdichtigkeit nennt der Verfasser die in einem bestimmten Zeitraum unternommene Anzahl der Reisen, welche sich bis auf eine Entfernung x erstrecken. Ist y der Fahrpreis, so ist die in Frage stehende Grösse nach Launhardt

$$r = m\left(\frac{C-\alpha x-y}{D+\alpha x+y}\right)^2$$

oder, da y und x proportional sind,

$$x = \beta y \quad \text{resp.} \quad y = fx,$$

$$r = m\left(\frac{A-y}{B+y}\right)^2 = m\left(\frac{A-f.x}{B+f.x}\right)^2$$

und demnach die Einnahme aus Reisen von der Länge x

$$E = ry = m\left(\frac{A-fx}{B+fx}\right)^2 f.x.$$

Sind die Betriebskosten pro Kilometer b, so ist der Ueberschuss

$$U = r(y-bx) = m\left(\frac{C-\alpha x-y}{D+\alpha x+y}\right)^2 (y-bx).$$

Die beiden Aufgaben sind nun: für welchen Wert x ist E ein Maximum, und für welchen Wert y ist U bei gegebenem x ein Maximum? F. K.

J. C. Dijxhoorn. Tragfähigkeit und Durchbiegung von cylindrischen Schraubenfedern aus Stahldraht. Z. deutscher Ing. XXXV. 1397-1399.

Der Verfasser teilt eine Tabelle für die in Frage stehenden Grössen mit und giebt nach bekannten Regeln der Festigkeitslehre die Ableitung der zu Grunde liegenden Formeln.

F. K.

---

v. H. Untersuchungen über die Zugfestigkeit von Beton. W. Oestr. Ing. u. Arch. XV. 131-135. (1890.)

Mathematisch interessant ist hieran nur der Zusammenhang zwischen Biegungsmoment und Spannung für eine Substanz, bei welcher der Elasticitätsmodul für Zug und Druck verschieden sind.

F. K.

G. Lang. Zur Entwickelungsgeschichte der Spannwerke des Bauwesens. Riga 1890. XVIII + 200 S. 2 Taf.

Besprechung in W. Oestr. Ing. u. Arch. XVI. 8. F. K.

S. H. Burbury. On the collisions of elastic bodies (Abstract). Lond. R. S. Proc. L. 175-179.

Ausführlich erschienen in Lond. Phil. Trans. CLXXXIII (A) (1892). 407-422.

Cly.

J. Curie. Sur les batardeaux en maçonnerie. Assoc. Franç. Marseille XX. 279-287.

A. Mallock. Some measures of Young's modulus for crystals etc. Lond. R. S. Proc. XLIX. 380-398.

A. Mallock. Note on the instability of india-rubber tubes and balloons when distended by fluid pressure. Lond. R. S. Proc. XLIX. 458-463.

Cly.

P. Schiff. Versuch einer Anwendung der Theorie der Elasticität auf die Untersuchung der Wirkung des Schusses auf die Laffette. Petersb. Abh. LXVII. No. 3. 1-60.

C. Capillarität.

G. JÄGER. Ueber die Abhängigkeit der Capillaritätsconstanten von der Temperatur und deren Bedeutung für die Theorie der Flüssigkeiten. Wien. Ber. C. 245-270.

Die Arbeit bildet eine Fortsetzung früherer Veröffentlichungen (Wiener Ber. XCIX. 676ff., 860ff., 1028ff.) und handelt zunächst von der experimentellen Bestimmung der Capillaritätsconstanten bei verschiedenen Temperaturen. Auf die praktische Anordnung kann an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Das Princip ist folgendes: Zwei Capillaren von verschiedener Weite tauchen in dieselbe Flüssigkeit verschieden weit ein. Durch beide wird gleichzeitig und aus derselben Quelle vorsichtig Luft gepresst, bis aus den Röhren in die Flüssigkeit Blasen treten. Der Unterschied in der Eintauchtiefe wird so geregelt, dass gleichzeitig aus beiden Röhren die Blasen treten. Die Methode hat ausser ihrer grossen Empfindlichkeit den Vorteil, dass man die Temperatur an der in Betracht kommenden Stelle sehr gut bestimmen kann. Untersucht wurden bei Temperaturen von zum Teil -23° bis $+89^\circ$ Wasser, Aether, Aethylalkohol, Methylalkohol, Schwefelkohlenstoff, Chloroform, Aceton. Der Verfasser findet, dass die Capillaritätsconstante oder „diejenige Arbeit, welche notwendig ist, um die freie Oberfläche der Flüssigkeiten um die Flächeneinheit zu vergrössen“, sich völlig zufriedenstellend als lineare Function der Zeit darstellen lässt. Bei der Berechnung ist die plausible Annahme gemacht, dass zwischen der Capillaritätsconstante α und dem Unterschied der Eintauchtiefen h eine Gleichung der Form gesetzt werden kann: $\alpha(1+\beta s)\varphi(r,r') = hs$, wo β eine Constante, s das specifische Gewicht der Flüssigkeit, φ eine unbekannte Function, endlich r und r' die beiden Radien der Capillaren sind.

Der zweite Teil gilt dem Nachweise, dass die in den oben citirten früheren Arbeiten des Verfassers aufgestellten Beziehungen der Capillaritätsconstante zu anderen Grössen, insbesondere der Dampfspannung und dem specifischen Volumen des Dampfes

und der Flüssigkeit, durch die Bestimmungen des Verfassers bestätigt werden. Br.

G. Jäger. Das Gesetz der Oberflächenspannung von Lösungen. Wien. Ber. C. 493-514.

Im Anschluss an die in der vorigen Arbeit durchgeführte Bestimmung der Capillaritätsconstante in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur untersucht der Verfasser ihre Abhängigkeit von der Concentration von Lösungen. Auf Grund theoretischer Untersuchungen stellt er das Gesetz auf: Die Capillaritätsconstante „wächst proportional der Concentration, und es ist in einem und demselben Lösungsmittel die moleculare Zunahme der Capillaritätsconstante für alle gelösten Substanzen eine constante Grösse". Das Gesetz soll natürlich nur für verdünnte Lösungen gelten. Die Ergebnisse, die auf Grund der in der vorigen Arbeit beschriebenen Methode mit Chlornatrium, Chlorkalium, Chlorammonium, Chlormagnesium, Natriumnitrat, Natriumcarbonat und Zucker (der allerdings sehr herausfällt) gewonnen sind, geben in Anbetracht dessen, dass keine wirklich verdünnten Lösungen benutzt werden konnten, zufriedenstellende Bestätigungen. Auf Grund von weiteren, ergänzenden Messungen bei höheren Temperaturen findet der Verfasser noch das zweite Gesetz: „Die moleculare Erniedrigung des Temperaturcoefficienten der Capillaritätsconstante ist für alle gelösten Körper eine constante Grösse." Anhangsweise werden die Beziehungen der behandelten Grössen zu anderen physikalischen Grössen, insbesondere dem Durchmesser der Molecularsphäre, der Dampfspannung, der Erniedrigung des Gefrierpunktes u. s. w. behandelt. Dabei fällt noch der Satz ab: „Die Gesamt-, sowie jede Teil-Energie des Lösungsmittels wächst mit der Concentration der Lösung derart, dass für gleich viel Molekeln des Gelösten der Energiezuwachs eine constante Grösse ist." Br.

A. L. Selby. On the variation of surface-tension with temperature. Phil. Mag. (5) XXXI. 430-433, Nature XLIII. 549.

Der Zweck dieses Aufsatzes ist der, zu zeigen, dass alle Flüssigkeiten eine der Mendelejeff'schen Bedingungen befriedigen, die eine ideale Flüssigkeit kennzeichnen, nämlich $T_t = T_0(1-at)$, wo T_t die Oberflächenspannung bei t^0 C bedeutet. Man nehme an, die Masseneinheit der Flüssigkeit habe constantes Volumen, aber eine variable Oberfläche S und Temperatur t. Bei einer kleinen Aenderung der Variabeln ist die absorbirte Wärme $dH = kdt + ldS$, wo k die specifische Wärme bei constantem Volumen und l die latente Wärme der Ausdehnung bedeutet. Da die äussere an dem Flüssigkeitshäutchen verrichtete Arbeit $dW = TdS$ ist, so ist der Gewinn an innerer Energie:

$$dH + dW = kdt + (l+T)dS,$$

was ein vollständiges Differential ist. Auch dH/t ist ein vollständiges Differential, daher

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{1}{t}\frac{dl}{dt} + \frac{l}{t^2} = -\frac{1}{t}\frac{dk}{dS}.$$

Nun hängt k nicht von der Oberfläche ab, ausser wenn das Häutchen sehr dünn ist, und daher ist $\frac{d^2T}{dt^2} = 0$, sodass $T = c - bt$, wo c und b Functionen des specifischen Volumens sein können. Die Beweisführung wird dann darauf gerichtet, die Constanz von b und c zu zeigen. Gbs. (Lp.)

Th. Lohnstein. Ueber den Einfluss der Capillarität auf die Gleichgewichtsverhältnisse schwimmender Körper. Diss. Berlin 1891. 4°, Wiedemann Ann. XLIV. 52-73.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt in zwei Teile. Der erste, mathematische Teil beschäftigt sich mit der Integration der Differentialgleichung für die Trennungsfläche eines Gases und einer Flüssigkeit für den Fall, dass dieselbe eine Rotationsfläche ist.

Ist x der Axenabstand eines Punktes dieser Fläche und y seine verticale Coordinate, so lautet die in Frage stehende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \frac{2}{H}x(y+h),$$

oder wenn $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = u$ gesetzt wird:

$$\frac{d}{dx}(xu) = \frac{2}{H}x(y+h), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Hier sind h, H positive Constanten, $\sqrt{1-u^2}$ soll positiv genommen werden, und für $x = 0$ soll $y = 0$, $u = 0$ sein.

Dann ergeben sich für u und y Potenzreihen, und zwar ist y eine gerade, u eine ungerade Function von x. Es wird bewiesen, dass die Coefficienten kleiner sind als in der Lösung der Gleichungen:

$$\frac{H}{2}\frac{d\bar{u}}{dx} = \bar{y} + \frac{h}{2}, \quad \frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{1-\bar{u}^2}}.$$

Dann wird ferner nachgewiesen, dass es einen endlichen Wert x giebt, für welchen $u = 1$, und dass nur bis zu diesem die Reihen für y und u convergiren. Für die Untersuchungen des zweiten Teiles ist es von Wichtigkeit, aus gegebenen Daten der Fläche Werte von H und h zu bestimmen. Deshalb werden zwei Ausdrücke entwickelt, zwischen denen H liegen muss, und ferner zwei Grenzgleichungen für h.

Alsdann wendet sich der Verfasser der Betrachtung capillarer Sattelflächen zu; an Stelle der Kirchhoff'schen Gleichung

$$y = \sqrt{2H}\sin\frac{\vartheta}{2} - \frac{H}{3x}\cdot\frac{1-\cos^3\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

wird die Ungleichung entwickelt:

$$y\sqrt{1+\frac{H}{8x^2}} > \sqrt{2H}\sin\frac{\vartheta}{2} - \frac{H}{3x}\frac{1-\cos^3\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} > y\left(1-\frac{H}{8x^2}\right).$$

Die Versuche sind doppelter Art. Bei dem einen diente ein niedriges cylindrisches Glasgefäss zur Aufnahme der Versuchsflüssigkeit (in den meisten Fällen destillirtes Wasser). Dasselbe wurde auf einen kleinen, mit drei Fussschrauben versehenen Messingtisch gesetzt und dann mit Flüssigkeit bis an die innere scharfe Kante gefüllt. Mit Hülfe einer feinen Pipette wurde dann

so lange Flüssigkeit hinzugegeben, bis der Meniscus an einer Stelle verschwunden war. Bei horizontaler Lage des Randes muss das gleichzeitig für alle Punkte desselben geschehen. Zur Erreichung dieses Zustandes dienten die Schrauben. Um einen concaven Meniscus zu erreichen, wurde Flüssigkeit abgesaugt. Dann wurde die Pfeilhöhe des Meniscus gemessen und die abgesaugte Flüssigkeit gewogen.

Ein convexer Meniscus wurde mit einer Pipette hergestellt. Auch hier wurde die Pfeilhöhe gemessen und das Gewicht der Flüssigkeit, welche bis zur Herstellung einer horizontalen Begrenzung abgesaugt werden musste.

Auf Grund der Untersuchungen des ersten Abschnitts stellt der Verfasser aus den beiden gemessenen Grössen zwei Ausdrücke her, zwischen denen die Capillaritätsconstante liegt. Die beiden Grenzen, welche die Versuche für diese Grösse liefern, liegen verhältnismässig nahe bei einander und zeigen eine hinreichende Uebereinstimmung.

Der zweite Teil der Versuche betrifft das Schwimmen von Körpern. Auch diese Versuche beruhen auf der Thatsache, dass durch eine scharfe Kante den dort befindlichen Elementen einer Flüssigkeitsoberfläche eine innerhalb weiter Grenzen veränderliche Richtung gegeben werden kann. Die benutzten Körper unterschieden sich von Araeometern dadurch, dass ihr oberer cylindrischer Teil nicht geschlossen, sondern oben offen und mit einem scharfkantigen, eben abgeschliffenen Rande versehen war. Zunächst wurden diese Körper so belastet, dass sie gerade bis zum Rande eintauchten, ohne dass sich ein Meniscus bildete. Dann wurde das Gefäss mehr und mehr belastet; es bildete sich ein convexer Meniscus, der durch die äussere Randlinie der oberen Grenze hindurch ging. Bei noch weiterer Belastung trat die Flüssigkeit über die äussere Randlinie bis zum inneren Rande vor, sodass also die ganze obere Begrenzung des Apparates von der Flüssigkeit bedeckt war. Bei noch weiterer Belastung wird der Randwinkel des Meniscus, welcher jetzt durch die innere Randlinie geht, grösser und grösser, bis endlich der ganze Apparat untersinkt.

Die theoretische Untersuchung des vorliegenden Falles führt zu dem Resultat, dass das Gewicht des Apparates und das Gewicht der Luft in dem von der Oberfläche der Flüssigkeit und der durch die ebenen Teile derselben gelegten horizontalen Ebene begrenzten Raum zusammen gleich sind dem Gewicht der von dem Apparat verdrängten Flüssigkeit, vermehrt um das Gewicht derjenigen Flüssigkeitsmenge, welche den eben beschriebenen Raum ausfüllen könnte. Und zwar gilt dieses Gesetz nicht nur für kreisförmige Begrenzung des oberen Randes.

Die Versuche ergeben ein anderes Resultat, und zwar ist das Gewicht, welches erforderlich ist, um eine gewisse Depression hervorzurufen, geringer als es nach der Theorie sein müsste.

F. K.

G. VANDERMENSBRUGGHE. Sur une particularité curieuse des cours d'eau et sur l'une des causes des crues subites. Belg. Bull. (3) XXI. 327-336.

Die Oberflächenspannung des Wassers, einschränkbar, je nachdem sie durch die Ausbreitung oder Unterdrückung der freien Oberfläche begünstigt oder zerstört wird, verzögert oder beschleunigt die Schnelligkeit der Oberflächenschicht der Wasserläufe. Durch Oel kann man plötzlichen Zuwachs verringern.

Mn. (Lp.)

G. VANDERMENSBRUGGHE. Sur la propriété caractéristique de la surface commune à deux liquides soumis à leur affinité mutuelle. Belg. Bull. (3) XXI. 420-435.

Neue Thatsachen zur Stütze für den Nachweis einer Ausdehnungskraft, die an der gemeinschaftlichen Oberfläche der betrachteten Flüssigkeiten besteht. Mn. (Lp.)

L. R. WILBERFORCE. On the calculation of the coefficient of viscosity of a liquid from its rate of flow through a capillary tube. Phil. Mag. (5) XXXI. 407-414.

Bei der gewöhnlichen Methode zur Berechnung des Zähigkeitscoefficienten aus Beobachtungen über das Transpirations-Verhältnis der Flüssigkeit unter bekanntem Drucke durch eine Capillarröhre von bekannten Abmessungen nimmt man an, dass die ganze der Flüssigkeit zugeführte Energie innerhalb der Röhre in Wärme umgewandelt wird. Hagenbach's Correction, welche die Bewegung der Flüssigkeit ausserhalb der Röhre in Rechnung zieht (Pogg. Ann. CIX, 1860), besteht darin, dass man von der Höhe h, die den Druck bestimmt, die Grösse $v^2/g\sqrt[3]{2}$ abzieht, wo v die mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeit ist. Es wird gezeigt, dass bei Hagenbach's Annahmen dies v^2/g heissen müsste, ein Wert, der, wie der Verf. später gefunden hat, schon von Hrn. Finkener vorgeschlagen ist. Die Hagenbach'sche Annahme wird jedoch vom Verf. nicht als völlig richtig angesehen, und wegen des Mangels einer Lösung für diesen Fall der Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit werden einige Betrachtungen vorgebracht, welche auf die Form hindeuten, unter welcher die notwendigen Correctionen enthalten sein müssen; die Grundlagen werden aus Abhandlungen des Hrn. Osborne Reynolds in den Phil. Trans. für 1883 und 1886 entnommen; die Ergebnisse von Versuchen sind tabellarisch gegeben. Die Untersuchung ist indessen eingestellt, weil sie durch eine Arbeit des Hrn. Finkener überholt ist. Gbs. (Lp.)

K. Fuchs. Das Zerfallen freier Flüssigkeitsfäden in Tropfen. Exner Rep. XXVII. 109-117.

Das Zerfallen des freien Flüssigkeitsfadens wird als eine Wirkung der Oberflächenspannung aufgefasst. Lp.

Capitel 2.
Akustik und Optik.

A. Akustik.

W. GROSSE. Bemerkungen zur Wellenlehre. Poske Z. V. 22-24.

Elementare Betrachtungen zur Lehre von der Zusammensetzung der Wellenbewegungen. Lp.

W. T. A. EMBAGE. On a method of determining the velocities of propagation of disturbances in elastic media. Phil. Mag. (5) XXXI. 464-469.

Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung einer Störung in einem elastischen Mittel, wenn, nachdem die Störung an einem beliebigen Punkte vorübergegangen ist, die ursprüngliche Anordnung des Mittels wieder hergestellt wird, untersucht der Verf. wie folgt. Zunächst wird das in irgend einem Teile des Mittels durch den Eintritt der Störung in dasselbe erzeugte Moment abgeschätzt; es wird der Fortpflanzungsgeschwindigkeit proportional sein. Sodann werden die mittlere resultirende Kraft, die auf den betrachteten Teil des Mediums wirkt, und die Zeit, während deren sie wirkt, gefunden. Die Kraft wird die Elasticität des Mediums in sich begreifen, und die Zeit wird der Fortpflanzungsgeschwindigkeit umgekehrt proportional sein. Indem man das erzeugte Moment dem Producte aus der Kraft und Zeit gleich setzt, wird eine Gleichung zur Auffindung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit erlangt. In dem Falle der Fortpflanzung einer Reihe von Wellen, werden diese als eine Folge von einzelnen Störungen betrachtet, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird dieselbe wie für eine einzelne Störung. Die Methode wird auf longitudinale und transversale Störungen angewandt, und auch der Fall zweier Mittel wird betrachtet.

Gbs. (Lp.)

C. Chree. On some compound vibrating systems. Cambr. Trans. XV. 135-266. (1891); Cambr. Proc. VII. 94-95. (1890.) (Abstract.)

Die betrachteten schwingenden Systeme sind von concentrischen Kugelflächen oder coaxialen Cylinderflächen begrenzt, und es werden entweder lediglich radiale oder lediglich transversale Schwingungen betrachtet. Unter einem einfachen System wird eine sphärische oder cylindrische Schale aus einem einzigen isotropen Medium verstanden; in einem zusammengesetzten System werden die einzelnen Medien als durch Kugel- oder Cylinderflächen getrennt vorausgesetzt. Es wird eine Formel zur Ermittelung der Schwingungszahlen zusammengesetzter Systeme entwickelt, welche aus beliebig vielen Schichten verschiedener isotroper Medien bestehen. Das allgemeine Resultat wird benutzt, um zu ermitteln, wie sich die Höhe der verschiedenen Töne eines isotropen Mediums durch Einschaltung einer dünnen Schicht eines anderen isotropen Mediums ändert, und zwar wird diese Untersuchung für Vollkugeln, Vollcylinder, Kugel- und Cylinderschalen eingehend durchgeführt und liefert zahlreiche Ergebnisse. Ho.

G. H. C. Hartmann. Expériences de photographie balistique. Applications à l'étude des variations de la vitesse du son. Revue d'Art. XXXVII. 62-81, 397-421, 493-508.

I. Versuche ballistischer Photographie von Artillerie-Geschossen durch die Herren Mach und Salcher (in Pola und Meppen). II. Neue Versuche ballistischer Photographie durch dieselben Herren. III. Note über die Fortpflanzung des durch das Abschiessen der Geschütze erzeugten Schalles vom Hauptmann Jacob (Mémorial de l'Artillerie de la marine XIV, 1886). IV. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des durch die Feuerwaffen erzeugten Schalles vom Hauptmann Journée (Mém. prés. à l'Ac. des Sciences, 1888). V. Fortpflanzung des Schalles während des Schiessens vom Hauptmann Labouret (Mémorial de l'Art. de la marine XVI, 1888). Mathematische Erklärung der

akustischen Erscheinung. VI. Ueber die Art der Fortpflanzung des Schalles bei den Detonationen vom Obersten Sebert (Soc. franç. de Phys., 1888). VII. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des durch scharfe Schüsse erregten Schalles von E. Mach (Wien. Ber. XCVII, 1888). VIII. Schallgeschwindigkeit beim Schiessen nach den von E. Mach in Meppen angestellten Versuchen. IX. Vorgänge und Erscheinungen bei dem Ausflusse von Druckluft von P. Salcher (Mitt. aus dem Gebiete des Seewesens XVIII, 1890). „Aus dem Studium der Arbeiten, über welche wir einen Ueberblick gegeben haben, geht die Thatsache der Veränderlichkeit der Schallgeschwindigkeit beim Schiessen als völlig sicher hervor. Nicht verhält es sich so mit der Erklärung dieser Erscheinung“. Hier steht die Ansicht der französischen Forscher, dass das Geschoss in jedem Augenblick Centrum einer Schallwelle sei, der Anschauung des Hrn. Mach gegenüber, dass das Geschoss das Vehikel einer und derselben Welle sei, welche verschwinde, falls die Geschwindigkeit des Schalles mit der des Geschosses übereinstimme. Lp.

Ch. K. Wead. On the intensity of sound: A reply to a critic. Silliman Journ. (3) XLI. 232-235.

Ch. K. Wead. On the intensity of sound II. The energy used by organ pipes. Silliman Journ. (3) XLII. 21-34.

A. B. Basset. On the disturbance produced by an element of a plane wave of sound or light. Lond. M. S. Proc. XXII. 317-329.

S. Abschnitt XI, Capitel 2B, S. 1065.

W. König. Hydrodynamisch-akustische Untersuchungen I, II, III. Wiedemann Ann. XLII. 353-370, 549-563; XLIII. 43-60.

Die Kundt'schen Staubfiguren sowie alle anderen akustischen

Bewegungserscheinungen sind nichts anderes als Bewegungen fester Körper, welche durch die Vorgänge in der die Körper umgebenden Flüssigkeit hervorgerufen und unterhalten werden; und zwar ist in erster Linie die Bewegung der umgebenden Luftmasse, nicht aber die Aenderung ihrer Dichtigkeit als Ursache der Bewegung der festen Körper zu betrachten, wie sich daraus ergiebt, dass jene Bewegungen im Bauche einer Schwingung am schärfsten ausgebildet sind. Zur Erklärung der genannten Erscheinungen kann man daher von der Dichtigkeitsänderung der schwingenden Luftmasse überhaupt absehen und die Bewegungen der Körper als solche betrachten, die in einer incompressiblen, strömenden Flüssigkeit stattfinden. Dadurch gewinnt man den Vorteil, bekannte Sätze der Hydrodynamik anwenden und mittels derselben jene Bewegungen erklären zu können. Einer derartigen Erklärung der akustischen Bewegungserscheinungen sind die vorliegenden Aufsätze gewidmet.

Zunächst wird, um die drehende Kraft, welche der Flüssigkeitsdruck auf den Körper ausübt, auszuschliessen, die Bewegung einer Kugel in einer incompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit, die in geradliniger Bahn periodisch hin- und herströmt, betrachtet. In engem Anschluss an Kirchhoff's Mechanik wird der auf die Kugel ausgeübte Druck berechnet, nachher die Rechnung auf Grund der von Basset in seinem „Treatise on hydrodynamics" (1888) aufgestellten Formeln auf reibende Flüssigkeiten ausgedehnt. Die Rechnung ergiebt, dass bei den gewöhnlich vorliegenden Verhältnissen (Lycopodiumkügelchen oder Korkstückchen in der Luft) der Grad des Mitschwingens im allgemeinen ein sehr geringer ist, d. h. dass die Kugel erheblich hinter der Flüssigkeit zurückbleibt. Daraus kann man schliessen, dass die rein fortführende Wirkung der hin- und herströmenden Luftmasse zur Erklärung der Bewegung des Staubes im Schwingungsbauche einer Kundt'schen Röhre nicht ausreicht.

Im zweiten Aufsatz berechnet der Verfasser, ebenfalls in engem Anschluss an Kirchhoff, die Kräfte, welche zwei in einer bewegten Flüssigkeit vorhandene Kugeln scheinbar auf einander ausüben. Diese Kräfte hängen vom Quadrate der Geschwindig-

keit der Flüssigkeitsströmung ab; sie sind bei einer schwingenden Flüssigkeit periodisch in ihrer Grösse, aber constant in ihrer Richtung; sie können daher zu einer Fortbewegung der Kugeln Veranlassung geben. Diese Kräfte reichen zur Erklärung der Kundt'schen Staubfiguren hin. Eine genauere Discussion zeigt, dass jene Kräfte so beschaffen sind, dass sich die eigentümliche rippenförmige Anordnung der Korkteilchen in den in Rede stehenden Figuren unmittelbar aus ihnen folgern lässt.

Im dritten Aufsatz wird das Drehungsmoment betrachtet, welches ein ruhendes Rotationsellipsoid in einer stationär strömenden, reibungslosen Flüssigkeit erfährt. Dies Drehungsmoment lässt sich mittels bekannter Formeln berechnen; dasselbe hängt von dem Quadrate der Strömungsgeschwindigkeit ab, ist periodisch in seiner Grösse und hat in jeder Phase der Flüssigkeitsbewegung denselben Sinn. In Folge jenes Drehungsmoments sucht sich ein verlängertes Rotationsellipsoid mit seiner Rotationsaxe senkrecht zur Flüssigkeitsströmung zu stellen, während die Axe eines abgeplatteten Rotationsellipsoids sich in die Richtung der Strömung zu stellen sucht. Die Anwendung des letzteren Resultats auf dünne Scheiben scheint die von Rayleigh beobachtete Einstellung solcher Scheiben im Schwingungsbauche einer Luftsäule zu erklären. Nimmt man dagegen statt einer reibungslosen eine reibende Flüssigkeit an, so folgt aus den von Hrn. Oberbeck (J. für M. LXXXI; cf. F. d. M. VII. 1875. 582) aufgestellten Formeln Folgendes: Ein geradliniger stationärer Strom einer reibenden Flüssigkeit sucht, wenn nur die erste Potenz der Geschwindigkeit in Betracht gezogen wird, ein in ihm ruhendes Rotationsellipsoid nicht zu drehen, sondern nur zu verschieben, aber in einer Richtung, welche im allgemeinen nicht mit der Richtung der Flüssigkeitsströmung zusammenfällt, sondern einen bestimmten Winkel mit ihr einschliesst.

Zum Schluss erörtert der Verfasser noch kurz, wie für eine reibungslose Flüssigkeit die beschleunigenden Kräfte und die Drehungsmomente ausfallen, wenn die Bewegung nicht stationär, sondern mit der Zeit veränderlich ist. Wn.

J. Boussinesq. Sur les déformations et l'extinction des ondes aériennes, isolées ou périodiques, propagées à l'intérieur de tuyaux de conduite sans eau, de longueur indéfinie. Almeida J. (2) X. 301-332; C. R. CXII. 1337-1343.

Die theoretischen, von Hrn. v. Helmholtz (1863) und G. Kirchhoff (1868) angestellten Untersuchungen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Tönen in Röhren können nach Ansicht des Verfs. nicht benutzt werden, sobald es sich, wie in den älteren Versuchen von Regnault oder in den neueren (1890) der Herren Violle und Vautier, um Schalle handelt, die, wie die benutzten Knalle einer Pistole, nicht periodisch erfolgen, sondern von ganz beschränkter Zeitdauer sind und von erheblichen Luftverdichtungen begleitet werden. Aus diesem Grunde hat Hr. Boussinesq das Problem wieder aufgenommen; er legt den Verdichtungen und den der Reihe nach an einem beliebigen Querschnitt erzeugten Geschwindigkeiten nicht mehr pendelartige Ausdrücke in Bezug auf die Zeit bei, sondern solche, die mit einer willkürlichen Function behaftet sind, geeignet zur Darstellung der möglichen Folgen der Drucke oder Verrückungen, welche an dem Eingange der Röhre direct sich verwirklichen lassen. Das Problem ist dem einer Einzelwelle vergleichbar, das vom Verf. in einer Abhandlung des Journ. de Math. (3) IV behandelt ist (F. d. M. X. 1878. 653); doch ist kaum mehr als das Allgemeine in den Umständen der Gestaltswandlung und des Erlöschens der Welle an den Formeln leicht erkennbar. Die hauptsächlichsten unter diesen Umständen bestehen, den Beobachtungsergebnissen entsprechend, in einer unbestimmten Abplattung und in einer Verlängerung der Welle, wenigstens nach einer ersten ziemlich kurzen Periode. Zwischen dem Erlöschungs-Coefficienten und der durch die Wand verursachten Verlangsamung wird durch die Theorie eine angenäherte Beziehung geliefert, für welche die oben erwähnten Versuche von Regnault, sowie von Violle und Vautier eine gewisse Bestätigung geben. Die Wiedergabe der formelreichen Rechnungen ist nicht angängig. Lp.

O. Krigar-Menzel und A. Raps. Ueber Saitenschwingungen. Berl. Ber. 1891. 613-629; Wiedemann Ann. XLIV. 623-641.

Die Verfasser haben die Bewegung einzelner Punkte einer schwingenden Saite photographisch aufgezeichnet, indem sie die Saite quer vor einem von hinten stark erleuchteten Spalt ausspannten und das Spaltbild auf eine mit photographischem Papier überzogene, gleichförmig schnell umlaufende Trommel warfen. Die so erhaltenen zahlreichen Bilder wurden unter Zugrundelegung der allgemeinsten Gleichung für die Saitenbewegung

$$y = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\infty} \mathfrak{A}_{\mathfrak{a}} \sin\left(\mathfrak{a}\frac{\pi x}{l}\right) \sin \mathfrak{a} n (t-\tau_{\mathfrak{a}})$$

eingehend discutirt. Eine Messung verschiedener y für dasselbe x und nachherige Vergleichung der Resultate für verschiedene x ergab die relative Grösse der verschiedenen Coefficienten $\mathfrak{A}_{\mathfrak{a}}$. Die Hauptmessungen wurden an den einfachsten Figuren angestellt, welche ein Saitenpunkt zeigen kann; dieselben sind aus geradlinigen Strecken von nur zwei Richtungen zusammengesetzt, von denen die aufsteigende Richtung weniger steil ist. Von den Resultaten der Messungen seien folgende hier hervorgehoben.

Diejenigen Partialschwingungen, welche in der Nähe der Streichstelle einen Knoten haben, sind besonders stark ausgebildet, so dass sie als hohe Wellen von der dem Partialton entsprechenden Anzahl über jeder Periode der Figur lagern. Wenn die Streichstelle aus der Nähe eines wichtigeren Knotens in diesen selbst rückt, so tritt eine Unstetigkeit in der Form der Saitenbewegung auf, indem die vorher besonders stark ausgebildete Partialschwingung plötzlich ausfällt und dadurch Figuren von ganz anderem Aussehen erscheinen. Wn.

M. Kozlowski. Theorie der Schwingungen einer aus zwei rechteckigen heterogenen Streifen zusammengesetzten Membran. Abhandlungen der Krak. Akad. (2) III. 187-224. (Polnisch, 1891.)

Der Verfasser untersucht die Anwendbarkeit der von Petzval

benutzten Libri'schen Function auf die Theorie der Schwingungen fester, aus heterogenen Teilen bestehenden Körper. Er weist nach, dass das von Petzval gefundene allgemeine Integral der Differentialgleichung der Bewegung im Gebiete der Grenzschnitte zwischen den zwei besonderen Teilen einer Membran nicht genügt, er modificirt also die Petzval'sche Methode und gelangt zu Formeln, in welchen die Randbedingungen und die Art der ursprünglichen Erregung der Bewegung berücksichtigt sind.

Dn.

F. Heerwagen. Studien über die Schwingungsgesetze der Stimmgabel und über die elektromagnetische Anregung. (Schriften, herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Dorpat. VI.) Leipzig. K. F. Koehler in Commiss. 53 S. mit 2 Taf. Lex. 8°.

S. Tolver Preston. Acoustic thermometer, a suggestion. Phil. Mag. (5) XXXII. 58-60.

Der in diesem Artikel gemachte Vorschlag ist nach Angabe des Verfs. eher von theoretischem als von praktischem Interesse. Der theoretische Gedanke betrifft die wechselnde Tonhöhe eines Resonatorgefässes je nach der Temperatur des eingeschlossenen Gases und die Frage, ob dieser Wechsel des Tons gemäss der Temperatur nicht gewissermassen zur Messung derselben benutzt werden könne. Gbs. (Lp.).

B. Theoretische Optik.

G. Kirchhoff. Vorlesungen über mathematische Physik. Band II. Mathematische Optik. Herausgegeben von K. Hensel. (Mit dem Bildnisse Kirchhoff's.) Leipzig. Teubner. VIII u. 272 S. gr. 8°.

Das Erscheinen von Kirchhoff's Mechanik im Jahre 1876 erregte bei allen Fachgenossen den lebhaften Wunsch, dass der

Verfasser auch seine übrigen Vorlesungen über mathematische Physik durch den Druck weiteren Kreisen zugänglich machen möchte. Leider gab Kirchhoff den Plan, seine sämtlichen Vorlesungen zu veröffentlichen, wieder auf. Er beschränkte sich darauf, einzelne Partien, in denen seine Darstellung von der anderer Autoren besonders erheblich abwich, in Abhandlungen bekannt zu machen. So hat er aus der Optik die Theorie der Reflexion an Krystallen und die Grundzüge seiner Theorie der Lichtstrahlen 1876 und 1882 in den Abhandlungen resp. Sitzungsberichten der Berliner Akademie erscheinen lassen (cf. F. d. M. VIII. 647, XIV. 829). Trotz dieser Veröffentlichungen ist es von hohem Interesse, durch das vorliegende Werk Kirchhoff's Behandlung der ganzen Optik kennen zu lernen.

Der gesamte Stoff ist in vierzehn Vorlesungen geteilt, deren erste das Wesen des Lichtes und der Lichtbewegung in unbegrenzten, homogenen, isotropen Medien bespricht. Es folgt (Vorl. 2-4) die Einwirkung fremder Körper auf die Lichtbewegung in der schon durch die vorerwähnte Abhandlung Kirchhoff's „Theorie der Lichtstrahlen“ bekannten eigenartigen Behandlung. Unmittelbar werden daran die Grundzüge der Katoptrik und Dioptrik geknüpft. Die Vorlesungen 5-7 sind der Ableitung der Beugungserscheinungen gewidmet, während die Vorlesungen 8 und 9 die Intensität und den Polarisationszustand des reflectirten und gebrochenen Lichtes behandeln. Hierbei werden die Gründe erörtert, aus denen der Verfasser die Fresnel'sche Hypothese, nach der die Luftschwingungen auf der Polarisationsebene senkrecht stehen, verwirft, um mit F. Neumann jene Schwingungen als in der Polarisationsebene vor sich gehend anzunehmen. Die zehnte Vorlesung beschäftigt sich mit der Dispersion und Absorption isotroper Körper; den Ausgangspunkt bilden dabei die Hypothesen, die Herr v. Helmholtz seiner Theorie der anomalen Dispersion zu Grunde gelegt hat (cf. F. d. M. VI. 1874. 654). In den vier letzten Vorlesungen endlich wird die Lichtbewegung in Krystallen entwickelt. Hier sind besonders beachtenswert die Definition der Lichtstrahlen in krystallinischen Medien wie die Ableitung der für die Reflexion und Brechung an Krystallflächen

gebotenen Formeln. Mit einer Besprechung der Farbenerscheinungen, die Krystallplatten zwischen zwei polarisirenden Vorrichtungen zeigen, schliesst das Buch, das sich, ebenso wie alle Arbeiten Kirchhoff's, durch klare Darlegung der Principien, Vereinfachung der Methoden und Eleganz der Darstellung auszeichnet.

Dass Kirchhoff's Optik ganz auf dem Boden der Elasticitätstheorie steht, von der elektromagnetischen Lichttheorie aber keine Notiz nimmt, kann ihr nicht als ein Mangel angerechnet werden. Denn einerseits würde das Hereinziehen der letztgenannten Theorie mit der Einheitlichkeit der Darstellung nicht verträglich gewesen sein; andererseits fehlte es zu Kirchhoff's Lebzeiten jener Theorie noch an einer befriedigenden Begründung.

Der Herausgeber hat sich der mühevollen Arbeit unterzogen, mehrere Manuscripte Kirchhoff's sowie Nachschriften verschiedener Vorlesungen zu einem Ganzen zu verarbeiten. Es ist ihm dies vortrefflich gelungen. In einem Anhang wird genau angegeben, welche Einzelheiten den verschiedenen von Kirchhoff über den Gegenstand gehaltenen Vorlesungen entnommen sind.

Wn.

THOMAS PRESTON. The theory of light. London. Macmillan and Co. (1890.) [Nature XLIII. 53.]

H. POINCARÉ. Elektricität und Optik. Autorisirte deutsche Ausgabe von W. Jaeger und E. Gumlich. I. Band. Die Theorien von Maxwell und die elektromagnetische Lichttheorie. Berlin. J. Springer. VIII + 248 S. 8°.

Siehe Abschnitt XI, Capitel 3.

DE COLNET-D'HUART. Essai d'une théorie mathématique de la lumière, de la chaleur, de l'émission et de l'absorption des radiations calorifiques et lumineuses. Luxembourg Public. XXI. 125-230, I-IV u. 1 Taf.

A. B. Basset. On the disturbance produced by an element of a plane wave of sound or light. Lond. M. S. Proc. XXII. 317-329.

Nach dem Huygens'schen Princip kann man die Bewegung, welche eine Welle in einem Punkte P hervorruft, ansehen als hervorgebracht durch kugelförmige Wellen, welche von den einzelnen Elementen der Welle in einem früheren Stadium ausgehen. Es fragt sich dann, welche Bewegung muss man den Wellenelementen beilegen, damit die von ihnen ausgehenden kugelförmigen Wellen in P die Bewegung hervorrufen, die P wirklich ausführt? Ferner: Ist durch die resultirende Bewegung in P die Bewegung jener Wellenelemente eindeutig bestimmt, oder kann man durch verschiedenartige Verteilung von Wellenquellen auf derselben Wellenfläche in P denselben Effect hervorbringen? Diese Fragen werden hier für ebene Schall- und Lichtwellen untersucht; und es ergiebt sich, dass es durch unendlich viele verschiedene Verteilungen von Schall- und Lichtquellen auf einer Wellenebene möglich ist, in einem Punkte hinter dieser Ebene dieselbe Bewegung hervorzurufen, die dieser Punkt annehmen würde, wenn er direct von der Welle getroffen würde.

Es wird dies zuerst für ebene Schallwellen erörtert, für welche das Geschwindigkeitspotential der reelle Teil von

$$\varphi = e^{ik(at-x)}$$

ist. Die Wirkung einer solchen Welle kann dadurch ersetzt werden, dass man von allen Elementen der Ebene $x = 0$ Bewegungen ausgehen lässt, deren Geschwindigkeitspotential der reelle Teil von

$$\sigma = e^{ik(at-r)}.\frac{1}{4\pi r}\left[1+\frac{ikx}{r}\left(1+\frac{1}{ikr}\right)\right]$$

ist. r ist der Abstand des Punktes P von der Ebene $x = 0$, x ist die x-Coordinate von P. Noch allgemeiner aber kann man setzen:

$$\sigma = \frac{ike^{ikat}}{4\pi(2n+1)}\{n\psi_{n-1}P_{n-1}+(2n+1)\psi_n P_n+(n+1)\psi_{n+1}P_{n+1}\},$$

worin die P Kugelfunctionen mit dem Argumente $\frac{x}{r}$ bezeichnen,

während

$$\psi_n = \frac{e^{-ikr}}{r}\left\{1 + \frac{n(n+1)}{2ikr} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2.4.(ikr)^2} + \cdots + \frac{1.2\ldots 2n}{2.4\ldots 2n(ikr)^n}\right\}$$

ist.

Etwas complicirter werden die Resultate für ebene Lichtwellen, und zwar wird die x-Componente der von einem Elemente einer Wellenebene ausgehenden Elementarwelle, abgesehen von dem Zeitfactor,

$$u = \frac{\psi_n}{r^n}\left(\frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial x} + y\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial\chi_n}{\partial y}\right) + \frac{(n+1)\psi_{n+2}}{n+2} r^{n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_{n+1}}{r^{2n+3}}\right).$$

Darin ist ψ_n dieselbe Function wie oben, φ und χ sind allgemeine Kugelfunctionen der Coordinaten von P von dem Grade, den der Index angiebt. Für $n = 0$ z. B. wird

$$u_0 = \frac{Ae^{-ikr}}{r} + \frac{e^{-ikr}}{2r^3}\left(1 + \frac{3}{ikr} + \frac{3}{(ikr)^2}\right)[Ar^2 - 3(Ax+By+Cz)x],$$

ein Ausdruck, der sich für Punkte, die sehr weit von der Lichtquelle entfernt sind, erheblich vereinfacht und damit zu einer von Lord Rayleigh aufgestellten Formel führt. Für $n = 1$ erhält man, falls man den Constanten specielle Werte beilegt, die Stokes'schen Formeln. Wn.

A. Potier. Sur le principe d'Huygens. C. R. CXII. 220-223.

Es seien r und ϱ die Abstände zweier Punkte A und B von den Elementen $d\sigma$ einer beliebigen Fläche Σ, es sei ferner F eine willkürliche Function mit dem Argumente $r+\varrho$, so ist das über die Fläche Σ erstreckte Integral

$$\int \frac{d\sigma}{r\varrho}\left[\left(\frac{F}{r} - F'\right)\frac{\partial r}{\partial n} - \left(\frac{F}{\varrho} - F'\right)\frac{\partial \varrho}{\partial n}\right]$$

gleich 0 oder gleich $\frac{4\pi F(R)}{R}$, je nachdem A und B auf derselben Seite von Σ liegen oder durch Σ getrennt werden. R bezeichnet dabei die Entfernung AB.

Der Verfasser benutzt die vorstehende Gleichung resp. die aus ihr durch Differentiation nach den Coordinaten von A oder von B hervorgehenden, um die Componenten einer von A ausgehenden und den Punkt B treffenden Welle, welche die Form

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\partial z^{\gamma}}\left(\frac{\varphi(R+Vt)}{R}\right)$$

haben, auf doppelte Weise durch ein über die Oberfläche von Σ erstrecktes Integral auszudrücken. Die Elemente dieses Integrals geben dann an, in welcher Art fictive Lichtquellen auf der Fläche Σ verteilt werden müssen, um in B dieselbe Bewegung hervorzubringen wie die directe Welle. Wn.

J. Macé de Lépinay et Ch. Fabry. Théorie générale de la visibilité des franges d'interférence. Almeida J. (2) X. 5-20.

Die Verfasser geben in der Einleitung den Zweck ihres Aufsatzes mit folgenden Worten an: „Die zur Erzeugung von Interferenzfransen dienenden Apparate scheinen in zwei Kategorien zu zerfallen. Die einen verlangen offenbar die Begrenzung des Beleuchtungsbündels durch einen passend orientirten Spalt (Fresnel'sche Spiegel); sie liefern in jedem Abstande sichtbare Fransen. Die anderen gestatten den Gebrauch einer nach allen Richtungen ausgedehnten Quelle (Newton'sche Ringe); die Fransen, welche sie entstehen lassen, sind örtlich festgelegt. In Wirklichkeit gehören alle bekannten Interferenzapparate in eine und dieselbe Klasse, und ihre scheinbaren Unterschiede haften allein den gewissermassen ausnahmeartigen Bedingungen ihres gewöhnlichen Gebrauches an. Die Aufstellung jener Identität der Eigenschaften und der Nachweis der Hauptfolgerungen aus den allgemeinen Formeln, zu denen wir gelangen werden, bilden den Zweck dieser Arbeit." Lp.

J. Macé de Lépinay. Sur la localisation des franges des lames cristallines (lames uniaxes, minces et prismatiques). Almeida J. (2) X. 204-213.

Der Verf. hat mit Hrn. Fabry zusammen eine allgemeine Theorie der Sichtbarkeitsbedingungen für die Interferenzfransen aufgestellt (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 1058), und dabei wurde die Bemerkung gemacht, dass jene Theorie auf die Erscheinungen der chromatischen Polarisation direct anwendbar sei. Die vorliegende Studie soll die Genauigkeit dieser Behauptung kontrolliren. Zu diesem Zwecke betrachtet der Verf. den Fall dünner, prismatischer, aus einem einaxigen Krystalle geschnittener Platten. Die optische Axe wird in der Ebene der einen der beiden Flächen angenommen, entweder parallel oder normal zur brechenden Kante (Platten eines Babinet'schen Compensators). Die Fransen wurden mittels eines schwach vergrössernden Fernrohres beobachtet.

Lp.

MASCART. Sur les anneaux colorés. C. R. CXII. 407-411.

Das zur Erzeugung der Newton'schen Ringe benutzte Licht sei senkrecht zur Einfallsebene polarisirt. Dann beobachtet man, dass bei wachsendem Einfallswinkel die in der Nähe des Centrums gelegenen Ringe sich erweitern, um sich, wenn der Haupteinfallswinkel überschritten ist, wieder zusammen zu ziehen. In der Nähe des Haupteinfallswinkels bleibt der Durchmesser eines bestimmten Ringes ungeändert; durch Beobachtung seiner Ordnungszahl kann man den Haupteinfallswinkel berechnen. Die dazu dienenden Formeln ergeben sich leicht aus bekannten Formeln.

Wn.

A. A. MICHELSON. Visibility of interference-fringes in the focus of a telescope. Phil. Mag. (5) XXXI. 256-259.

A. A. MICHELSON. On the application of interference-methods to spectroscopic measurements I. Phil. Mag. (5) XXXI. 338-346.

Wenn der Gesichtswinkel eines durch ein Fernrohr betrachteten Gegenstandes kleiner ist als der einer Lichtwelle in einem Abstande gleich dem Durchmesser des Objectivs, so kann die

Gestalt des Gegenstandes nicht mehr aus derjenigen des Bildes ermittelt werden. Wenn jedoch das Objectiv durch zwei gleiche und parallele rechtwinklige Schlitze begrenzt wird, so ist die Sichtbarkeit der Interferenzfransen im allgemeinen eine periodische Function von dem Verhältnisse α, der Winkelgrösse der Quelle in der zur Länge der Schlitzen senkrechten Richtung, und α_0, der „Lösungsgrenze" (vergl. den Aufsatz „On the application of interference methods to astronomical measurements", Phil. Mag. (5) XXX). Die Periode dieser Function, mithin auch von α/α_0, kann mit grosser Genauigkeit gefunden werden; demnach kann man durch Abblendung des grösseren Teiles des Objectivs die Genauigkeit der Messung der Winkelgrösse einer kleinen oder entfernten Lichtquelle bis auf das Zehnfache, ja Fünfzigfache steigern. Wenn man ferner unter Schärfe („Definition") nicht den Anschluss der Aehnlichkeit des Bildes an den Gegenstand versteht, sondern die Genauigkeit, mit welcher die Gestalt ermittelt werden kann, so werden die Schärfe und die Genauigkeit ungefähr in demselben Verhältnisse gesteigert. In den beiden gegenwärtigen Artikeln wird die „Sichtbarkeitscurve" in ihrer Anwendung auf Messungen der angedeuteten Art und auf spektroskopische Messungen vollständig betrachtet.

Gbs. (Lp.)

A. Schuster. The elementary treatment of problems on the diffraction of light. Phil. Mag. (5) XXXI. 77-86.

Bei der üblichen elementaren Behandlungsweise der Diffractionsprobleme, der zufolge die Vorderseite der Welle in Elemente oder Zonen zerlegt wird, deren Wirkungen algebraisch addirt werden, vernachlässigt man die Phasendifferenz in der resultirenden Wirkung der ersten und der folgenden Elemente. Die Intensitäten der Diffractionsstreifen an dem Rande der Schatten, welche auf diesem Wege berechnet werden, stimmen ziemlich genau; aber die Lage der Streifen wird nicht genau gegeben. In dem vorliegenden Aufsatze wird eine Methode vorgeschlagen, welche Resultate von recht beträchtlicher Genauigkeit giebt. Der

einzige Teil derselben, der sich auf etwas ausserhalb der elementaren Kenntnisse Liegendes bezieht, ist der Satz, dass, wenn eine grosse Anzahl n von Schwingungen gleicher Amplituden und Phasen, die gleichförmig über zwei rechte Winkel verteilt sind, zu einer Resultante vereinigt werden, die Amplitude dieser letzteren $(2n/\pi)$-mal der gegebenen Amplitude ist, und die Phase in der Mitte zwischen denen der äussersten Teile liegt. Nur ebene Wellen werden betrachtet, doch können die Resultate auf andere Fälle ausgedehnt werden. Um die Amplitude bei P im Abstande p (Fusspunkt O) von der Welle zu finden, werden Kreise gezogen, sodass ihr Abstand von P gleich $p+\frac{1}{2}n\lambda$ ist, indem man die Ebene in Huygens'sche Zonen teilt. Die Wirkung zweier auf einander folgenden Zonen ist nach dem Satze von gerade entgegengesetzter Richtung, und darum kann die gesamte Wirkung in die Gestalt $m_1 - m_2 + m_3 - \cdots$ gebracht werden, wovon die Summe gleich $\frac{1}{2}m_1$ ist. (Diese Reihe wird in einer recht befriedigenden Weise in dem letzten Abschnitte der Schrift bearbeitet.) Zur Berechnung von m_1 möge die Amplitude gleich 1 sein. Wenn eine kleine Oberfläche s die Amplitude ks in P erzeugt, so wird die Centralfläche (nach dem Satze) die Amplitude $2kr^2$ hervorbringen, wo r der Radius ist ($r^2 = p\lambda$), und die ganze Vorderseite der Welle wird eine Amplitude gleich kr^2 veranlassen (die der Einheit gleich sein muss, da ja die Welle eben ist). Folglich ist $k = 1/p\lambda$, und die von s herrührende Amplitude s gleich $sa/p\lambda$, wenn a die Amplitude bei s ist. Die Wellenfront wird nun in rechteckige Elemente eingeteilt. Die Wirkung seitens eines Streifens von der Breite h und von unbegrenzter Länge, der die Projection von P auf die Wellenfront enthält, ist $h/\sqrt{p\lambda}$. Wenn nun die Wellenfront durch zwei gerade Linien begrenzt wird, so werden die Streifen durch Parallelen $M_1, M_2, \ldots$ zu ihnen in Abständen von O gebildet, und diese werden so gewählt, dass $PM_n = p + (4n-1)\lambda/8$. Auf dieser Art der Einteilung der Wellenfront beruht der besondere Wert der Abhandlung, weil die Phasen dadurch nahezu gleich werden. Die Methode wird dann auf die Berechnung der Lage und Intensität der Diffractionsfransen an dem Rande der durch ebene Grenzen

hervorgerufenen Schatten angewandt. In den Schlussbemerkungen wird hervorgehoben, dass Fresnel eher als Huygens das Verdienst hat, die Teilung der Wellenfront in der besonderen Art angegeben zu haben, die man als „Huygens'sche Zonen" bezeichnet, und es wird festgestellt, dass Verdet den Gedanken geläufig gemacht habe, dass die auf einander folgenden, nach Fresnel'scher Art geteilten Streifen Vibrationen von entgegengesetzter Phase entstehen lassen, ohne Rücksicht auf ihren Abstand vom centralen Flecke. Gbs. (Lp.)

H. Nagaoka. Diffraction phenomena produced by an aperture on a curved surface. Japan Journ. IV. 301-322.

J. M. Pernter. Ueber die Höfe und Ringe um Sonne und Mond und verwandte Erscheinungen. (Vorträge des Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien. XXXI. Jahrgang. 5. Heft.) Wien. Hölzel's Verlag. 30 S. 8°.

A. Potier. Observations sur les expériences de M. O. Wiener. Almeida J. (2) X. 101-112.

Von der Arbeit des Herrn O. Wiener: „Stehende Lichtwellen und die Schwingungsrichtung polarisirten Lichtes", über welche in F. d. M. XXII. 1890. 1033 referirt worden ist, hatte Hr. Bloch im Journal de Physique (2) X. 40-44 einen ausführlichen Bericht gegeben, und die Herren Poincaré und Cornu hatten den Gegenstand in Mitteilungen an die Akademie behandelt. Aus diesem Grunde hat es dann Hr. Potier für nützlich erachtet, diese Erörterungen für die Leser des Journals auszugsweise vorzuführen und einige Aufklärungen zuzufügen. Lp.

A. Cornu. Sur une expérience récente, déterminant la direction de la vibration dans la lumière polarisée. C. R. CXII. 186-189.

H. Poincaré. Sur l'expérience de M. Wiener. C. R. CXII. 325 - 329.

Berthelot. Remarques relatives à la communication de M. Poincaré. C. R. CXII. 329-331.

A. Cornu. Sur les objections faites à l'interprétation des expériences de M. Wiener. C. R. CXII. 365-370.

A. Potier. Remarques à l'occasion de la note de M. Poincaré sur l'expérience de M. Wiener. C. R. CXII. 383-386.

H. Poincaré. Sur la réflexion métallique. C. R. CXII. 456-459.

P. Drude. Zur Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes. Wiedemann Ann. XLIII. 177-180.

In der ersten der in der Ueberschrift genannten Arbeiten bespricht Herr Cornu die Arbeit des Herrn O. Wiener über stehende Lichtwellen, über welche F. d. M. XXII. 1890. 1033 ff. ausführlich referirt ist, und hebt vor allem die Wichtigkeit hervor, welche diese Arbeit für die Entscheidung zwischen der Fresnel'schen und der Neumann'schen Anschauung über die Richtung der Schwingung eines polarisirten Lichtstrahles habe. Nebenbei weist er auf die von der Pariser Akademie im Jahre 1868 mit dem Preise gekrönte Arbeit des Herrn Zenker hin, in der zuerst eine der Wiener'schen ähnliche Beobachtungsmethode in Vorschlag gebracht sei; doch habe Herr Wiener die Zenker'sche Arbeit nicht gekannt, auch bleibe ihm das Verdienst, die betreffenden Experimente wirklich ausgeführt zu haben.

Gegen die Schlüsse, die Herr Cornu mit Herrn Wiener aus den in Rede stehenden Beobachtungen zieht, wendet sich Herr Poincaré. Gestützt auf die Anschauungen, die er in seinen Vorlesungen über die Theorie des Lichtes dargelegt hat, führt er aus, dass man nicht wissen könne, ob photographische Wirkung an das Vorhandensein von Elongationen der Aetherteilchen oder an das von Dilatationen des Aethers geknüpft sei. Je nachdem man die eine oder die andere Annahme mache, folge aus dem Wiener'schen Experimente die Richtigkeit der Fresnel'-

sehen oder der Neumann'schen Anschauung. Bemerkt werden mag, dass die Wiener'schen Schlussfolgerungen mit ungefähr denselben Gründen bereits von Herrn Drude bekämpft sind (cf. F. d. M. XXII. 1890. 1034). Die Grundanschauung, auf die sich Herr Poincaré sowohl als Herr Drude stützen, dass in jeder Welle zwei verschiedene Schwingungszustände gleichzeitig vorhanden sind, ist allerdings von Herrn Poincaré zuerst in seinen oben erwähnten Vorlesungen dargelegt.

Die von Herrn Poincaré hervorgehobene Unbestimmtheit der Lösung suchen die Herren Cornu und Potier zu heben, indem sie auf die Thatsache verweisen, dass Herr Wiener an der Oberfläche eines reflectirenden Metallspiegels ein Minimum der photographischen Wirkung gefunden hat. Hieraus soll folgen, dass dieselben an den Zustand erster Art geknüpft sind, und dass daher die Fresnel'sche Anschauung die allein annehmbare ist. Denn bei senkrechter Incidenz an der Grenze eines Mediums mit dem Brechungsvermögen 1 (als ein solches kann ein polirter Silberspiegel betrachtet werden) sei die reflectirte Schwingung der einfallenden gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen.

Dass diese Ueberlegungen nicht zutreffend sind, erörtern die Herren Poincaré und Drude in den beiden zuletzt erwähnten Arbeiten. Herr Drude macht darauf aufmerksam, dass, wenn an dem Metallspiegel bei Zugrundelegung der Neumann'schen Anschauung auch ein Schwingungsbauch der Elongationen (des Zustandes erster Art) vorhanden sei, doch der Schwingungszustand zweiter Art (die Dilatation des Aethers) dort einen Knoten besitzen müsse, dass daher auch die Neumann'sche Anschauung dort ein Minimum der photographischen Wirkung ergebe. Herr Poincaré beweist, dass bei senkrechter Reflexion an der Grenze eines Mediums mit dem Brechungsvermögen 1 die Continuität aufhört, d. h. dass die Verrückungen zu beiden Seiten der Grenze dort nicht mehr gleich sind. Hier gilt also das Princip, das beiden Reflexionstheorien, der von Fresnel sowohl als der von Neumann, zu Grunde liegt, nicht mehr. In Folge dessen kann man aus diesem Grenzfall keinen Schluss zu Gunsten einer der beiden Theorien ziehen. Allerdings seien die den Gleichungen

der Metallreflexion zu Grunde liegenden Hypothesen bei Fresnel einfacher als bei Neumann, und das spräche für Fresnel, zu dessen Gunsten man auch die Beobachtungen Fizeau's über die Aberration heranziehen könne. Aber eine endgültige Entscheidung, welche die Fresnel'sche Theorie als die allein mögliche hinstelle, könne man keiner der bisherigen Beobachtungen entnehmen.

Die Note des Herrn Berthelot enthält nichts, was für die zur Discussion stehende Frage wesentlich wäre. Herr Berthelot macht nur darauf aufmerksam, dass nach unserer jetzigen Kenntnis der chemischen Wirkungen des Lichtes letzteres den betreffenden chemischen Process nur auslöse, nicht aber direct chemisch wirke. Wn.

E. Lommel. Ueber die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes. Münch. Ber. XXI. 181-188. Wiedemann Ann. XLIV. 311-317.

Herr Lommel geht von der schon von anderen dargelegten und jetzt wohl allgemein angenommenen Anschauung (vgl. das vorhergehende Referat) aus, dass in den verschiedenen optischen Theorien zwei analytisch gleichwertige Richtungsgrössen neben einander vorhanden sind, und trennt daher die Frage nach der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes in die folgenden beiden Fragen: 1) Welche von den beiden im geradlinig polarisirten Lichte gleichzeitig vorhandenen Schwingungen bringt die Wirkung hervor, die wir als Lichtwirkung bezeichnen? 2) Ist diese Lichtwirkung identisch mit der Verschiebung selbst oder mit der zu letzterer senkrechten periodischen Grösse? — Beide Fragen werden auf Grund von Beobachtungen, die der Verfasser 1879 über die Fluorescenz angestellt hat, dahin entschieden, dass 1) die Lichtschwingungen senkrecht zur Polarisationsebene stehen, 2) dass die Verschiebungen des fortpflanzenden Mittels die eigentlichen Lichtschwingungen sind. Wn.

Eug. Ferron. Mémoire analytique sur les divers systèmes suivis pour établir les équations fondamentales de la théorie de la lumière. Luxembourg Public. XXI. S. I-III, 1-80, I-XIV u. 1 Taf.

W. Voigt. Zur Theorie des Lichtes. Wiedemann Ann. XLIII. 410-437.

Der vorliegende Aufsatz bildet eine Ergänzung zu einer Reihe früherer Arbeiten, in denen der Verfasser die allgemeinsten Kräfte untersucht hat, die innerhalb eines aus Aether und Materie gemischten Körpers unter der Bedingung möglich sind, dass die Energie einer in jenem Körper fortgepflanzten Bewegung entweder unter allen Umständen erhalten bleibt oder unter allen Umständen vermindert wird (cf. F. d. M. XV. 1883. 900, XVI. 1884. 899 etc.). Herr Voigt gewinnt zunächst durch Beseitigung einer früher gemachten, unnötig beschränkenden Annahme eine allgemeinere Form der wirkenden Kräfte. Er nimmt an, dass die auf die Aetherteilchen ausgeübten Kräfte, sei es dass dieselben von den übrigen Aetherteilchen oder von den ponderablen Molecülen herrühren, aus Gliedern folgender Form bestehen:

$$A = \frac{\partial^h u}{\partial t^h},\quad A_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^h u}{\partial t^h}\right),\quad A_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^h u}{\partial t^h}\right),\quad \ldots.$$

Die Frage nach den allgemeinsten die Energie erhaltenden Kräften kommt dann darauf hinaus, unter welchen Bedingungen ein Aggregat von Gliedern der Form

$$\frac{\partial^h \varphi}{\partial t^h}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sein kann. Eine genauere Untersuchung der letzteren Frage führt darauf, die Kräfte in solche zu scheiden, die proportional sind mit geraden, und in solche, die proportional sind mit ungeraden Differentialquotienten nach der Zeit. Beachtet man, dass in der Optik nur periodische Functionen vorkommen, für die

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2n}} = (-1)^n \frac{u}{\tau^{2n}}$$

ist, falls $2\pi\tau = T$ die Periode bezeichnet, so lassen sich die Kräfte erster Art auf Summen reduciren, deren Glieder nur in die ersten Potenzen von u, v, w resp. von ihren Ableitungen nach den Coordinaten multiplicirt sind, während in den Kräften zweiter Art $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ an Stelle von u, v, w treten. Die Coefficienten von u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}{\partial x}$ etc. sind dabei Summen, die nach fallenden Potenzen der Quadrate der Schwingungsdauer fortschreiten. Diese Form der Coefficienten ergiebt unmittelbar die Dispersion. Ferner braucht man von den Ableitungen von u, $\frac{\partial u}{\partial t}$ etc. nach den Coordinaten nur die ersten beizubehalten. Denn schon die zweiten Differentialquotienten würden für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Gleichung vierten Grades ergeben, was nicht statthaft ist, wenn sich in derselben Richtung nicht mehr als zwei Wellen fortpflanzen sollen; und mehr als zwei Wellen würden der Erfahrung widersprechen. Somit bleiben im ganzen nur vier verschiedene Arten von Kräften übrig: 1) Kräfte des Typus A_1^{I}, die nur u, v, w selbst, 2) Kräfte A_1^{II}, die $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, 3) Kräfte A_2^{I}, die $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\cdots$, 4) endlich Kräfte A_2^{II}, welche die Ableitungen $\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}{\partial x}$ etc. enthalten.

Weiter wird nun die grosse Zahl der in den Ausdrücken für die Kraftcomponenten auftretenden Constanten durch Einführung der Bedingung, dass jene Kräfte unter keinen Umständen eine Compression innerhalb des Aethers hervorrufen sollen, auf eine geringere Zahl reducirt. Es ergiebt sich so, dass die Kräfte A_1^{II} ganz verschwinden müssen, während die drei Componenten der Kräfte A_1^{I} sich auf αu, αv, αw reduciren. Im Fall periodischer Bewegungen combiniren sich diese Glieder einfach mit der Dichtigkeit des Aethers und geben unter keinen Umständen eine Verschiedenheit der Fortpflanzung mit der Richtung. Dieser Umstand sowie die nachher folgende Betrachtung

der Grenzbedingungen machen es wahrscheinlich, dass der Coefficient α verschwindet und mit ihm die Kräfte A_1^{I}. Complicirter gestaltet sich das Resultat bei den noch übrigen Kräften. Hier ergiebt sich, dass die Kräfte A_2^{I} im allgemeinen von 12 Constanten abhängen. Die Ausdrücke für diese Kräfte stimmen weder mit den Neumann'schen noch mit den Fresnel'schen Ausdrücken überein, sind auch nicht einmal symmetrisch gegen drei auf einander senkrechte Axen; aber sie stellen sich für jede Farbe dar als die Superposition zweier Kraftsysteme, die in Bezug auf zwei im allgemeinen verschiedene Axenkreuze symmetrisch verteilt sind, und von denen das eine mit den Neumann'schen, das andere mit den Fresnel'schen Werten identisch ist. Irgend ein Grund dafür, das eine oder das andere System zu bevorzugen, ist in diesem Stadium der Entwickelung nicht vorhanden. — Die Kräfte A_2^{II} endlich müssen, falls die räumliche Dilatation verschwinden soll, rings um die Axe gleichmässig verteilt sein. Sie geben Wirkungen, welche vollständig mit denen zusammenfallen, die in einem homogenen magnetischen Felde beobachtet werden. Besondere Annahmen, die nach der früheren Theorie des Verfassers nötig waren, um die elektromagnetischen Wirkungen des Lichtes zu erklären, werden durch das hier betrachtete Kraftsystem überflüssig.

Was ferner die absorbirenden Kräfte betrifft, so erhält man dieselben, wenn man in dem Kraftsystem A_2^{I} die u, v, w durch $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ ersetzt; für die absorbirenden Kräfte gelten daher ähnliche Resultate wie für die Kräfte A_2^{I}. Nimmt man als Resultat der Beobachtung an, dass die absorbirenden Kräfte eine Symmetrie in Bezug auf ein rechtwinkliges Axenkreuz zeigen, so hat man das eine der beiden in ihnen enthaltenen Systeme von Constanten gleich Null zu setzen, darf also entweder nur die der Neumann'schen oder nur die der Fresnel'schen Auffassung entsprechenden Kräfte beibehalten.

Die Grenzbedingungen für den Uebergang des Lichtes aus einem Medium in ein anderes leitet der Verfasser ebenfalls aus dem Princip der Erhaltung der Energie her. Dasselbe erfordert,

dass ein gewisses Oberflächenintegral an der Grenze zweier durchsichtigen Medien ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sei. Das kann man auf doppelte Weise erreichen, und beide Male erhält man als Grenzbedingung, dass ein Ausdruck von der Form

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial v}{\partial t} + C\frac{\partial w}{\partial t}$$

zu beiden Seiten der Grenze denselben Wert hat. Die beiden möglichen Lösungen unterscheiden sich nur hinsichtlich der Bedeutung der Factoren A, B, C. Eine Entscheidung zwischen diesen beiden möglichen Lösungen ergiebt sich aus der Forderung, dass die Grenzbedingungen in den Verrückungen linear sind. So gelangt der Verf. schliesslich zu Grenzbedingungen, die für durchsichtige Krystalle mit den Kirchhoff'schen, für absorbirende mit den von dem Verfasser selbst und Herrn Drude aufgestellten Grenzgleichungen übereinstimmen. In der neuen Form gelten diese Grenzbedingungen auch für active Medien. Bemerkt wird noch, dass der hier eingeschlagene Weg zur Gewinnung linearer Grenzbedingungen nicht anwendbar ist, wenn man das der Fresnel'schen Anschauung entsprechende Kräftesystem benutzt.

Zum Schluss specialisirt der Verfasser seine allgemeinen Resultate, indem er von den beiden Kraftsystemen, die in den Kräften A_2^1 vereinigt sind, das eine verschwinden lässt. Daran zeigt sich, dass in dem Neumann'schen System die Verrückungen ganz dieselbe Rolle spielen wie die Rotationen in dem Fresnel'schen und umgekehrt; und zwar gilt das für beliebige krystallinische Medien, die auch absorbirend oder activ sein können. Endlich wird noch gezeigt, dass die Neumann'schen Formeln für durchsichtige Medien sich in genau dieselbe Form bringen lassen, welche die elektromagnetische Lichttheorie für durchsichtige, nicht active Medien liefert. Für absorbirende Medien besteht eine solche Uebereinstimmung nicht mehr.

In der Einleitung seiner Arbeit erörtert Herr Voigt, weshalb er die Weiterverfolgung seiner Theorie für nützlich halte, trotzdem durch die Beobachtungen von Hertz die Identität der Lichtschwingungen mit gewissen elektrischen äusserst wahrscheinlich

gemacht sei. Er weist zu dem Zwecke darauf hin, dass seine Fragestellung eine ganz allgemeine sei, die keinerlei Beschränkung über die Natur des schwingenden Mediums oder über den Ursprung der wirkenden Kräfte enthalte, dass also z. B. nichts daran hindere, letztere als elektrische zu betrachten. Wn.

B. Lorenz. Lysbevaegelsen i og uden for en af plane Lysbölger belyst Kugle. Kjöb. Skrif. (6) VI. 1-63.

Diese grosse und inhaltreiche Abhandlung enthält die Bestimmung der Bewegung des Lichts, wenn eine homogene, durchsichtige und isotrope Kugel von ebenen, parallelen Lichtwellen beleuchtet wird.

Es ist sehr schwierig, eine Vorstellung von dieser Arbeit zu geben, und das Referat muss sich im wesentlichen damit begnügen, die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf diese wichtige Arbeit hinzulenken.

Die Hauptaufgabe der Abhandlung ist, die Lösungen der vorkommenden Differentialgleichungen in Reihen zu entwickeln, welche wirklich zu numerischen Berechnungen geeignet sind. Dagegen wird nur geringes Gewicht darauf gelegt, die analytischen Eigenschaften der Functionen zu erforschen.

Da es früher geglückt ist, Entwickelungen zu finden, die sich zur numerischen Berechnung eignen, wenn der Radius der Kugel gegen die Wellenlänge klein ist, nicht aber im entgegengesetzten Falle, wo der Radius gross ist, sucht der Verf. der gegenwärtigen Arbeit eben diesen Fall zu behandeln. Die Componenten der Lichtbewegung seien ξ, η, ζ, die Coordinaten des entsprechenden Punktes x, y, z und die Zeit t. Der Verf. braucht ferner die Bezeichnungen

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \theta = \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

Dann wird die Lichtbewegung in einem jeden homogenen Medium mittels der folgenden Gleichungen ausgedrückt:

$$\Delta_2\xi-\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \quad \Delta_2\eta-\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \quad \Delta_2\zeta-\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2},$$

wo ω eine nur vom Medium, aber nicht von x, y, z abhängige

Constante ist, welche der Geschwindigkeit entspricht. Der Verf. benutzt ausserdem die Voraussetzung, dass ω einen constanten Wert innerhalb der Oberfläche der Kugel hat, einen anderen aber ausserhalb der Oberfläche.

Während die Componenten und ihre Differentialquotienten auf der Oberfläche der Kugel discontinuirlich oder unendlich sind, giebt es doch einige Combinationen dieser Grössen, die auf der Oberfläche endlich sind, und die sich nach der Stetigkeit ändern, wenn man von der einen Seite der Oberfläche zur anderen geht. Diese werden vom Verf. aufgesucht.

Ausserdem benutzt der Verf. die Grenzbedingungen, dass die Lichtbewegung überall endlich ist, und dass es im Unendlichen ausser dem gegebenen einfallenden Lichte nur Licht giebt, welches von der Kugel ausgegangen ist, aber kein anderes, welches sich gegen die Kugel bewegt.

Ein einfallender Strahl, welcher sich in der Richtung der X-Axe bewegt, ist bestimmt durch die Gleichungen

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = e^{(kt-lx)i}, \quad \zeta_0 = 0,$$

und es wird jetzt untersucht, welchen Aenderungen ein solcher Strahl mittels der Einwirkung der Kugel unterliegt. Die Schwingungscomponenten des Lichtstrahls werden nun in Reihen nach Kugelfunctionen entwickelt. Die erhaltenen Reihen eignen sich ganz gut zur numerischen Berechnung, wenn der Radius der Kugel klein ist im Vergleich mit der Wellenlänge des Lichts, während sie sonst, wenn dieses (was im allgemeinen der Fall ist) nicht stattfindet, sich nicht ohne Aenderungen dazu eignen.

Im folgenden wird der Radius der Kugel immer sehr gross angenommen.

Der nächste Abschnitt enthält Theorien für die Summation der in der Abhandlung vorkommenden Reihen, namentlich Reihen von der Form $\Sigma A_n e^{F_n i}$, wo A_n und F_n Functionen von n sind und die Reihe eine grosse, jedoch nicht unendlich grosse Anzahl von Gliedern enthält, und wo man nur annähernd diese Summation sucht.

Statt der wahren Summe der Reihe wird hier immer der Mittelwert gesucht, gegen den die Summe der Reihe conver-

girt, wenn immer mehr Glieder mitgenommen werden, und die so gefundenen Resultate werden immer im folgenden benutzt. Diese Betrachtungsweise führt zu vielen Resultaten, die im voraus bekannt sind und sich elementar herleiten lassen. Es dürfte wohl ziemlich schwierig sein, die mathematische Berechtigung derselben zu begründen. Ein Teil der neuen Resultate kann aber durch Versuche geprüft werden, und so kann also wenigstens empirisch die Zulässigkeit untersucht werden.

Mit diesen Andeutungen des Inhalts muss sich Ref. begnügen, indem er nur hinzufügt, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Lichtbewegung im ganzen Raume sowohl innerhalb wie ausserhalb der Kugel behandelt wird, und dass auch einige Fälle behandelt sind, wenn mehr als eine Kugel im Raume sich befindet. V.

E. Carvallo. Position de la vibration lumineuse; systèmes de Fresnel et de M. Sarrau. C. R. CXII. 431-433.

E. Carvallo. Compatibilité des lois de la dispersion et de la double réfraction. C. R. CXII. 521-523.

Im Anschluss an eine frühere Arbeit (cf. F. d. M. XXII. 1890. 1038) untersucht der Verfasser, welche Aenderung in der Doppelbrechung die verschiedenen optischen Theorien ergeben, wenn man in die Grundgleichungen derselben das Briot'sche Dispersionsglied einführt. Er findet, dass das Sarrau'sche Gleichungssystem das einzige von der Beschaffenheit ist, dass die aus ihm abgeleiteten Gesetze der Doppelbrechung durch die Dispersion nicht modificirt werden. Dies System, in dem die Schwingungen eines krystallinischen Mediums nur annähernd transversal sind, aber auf den Lichtstrahlen senkrecht stehen, während longitudinale Wellen fehlen, sei daher das einzig zulässige. Referent hat schon bei Besprechung der früheren Arbeit des Verfassers ausgeführt, weshalb er dessen Schlussfolgerung nicht als beweisend anzusehen vermag.

In der zweiten Arbeit wird gezeigt, dass, wenn man zu den Sarrau'schen Gleichungen statt des Briot'schen Dispersionsgliedes

Glieder hinzufügt, wie sie durch ein Mitschwingen der ponderablen Teile entstehen, diese die Gesetze der Doppelbrechung ebenfalls nicht ändern. Die erwähnten Glieder sind dieselben, die Herr v. Helmholtz seiner Theorie der anomalen Dispersion zu Grunde legt, nur dass hier die Glieder, welche eine Absorption ergeben, fortgelassen sind. Wn.

E. Carvallo. Sur la position de la vibration lumineuse et les équations du mouvement de l'éther. Almeida J. (2) X. 53-61.

Nachtrag zu der grossen Abhandlung, über die in F. d. M. XXII. 1890. 1038 berichtet ist. Die Untersuchung des sogenannten Briot'schen Terms im Doppelspat soll nach dem Verf. beweisen, dass bei einem geradlinig polarisirten Strahl die Schwingung in einem Azimut senkrecht zur Polarisationsebene stattfindet. Ob aber die Schwingung, streng genommen, in der Wellenebene liegt, wie Fresnel meint, oder mit dieser Ebene einen kleinen Winkel bildet, wie nach der Theorie von Sarrau, das ist die Frage, die jetzt aufgenommen wird. Könne man auch die Lage der Schwingung noch nicht absolut feststellen, so solle gezeigt werden, dass wenigstens eine sehr starke Mutmassung zu Gunsten der Gleichungen des Hrn. Sarrau spreche, und dass kaum zwischen diesen Gleichungen und der Fresnel'schen Hypothese zu schwanken sei, welche letztere die Schwingung genau transversal annimmt. Lp.

K. Hensel. Anwendung der Theorie der Modulsysteme auf ein Problem der Optik. J. für Math. CVIII. 140-143.

Das Problem, um das es sich handelt, ist folgendes: Welche Relationen müssen zwischen den Constanten des Potentials F der elastischen Kräfte bestehen, damit der elastische Körper der Lichtäther sein kann, d. h. damit in ihm von den drei zu jeder Fortpflanzungsrichtung gehörenden Wellen zwei transversal sind? Das genannte Problem lässt sich, wie bekannt, auf das andere zurückführen: Welche Form muss eine homogene Function zwei-

ten Grades F der sechs Argumente $\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, \xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12}$ haben, damit nach der Substitution

$$(1) \qquad \xi_{ii} = \lambda_i^2, \quad \xi_{ik} = 2\lambda_i\lambda_k,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 2V\lambda_i$$

werde? Letztere Aufgabe wird hier dadurch gelöst, dass der Rest von F für das Divisorensystem

$$(3) \qquad M \sim (\xi_{ii} - \lambda_i^2,\ \xi_{ik} - 2\lambda_i\lambda_k) \qquad (i \gtrless k)$$

resp. für ein äquivalentes System betrachtet wird. Bei passender Wahl dieses äquivalenten Systems ergiebt sich die Lösung der Aufgabe mittels einfacher Schlüsse. Das Resultat selbst ist bekannt (vgl. Kirchhoff's Optik). Wn.

E. Beltrami. Sulla teoria generale delle onde piane. Palermo Rend. V. 227-235.

Zu Kirchhoff's Untersuchungen über ebene Wellen in einem homogenen elastischen Medium („Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel", Abh. der Berl. Akademie 1876, F. d. M. VIII. 1876. 647, und Mathematische Optik, Leipzig 1891, Vorlesung XI und XII) macht Herr Beltrami die folgenden interessanten Bemerkungen.

1) Kirchhoff geht aus von der Betrachtung geradliniger Schwingungen, nimmt also die unendlich kleinen Verrückungen u, v, w des Punktes x, y, z proportional derselben Function σ von der Zeit t und von

$$s = lx + my + nz$$

an und zeigt darauf, dass es drei auf einander senkrechte Richtungen giebt, in denen solche Schwingungen stattfinden können. Um die hierin liegende Voraussetzung zu vermeiden, lässt Herr Beltrami u, v, w zunächst unbestimmt und beweist, dass es bei jeder ebenen Welle drei auf einander senkrechte Richtungen giebt, in denen die Schwingungen geradlinig sind.

2) Für eine ebene Welle mit geradlinigen Schwingungen definirt Kirchhoff die Strahlenrichtung S, indem er nachweist, dass nur für die Ebenen, welche parallel sind der Richtung S,

deren Richtungscosinus den partiellen Ableitungen des Potentials F':

$$\frac{\partial F'}{\partial l}, \quad \frac{\partial F'}{\partial m}, \quad \frac{\partial F'}{\partial n}$$

proportional sind, die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit des auf die Flächeneinheit bezogenen Druckes verschwindet, der auf ein Element einer solchen Ebene von einer Seite her ausgeübt wird. Diese Definition lässt sich nach Herrn Beltrami zweckmässig durch einen Satz aus der allgemeinen Theorie des Druckes begründen, welcher besagt, dass zu jeder von einem Punkte O eines elastischen Mittels ausgehenden Geraden Q eine, und nur eine, ebenfalls von O ausgehende Gerade R gehört, sodass der Druck auf irgend ein Flächenelement ω' in O, welches durch R gelegt wird, senkrecht auf Q steht.

3) Die Richtungscosinus des Strahls sind auch proportional den partiellen Ableitungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V:

$$\frac{\partial V}{\partial l}, \quad \frac{\partial V}{\partial m}, \quad \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Da nun die Gleichungen

$$x = \frac{\partial V}{\partial l}, \quad y = \frac{\partial V}{\partial m}, \quad z = \frac{\partial V}{\partial n}$$

den Berührungspunkt der Enveloppe aller Ebenen

$$lx + my + nz = V,$$

wo l, m, n als variabel betrachtet werden, mit der Ebene (l, m, n) ergeben, so gilt das Theorem: Der Berührungspunkt der Enveloppe mit jeder der Wellenebenen befindet sich immer auf dem zu dieser Ebene gehörenden Strahl.

4) Definirt man Ebenencoordinaten ξ, η, ζ durch

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0,$$

so erhält man die Coordinaten der Wellenebene

$$lx + my + nz = V$$

vermöge der Gleichungen:

$$l = -V\xi, \quad m = -V\eta, \quad n = -V\zeta.$$

Um daher die Gleichung der Wellenfläche aufzustellen, hat man nur in der kubischen Gleichung für V^2:

$$\begin{vmatrix} L-V^2 & N' & M' \\ N' & M-V^2 & L' \\ M' & L' & N-V^2 \end{vmatrix} = 0,$$

in der L, M, N, L', M', N' homogene Functionen zweiter Dimension von l, m, n sind, l, m, n, V^2 bez. durch ξ, η, ζ, 1 zu ersetzen und erkennt so, dass die Wellenfläche für das allgemeinste elastische Medium eine Fläche sechster Klasse ist. St.

C. Raveau. Sur la théorie de la lumière. C. R. CXII. 853-855.

C. Raveau. Sur la surface d'onde dans les cristaux. C. R. CXII. 1056-1058.

In dem ersten Aufsatz zeigt der Verfasser, dass man den Maxwell'schen Ausdruck für die Gesamtenergie in der Volumeneinheit eines homogenen Mediums auf doppelte Weise in die Summe zweier Ausdrücke zerlegen kann, deren einer als kinetische, der andere als potentielle Energie angesehen werden kann. Die eine Art der Zerlegung führt auf solche Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie, die den Sarrau'schen Gleichungen der elastischen Theorie analog sind, während man durch die zweite Zerlegung zu Gleichungen gelangt, die denen von Mac Cullagh, Neumann und Lamé entsprechen. Dabei entspricht die magnetische Kraft nicht dem Mac Cullagh'schen Vector, sondern der Ableitung des letzteren nach der Zeit.

Der zweite Aufsatz enthält allgemeine Erörterungen über die Beziehungen zwischen den verschiedenen mechanischen Lichttheorien einerseits und der elektromagnetischen Theorie andererseits. Während die Resultate der ersteren Theorie mit der Erfahrung nur so lange übereinstimmen, als es sich um Körper handelt, deren magnetische Eigenschaften wenig hervortreten und nicht von der Richtung abhängen, ist die elektromagnetische Theorie von jener Voraussetzung unabhängig, und daher kommt ihr eine grössere Allgemeinheit zu.

Ohne Ableitung werden noch einige Resultate, zu denen die letztgenannte Theorie führt, mitgeteilt; von diesen mag das fol-

gende erwähnt werden: Die Wellenfläche von Krystallen, die eine starke elektrische und magnetische Anisotropie besitzen, ist von der Fresnel'schen Wellenfläche verschieden. Wn.

E. Cesàro. Sur certains plans réfringents qui, dans les cristaux biaxes peuvent, pour une onde plane incidente, donner outre un cône creux de rayons, un rayon lumineux distinct. Belg. Bull. (3) XXII. 503-512.

C. Lagrange. Rapport. Ibid. 431-434.

Singulärer Fall der konischen Brechung. Mn. (Lp.)

W. Walton. On the magnitudes of conjugate ray-velocities in a biaxis crystal and their inclination to each other. Quart. J. XXV. 182-185.

Denkt man an die beiden Mäntel einer Fresnel'schen Wellenfläche parallele Tangentialebenen gelegt, so heissen die nach den Berührungspunkten derselben gezogenen Radien r_1 und r_2 conjugirte Strahlen. Es handelt sich darum, aus den Richtungscosinus der Normalen $r_1^2+r_2^2$, $r_1^2r_2^2$ und den Cosinus des Winkels zwischen r_1 und r_2 zu berechnen. Die Rechnung selbst stützt sich auf bekannte Formeln und bietet zu weiteren Bemerkungen keinen Anlass. Wn.

Issaly. Optique géométrique. Mémoire sur une surface d'ondes réfléchies corrélative de celle de Fresnel, et sur la double série de surfaces d'ondes moyennes dont elle est la limite. Bordeaux Mém. (4) II. 339-380.

Der Verfasser ist durch seine Untersuchungen über Pseudoflächen (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 819) auf eine Art von Wellenflächen geführt, die in ähnlicher Weise aus einem einschaligen oder zweischaligen Hyperboloid entstehen, wie die Fresnel'sche Wellenfläche aus dem Ellipsoid. Die Gleichung einer solchen

Fläche ist

$$(1)\quad (rx^2+py^2+qz^2-2pqyz-2qrxz-2rpxy)(x^2+y^2+z^2) -2(ryz+pzx+qxy)-1 = 0,$$

während das zugehörige Hyperboloid

$$(2)\quad 2(ryz+pzx+qxy) = 1$$

ist. Die Fläche (1) besteht, falls das erzeugende Hyperboloid (2) einschalig ist, aus einer den Anfangspunkt umgebenden geschlossenen Fläche und zwei in entgegengesetzten Octanten liegenden, sich ins Unendliche erstreckenden Mänteln. Ist das Hyperboloid zweischalig, so besteht die Fläche aus einem einzigen sich ins Unendliche erstreckenden Flächenstück. Von dieser Fläche, die der Verfasser „surface spécifique des ondes réfléchies" nennt, wird gezeigt, dass sie stets zwei reelle optische Axen besitzt; die Lage derselben wird bestimmt. Nachdem noch untersucht ist, was aus der Fläche wird, wenn zwei der Coefficienten p, q, r gleich werden, oder wenn einer derselben verschwindet, wird eine Reihe andrer Flächen betrachtet, die als „ondes moyennes réfléchies" bezeichnet werden. Zwischen ihnen und der Fläche (1) findet eine ähnliche Beziehung statt, wie sie der Verfasser früher (cf. F. d. M. XXII. 1890. 1045) zwischen der Fresnel'schen Wellenfläche und gewissen zwischen den beiden Mänteln derselben liegenden andern Flächen aufgestellt hatte. Es wird noch der Zusammenhang der Fläche (1) mit den Malus'schen Kugeln erörtert, und schliesslich sucht der Verfasser seine Bezeichnung der in Rede stehenden Fläche, die nach seiner Ansicht in gewissen Problemen der Krystalloptik auftritt, zu rechtfertigen. Wn.

S. Czapski. Ueber die Doppelbrechung schnell gekühlter Glasplatten. Wiedemann Ann. XLII. 319-331.

Es wird die dioptrische und Interferenzwirkung experimentell untersucht, welche ein schnell gekühltes Glasstück auf ein es ausfüllendes und durchsetzendes weites Lichtbüschel ausübt. Zur Deutung der Beobachtungen werden einfache theoretische Ueberlegungen angestellt. Wn.

E. Carvallo. Sur la polarisation rotatoire. C. R. CXIII. 846-849.

Zur Erklärung der Lichtbewegung in einem die Polarisationsebene drehenden Medium, in dem sich eine Welle senkrecht zur Axe z fortpflanzt, geht der Verfasser von folgenden Grundgleichungen aus, deren erste sich auf den Aether bezieht, während die zweite für die ponderablen Teilchen gilt:

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + a(\xi_1 - \xi) + ib \frac{\partial(\xi_1 - \xi)}{\partial z},$$

$$\varrho_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = a(\xi - \xi_1) - c\xi_1.$$

Darin sind ξ_1 und ξ nicht die Componenten der beiden Elongationen, sondern die diese Elongationen darstellenden Vectoren selbst. Der Factor i bezeichnet, wie bei der Aequipollenzenrechnung von Bellavitis, symbolisch, dass der betreffende Vector als um $+\frac{1}{2}\pi$ gedreht angesehen werden soll. Die Lösung obiger Gleichungen giebt für ξ zwei symbolische Ausdrücke, die circular polarisirten Strahlen mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten entsprechen; aus ihrer Zusammensetzung resultirt eine ebene Welle mit Drehung der Polarisationsebene. Wn.

A. Hussell. Ueber die Drehung ultraroter Strahlen im Quarz. Wiedemann Ann. XLIII. 498-508.

Nach bekannter Methode wird die Gestalt der Interferenzstreifen ermittelt, die sich ergeben, wenn Licht durch ein Fresnel'sches Triprisma zwischen zwei Nicol'schen Prismen geht, und wenn von dem austretenden Licht durch ein Prisma oder ein Gitter ein Spectrum entworfen wird. Die im Spectrum erscheinenden Streifen werden benutzt, um die Drehungswinkel für die einzelnen Fraunhofer'schen Linien zu bestimmen, für die ultraroten Strahlen unter Zuhülfenahme der Phosphorographie. Wn.

A. Potier. Sur le principe du retour des rayons et la réflexion cristalline. Almeida J. (2) X. 349-357.

Wenn eine Lichtquelle A von der Leuchtkraft 1 durch ein beliebiges optisches System hindurch in einem Punkte B eine Beleuchtung e hervorruft, so erzeugt eine Quelle gleicher Leuchtkraft von B aus dieselbe Beleuchtung in A. Die Bestätigung dieses Satzes gelingt für geradlinig polarisirtes Licht sowohl bei völliger Auslöschung als auch bei Färbungen. Der Versuch glückt auch, wenn das Licht an krystallinischen Substanzen Reflexionen erfahren hat, ferner noch unter Bedingungen, bei denen die Reflexion eine bedeutende elliptische Polarisation hervorgebracht hat. Der Verf. zeigt, dass die von MacCullagh für die krystallinische Reflexion aufgestellten Formeln dieser von Hrn. Fr. Neumann für den Kalkspat vermuteten, von Hrn. Cornu allgemein ohne Beweis und nur für die Reflexion ausgesprochenen Bedingung genügen. Zum Schlusse wird bemerkt, dass diese Resultate sich auf eine beliebige Anzahl von krystallinischen Reflexionen oder Brechungen erstrecken. Lp.

N. Sluginoff. Zur Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes. Phys. Ges. St. Petersb. XXIII. 1891. 427-430.

P. Drude. Ueber die Reflexion und Brechung ebener Lichtwellen beim Durchgang durch eine mit Oberflächenschichten behaftete planparallele Platte. Wiedemann Ann. XLIII. 126-157.

Der Verfasser hatte bereits früher eine Untersuchung über die Wirkung von Oberflächenschichten auf die Reflexion an einer Ebene angestellt (Wiedemann Ann. XXXVI, cf. F. d. M. XXI. 1889. 1077). Hier wird in derselben Weise die Reflexion und Brechung an zwei Grenzen zwischen drei verschiedenen Medien, an denen beliebige Oberflächen- oder Uebergangsschichten vorhanden sein können, behandelt. Der Verfasser geht dazu von dem allgemeineren Problem aus, bei dem das Licht durch n parallele Grenzen zwischen $n-1$ absorbirenden Medien geht, d. h. solchen, welche durch complexe Werte des Brechungsindex charakterisirt sind. Als Grenzbedingungen werden folgende an-

genommen; Gleichheit der Verrückungen zu beiden Seiten der Grenze und Gültigkeit des Kirchhoff'schen Princips, nach dem die an der Grenze geleistete Arbeit der auf den Aether wirkenden Kräfte verschwinden muss. Aus diesen Grenzbedingungen werden die Amplituden für die Componenten des an der ersten Grenzfläche reflectirten und des aus der letzten austretenden Lichtes abgeleitet, und in die sich ergebenden Ausdrücke werden schliesslich die Bedingungen eingeführt, dass die Dicken aller Zwischenschichten mit Ausnahme einer einzigen sehr klein sind. In den resultirenden Formeln treten vier für jede der beiden Oberflächenschichten charakteristische Grössen auf, von denen aber nur drei unabhängig sind.

Specialisirt man diese Formeln dadurch, dass man auch die Dicke der letzten Zwischenschicht als sehr klein annimmt, d. h. dass man sich auf die Reflexion an einer Ebene mit Oberflächenschichten beschränkt, und betrachtet die Verhältnisse der beiden reflectirten und der beiden gebrochenen Amplituden, so ist in dieser nur eine einzige, von der Natur der Oberflächenschicht abhängende Constante enthalten. Auch gelingt es dem Verfasser, das Amplitudenverhältnis der reflectirten Componenten genau auf die Form zu bringen, welche die Cauchy'sche Reflexionstheorie ergiebt. Hier findet also der Cauchy'sche Ellipticitätscoefficient eine Deutung durch die Natur der Oberflächenschicht. Doch differirt die für die totale Reflexion gewonnene Formel von der Cauchy'schen.

Es wird noch eine untere Grenze für die Dicke der Oberflächenschicht bestimmt. Dann kehrt der Verfasser zu den allgemeineren Formeln, bei denen die eine Zwischenschicht eine endliche Dicke hatte, zurück und wendet dieselbe auf verschiedene Fragen an, insbesondere auf die, wie man durch Beobachtungen den Brechungsexponenten der Oberflächenschicht bestimmen, ferner wie man die Wirkung der Oberflächenschicht eliminiren und die wirklichen Constanten eines absorbirenden Mediums bestimmen kann. Hinsichtlich dieser Details wie auch der abgeleiteten Formeln selbst müssen wir auf das Original verweisen.

Wn.

P. DRUDE. Ueber die Brechung des Lichtes durch Metallprismen. Wiedemann Ann. XLII. 666-673.

Die Brechung des Lichtes durch ein absorbirendes Prisma ist zuerst von Herrn W. Voigt untersucht (cf. F. d. M. XVI. 1884. 908). Doch sind die Formeln, zu denen der genannte Autor gelangt ist, für die Anwendung auf praktisch vorkommende Fälle zu complicirt, falls der Einfallswinkel nicht sehr nahe gleich Null ist. Herr Drude nimmt deshalb die Aufgabe von neuem auf und gelangt dadurch zu einfacheren Resultaten, dass er von vorn herein den Prismenwinkel als sehr klein annimmt, während der Einfallswinkel beliebig gross sein kann. Diese Annahme ist stets zulässig, weil sonst das Prisma undurchsichtig wird. Es ergiebt sich folgendes Resultat: Ist φ der Einfalls-, φ' der Austrittswinkel, γ der sehr kleine Prismenwinkel, n der Brechungs-, $\varkappa$ der Absorptionscoefficient des Prismas, und bezeichnen n_0 und n_2 die Brechungsexponenten des ersten und letzten Mediums, so ist

$$\sin\varphi' = \frac{n_0}{n_2}\left[\sin\varphi - \gamma\frac{n}{n_0}\left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\frac{n_0^2}{n^2(1+\varkappa^2)}\right)\right].$$

Das Snellius'sche Brechungsgesetz würde für kleine γ

$$\sin\varphi' = \frac{n_0}{n_2}\left[\sin\varphi - \gamma\frac{n}{n_0}\sqrt{1 - \sin^2\varphi\frac{n_0^2}{n_2^2}}\right]$$

ergeben. Wn.

R. SISSINGH. Ueber das Kerr'sche magneto-optische Phänomen bei äquatorialer Magnetisirung an Eisen. Wiedemann Ann. XLII. 115-141.

Das Kerr'sche Phänomen besteht darin, dass bei der Reflexion parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes durch magnetisches Eisen im reflectirten Lichte neben der von der metallischen Reflexion gelieferten Componente eine senkrecht zu letzterer polarisirte magneto-optische entsteht. Die vorliegende Arbeit ist einer genaueren experimentellen Untersuchung der genannten Erscheinung für den Fall gewidmet, dass die Magnetisirung des Eisens parallel zur Einfallsebene und zur

spiegelnden Fläche erfolgt. Ohne Ableitung werden dabei die Formeln mitgeteilt, die zur Bestimmung der Amplitude und Phase der magnetischen Lichtcomponente dienen; und schliesslich werden die Beobachtungen mit den Resultaten verglichen, welche die elektromagnetische Theorie der magnetischen Reflexion von der in Rede stehenden Erscheinung liefert. Wn.

A. B. Basset. On the reflexion and refraction of light at the surface of a magnetised medium. Lond. Phil. Trans. CLXXXII. 371-399.

Der Zweck dieser Abhandlung ist, zu ermitteln, wie weit die elektromagnetische Theorie des Lichtes, wie sie gegenwärtig entwickelt wird, dazu geeignet ist, eine theoretische Erklärung der Kerr'schen Versuche (Phil. Mag. 1877 und 1878) über die Einwirkung des Magnetismus auf das Licht zu geben.

Cly. (Lp.)

A. Breuer. Uebersichtliche Darstellung der mathematischen Theorien über die Dispersion des Lichtes. II. Teil: Anomale Dispersion. Erfurt. B. Bacmeister. 54 S. mit 1 Taf. 8°.

W. de W. Abney. The numerical registration of colour. Lond. R. S. Proc. XLIX. 227-233. Cly.

Report of the Committee ... appointed to prepare a new series of wave-length tables of the spectra of the elements and compounds. Brit. Ass. Rep. 1891. 161-263.

Diese Tafeln betreffen das Eisen (Bogenspectrum) und die tellurischen Linien des Sonnenspectrums. Gbs. (Lp.)

W. de W. Abney. On the limit of visibility of different rays of the spectrum. Lond. R. S. Proc. XLIX. 509-518.

Cly.

T. Pelham Dale. On certain relations existing among the refractive indices of the chemical elements. Nature XLIII. 118.

Bericht über einen Vortrag in der Londoner Physikalischen Gesellschaft. Der Quotient aus der Brechbarkeit $\mu - 1$ und aus der Dampfdichte d ist gleich einer Constante, multiplicirt mit einer gewissen ganzen Zahl; u. s. m. Lp.

H. Kayser. Ueber den Ursprung des Banden- und Linienspectrums. Wiedemann Ann. XLII. 310-318.

Nach Ansicht von Wüllner soll für den Uebergang des Bandenspectrums eines Elementes in das Linienspectrum die Dicke und Dichte des emittirenden Dampfes von Einfluss sein. Der Verfasser erörtert auf Grund verschiedener Experimente, weshalb er diese Ansicht für eine irrige hält. Als Grund jenes Uebergangs müsse man notwendigerweise eine Dissociation des Molecüls annehmen. Wn.

H. Becquerel. Sur les lois de l'intensité de la lumière émise par les corps phosphorescents. C. R. CXIII. 618-623, 672.

Der Verfasser berichtet über Beobachtungen, die er über die Aenderung der Intensität des von phosphorescirenden Körpern ausgesandten Lichtes angestellt hat. Dabei leitet er eine einfache Beziehung ab zwischen der Intensität und der Zeit, die seit dem Beginn der Lichterregung des phosphorescirenden Körpers verflossen ist. Indem er für die Verschiebung eines schwingenden Teilchens die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + ku \mp \gamma \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 0$$

zu Grunde legt, findet er zwischen der Amplitude u_n der n^{ten} Schwingung und der Anfangsamplitude u_0 die Gleichung

$$u_n = \frac{u_0}{1 + n\frac{4}{3}\gamma u_0}.$$

Da n der Zeit proportional ist, so folgt daraus für die Intensität i:

$$i = Au_n^2 = \frac{1}{(a+bt)^2}.$$

Für Körper, die aus verschiedenen Substanzen bestehen, wird statt der vorstehenden die Formel

$$i = \frac{1}{(a+bt)^2} + \frac{1}{(a'+b't)^2} + \cdots$$

angenommen. Endlich wird die Gleichung (1) für gewisse Körper dahin abgeändert, dass an Stelle von $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ gesetzt wird $\left(\frac{du}{dt} - \frac{dU}{dt}\right)^2$, wo $U = A\cos kt$ eine gegebene Function ist.

Wn.

H. v. Helmholtz. Kürzeste Linien im Farbensystem. Berl. Ber. 1891. 1071-1083.

Für die Deutlichkeit dE des Unterschiedes zweier Farben, von denen die eine aus den Quantis x, y, z der (physiologischen) Urfarben zusammengesetzt ist, die andere dagegen aus $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, nimmt Herr v. Helmholtz die Formel an:

$$dE^2 = \left(\frac{dx}{a+x}\right)^2 + \left(\frac{dy}{b+y}\right)^2 + \left(\frac{dz}{c+z}\right)^2.$$

Construirt man nun die Farbencurve, in der an Stelle von x, y, z die Grössen

$$\xi = \log(a+x), \quad \eta = \log(b+y), \quad \zeta = \log(c+z)$$

als Coordinaten angesehen werden, so werden in diesem Coordinatensystem sämtliche kürzeste Farbenreihen durch gerade Linien dargestellt. Geht man aber zu dem ursprünglichen System x, y, z zurück, so gehen die Geraden in krumme Linien über. Die letzteren werden eingehend discutirt und auf verschiedene Fragen der physiologischen Optik angewandt.

Wn.

C. Geometrische Optik.

A. Steinheil und E. Voit. Handbuch der angewandten Optik. I. Band. Leipzig. B. G. Teubner. VI + 314 S. gr. 8° mit 7 Figurentafeln.

Das vorliegende Handbuch ist zum Gebrauche für praktische Optiker bestimmt; es soll dieselben befähigen, einmal die Leistungen fertiger optischer Systeme zu prüfen, sodann solche Systeme streng zu berechnen und so anzuordnen, dass der jeweilig erstrebte Zweck möglichst vollkommen erreicht wird. Hinsichtlich der letzteren Aufgabe war der Praktiker bisher auf Klügel's vortreffliche Dioptrik angewiesen, ein Buch, das aber nur die Arbeiten vor Fraunhofer zusammenfasst. In ähnlicher Weise werden in dem vorliegenden Buche die Resultate der neueren Arbeiten, soweit sie eine directe Verwertung zulassen, resp. soweit sie in der Praxis wirklich erprobt sind, zusammenhängend dargestellt. Vor allem sind in dem Buche auch die Erfahrungen niedergelegt, welche der eine der Verfasser in seinem Institute (O. A. Steinheil, Söhne) mühsam erworben hat. Es wird dargelegt, welche Strahlen ausgewählt werden müssen, um bei möglichst geringer Zahl derselben über die Beschaffenheit der Bilder zweier Objectpunkte, eines in der Axe, das andere seitlich davon, genau orientirt zu sein, und ferner, in welcher Reihenfolge die Bedingungen eingeführt werden müssen, um beide Bilder möglichst gut vereinigt zu erhalten. Dabei wird durchweg nur die Kenntnis der Elementarmathematik vorausgesetzt; umfangreiche mathematische Entwickelungen werden vermieden und nur die betreffenden Resultate anderen Arbeiten entnommen.

Das ganze Werk ist auf drei Bände berechnet, von denen hier der erste vorliegt. Derselbe hat folgenden Inhalt:

Cap. I. Gesetze der Reflexion und Brechung. Sehr ausführlich werden die Methoden zur Bestimmung der Brechungsindices sowie des Zerstreuungsverhältnisses zweier Glassorten auseinandergesetzt.

Cap. II. Fundamentaleigenschaften eines dioptrischen Systems. Es werden die durch die Gauss'sche Theorie gewonnenen Resultate zusammengestellt und Folgerungen aus ihnen gezogen; ferner wird die Bestimmung der Fundamentalpunkte gelehrt.

Cap. III. Anforderungen an ein wirkliches Linsensystem und Aufzählung der zu hebenden Fehler.

Cap. IV. Berechnung einer Linse und Discussion ihrer Bildfehler. Hier werden die Formeln für die trigonometrische Durchrechnung der verschiedenen Strahlen (Axen- und Randstrahlen, Strahlen ausser der Axe in der Axenebene, Strahlen ausser der Axenebene) zusammengestellt und an praktischen Beispielen erläutert.

Cap. V. Berechnung achromatischer zweilinsiger Objective. Dabei werden insbesondere die Bildfehler eines Objectpunktes eingehend discutirt.

Dem eigentlichen Texte, der mit S. 204 endet, sind vier Beilagen (S. 205-314) beigegeben, deren erste die in dem Buche gebrauchten Bezeichnungen der wichtigsten Formeln übersichtlich zusammenstellt. Sodann sind zwei ältere Abhandlungen aus den Abhandl. Bd. V. resp. aus den Sitzungsberichten der Münchener Akademie für 1866 wieder abgedruckt, eine von C. A. v. Steinheil und L. v. Seidel: „Ueber die Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisses verschiedener Medien", die zweite von L. v. Seidel: „Trigonometrische Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichtes an centrirten sphärischen Flächen." Die vierte Beilage endlich giebt eine Tabelle der Unterschiede zwischen Sinus und Bogen von 0° bis 30°, fortschreitend von 10″ zu 10″, eine Tabelle, welche hauptsächlich zur Hebung kleiner Kugelgestaltfehler sich verwenden lässt. Wn.

Issaly. Extension aux pseudosurfaces du théorème de Malus relatif à la marche des rayons lumineux. Nouv. Ann. (3) X. 190-193.

Beweis des Satzes: Wenn ein System von Lichtstrahlen auf einer Pseudofläche (in Betreff dieses Begriffs vgl. den Bericht

über eine frühere Arbeit des Verfassers in den F. d. M. XXI. 1889. 819) senkrecht steht, behält es diese Eigenschaft auch nach einer beliebigen Zahl von Reflexionen und Brechungen.

Wn.

Jos. THEUERER. Ueber Thomson's Ableitung einiger Formeln aus der geometrischen Optik. Casop. XX. 251. (Böhmisch.)

Liefert eine detaillirte Auseinandersetzung der von Thomson im Phil. Mag. XXIX veröffentlichten Deduction der wichtigsten Formeln aus der geometrischen Optik. Std.

S. CZAPSKI. Zur Frage nach der Richtung der Brennlinien in unendlich dünnen optischen Büscheln. Wiedemann Ann. XLII. 332-337.

Der Verf. unterwirft die Arbeiten Matthiessen's (F. d. M. XX. 1888. 1132) einer kritischen Besprechung; ohne die mathematische Richtigkeit derselben zu bestreiten, kommt er zu dem Schluss, dass der praktische Physiker keinen Anlass habe, die „klassischen" Brennlinien aufzugeben. R. M.

W. SALTZMANN. Ueber die Lage der mehrfachen Bilder, welche belegte ebene Glasspiegel geben. Poske Z. IV. 189-191.

Benutzt die Diakaustik, welche, wie bekannt, bei ebener Begrenzung des brechenden Mediums eine Ellipsenevolute ist. In ähnlicher Weise wird in Poske Z. V. 78-80 eine verwandte, von Hrn. Helm gestellte Aufgabe von Herrn M. Koppe behandelt. Lp.

W. LERMANTOFF. Sur le grossissement des divers appareils pour la mesure des angles par la réflexion d'un faisceau lumineux sur un miroir mobile. Almeida J. (2) X. 34-37.

Kurze vergleichende Bemerkungen über die verschiedenen Methoden und die bei ihrer Anwendung entstehenden Unsicherheiten der Ergebnisse. Lp.

F. Omori. Note on optics. Tokio Math. Ges. IV. 122-125.

Ein concaver Glasspiegel werde an seiner hinteren Fläche mit Silber belegt; bei hinreichend intensivem Lichte kann man von einem Objectpunkte drei getrennte Bilder beobachten, welche resp. durch eine äussere, durch eine innere, durch drei innere Reflexionen zustande kommen. Zwischen den Abständen dieser drei Bilder vom Spiegel besteht die Gleichung:

$$1/V_1 + 1/V_3 = 2/V_2;$$

eine andere Gleichung liefert den Krümmungsradius der Vorderfläche. Der Verf. hat die berechneten Werte auch experimentell geprüft; es zeigt sich für den Radius eine Abweichung, die sich aus der Vernachlässigung der Spiegeldicke erklärt. R. M.

N. Jadanza. Un prisma universale a riflessione. Torino Atti. XXVI. 649-656.

Ein gleichschenklig rechtwinkliges Prisma lenkt einen Strahl durch Reflexionen an einer Kathete und der Hypotenuse um 90° ab, durch Reflexionen an beiden Katheten um 180°, durch Reflexionen an der Hypotenuse und einer Kathete um einen variabeln Winkel von mindestens $45° + 2\arcsin(n \sin 22\frac{1}{2}°)$, d. h. 116°40′ für $n = 1{,}53$. Schneidet man den rechten Winkel durch eine Ebene ab, welche mit der Hypotenuse einen Winkel von $22\frac{1}{2}°$ bildet, so hat man ein vierseitiges Prisma, welches je nach dem Strahlengange Ablenkungen von 45°, 90°, 180° erzielt, und welches sich ebenso wie das vorige zur Distanzmessung verwenden lässt. R. M.

J. H. Kirkby. Refraction through prisma. Minimum deviation. Nature XLIV. 294.

Versuch eines möglichst kurzen elementaren Beweises.

Lp.

E. Kobald. Zur graphischen Behandlung der Dioptrik. Monatsh. f. Math. II. 131-140. (Mit 4 Textfiguren.)

Bekanntlich kann in der Dioptrik zu jedem Objectpunkte der Bildpunkt und zu jedem eintretenden Strahle der austretende gefunden werden, sobald ausser den Brennpunkten entweder die Hauptpunkte oder die Knotenpunkte bekannt sind. Die erstere Bestimmung erweist sich für die Construction entsprechender Punkte, die letztere für die Construction entsprechender Strahlen als die zweckmässigere. In der vorliegenden Abhandlung wird die Strahlenconstruction benutzt, um zunächst für eine allgemeine Combination von zwei an einander stossenden Systemen brechender Kugelflächen die Knotenpunkte und Brennpunkte in einfacher Weise zeichnerisch und rechnerisch zu bestimmen. Hierauf wird speciell ein teleskopisches System untersucht und für ein solches namentlich die Frage erörtert, in welcher Entfernung ein Object noch deutlich gesehen werden kann. Hk.

K. Schellbach. Der Weg eines Lichtstrahls durch eine Linse. Poske Z. IV. 129-133.

Ueber die Erscheinung eines leuchtenden Ringes für das Auge, welches durch eine Sammellinse einen innerhalb der Brennweite befindlichen Lichtpunkt betrachtet, ist in F. d. M. XXI. 1889. 1113 nach der Notiz des Verfassers: „Ueber eine unbekannte Eigenschaft der Convexlinsen“ berichtet worden. Dieselbe ist, wie Hr. E. Wiedemann herausgefunden hat (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 53), vielleicht schon den Arabern bekannt gewesen. In dem gegenwärtigen Aufsatze wird die rechnerische Erläuterung geliefert und ein Apparat zur bequemen Beobachtung der Erscheinung beschrieben. Lp.

A. Kurz. Die gewöhnliche Linse und der Achromatismus. Dritte Mitteilung. Exner Rep. XXVII. 237-250.

Fortsetzung der Rechnungen über sphärische Linsen unter Berücksichtigung der Dicke aus Exner Rep. XXV (F. d. M. XXI.

1889. 1114), veranlasst durch den Artikel des Herrn Getschmann: Ueber Linsen von sehr grosser Dicke (Exner Rep. XXVI, F. d. M. XXII. 1890. 1073). Lp.

G. Ferraris. Ueber convergente und divergente dioptrische Systeme. Exner Rep. XXVII. 382-383.

Verteidigt seine Definition der convergenten Systeme gegen den Vorwurf der Fehlerhaftigkeit, welchen Hr. Getschmann (Ueber Linsen von sehr grosser Dicke, F. d. M. XXII. 1890. 1073) gegen sie erhoben hatte, und betont die Verknüpfung dieser seiner Definition mit der Gauss'schen Theorie.

Lp.

S. Finsterwalder. Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Auf Grund der Seidel'schen Formeln untersucht. München. Franz'scher Verlag. Roth, in Commiss. 71 S. mit 3 Taf. gr. 4°. (Sonderdr.)

S. Finsterwalder. Ueber die Bilder dioptrischer Systeme grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes. Naturf. Ges. Halle LXIV. 7-8.

J. Kollert. Ueber die Construction der Lichtbrechung in der Kugel und die Theorie des Regenbogens. Poske Z. IV. 133-137.

Benutzung derjenigen Construction, deren Grundgedanke zuerst von Hrn. Weierstrass angegeben ist (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 1113, XXII. 1890. 1071). Die nachfolgende elementare Theorie des Regenbogens bietet nichts Bemerkenswertes.

Lp.

H. Pitsch. Ueber Achromasie. Wien. Ber. C. 1105-1121.

Euler und Dollond berechneten achromatische Prismen- resp. Linsensysteme vermittelst der Bedingung, dass nach der Brechung

die roten und blauen Strahlen parallel austreten. Aber weder sie noch später Fraunhofer, Steinheil, v. Seidel fanden eine genügende Uebereinstimmung zwischen ihrer Theorie und der Praxis. Der Verfasser bezeichnet mit $i_{\prime}$ den Austrittswinkel eines Strahles von der Wellenlänge l und giebt die Bedingung der Achromasie in der Gestalt

$$i_{\prime}-(i_{\prime})_0 = \sum_1^{\infty}{}_n \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n i_{\prime}}{dx^n}\right)_0 = 0, \quad \text{worin} \quad x = \frac{1}{l^2}$$

bedeutet. Diese Gleichung für jede Combination l und l_0 zu erfüllen, ist unmöglich, und der Verfasser zeigt an einigen Beispielen, wie genau die Resultate seiner Rechnung mit der Erfahrung stimmen, wenn er nur die Bedingung $\left(\frac{di_{\prime}}{dx}\right)_0 = 0$ erfüllt, falls unter $l_0 \left[= \sqrt{\frac{1}{x_0}}\right]$ die Wellenlänge der Strahlen grösster Intensität verstanden wird. Ein höherer Grad von Achromasie, bei welchem auch $\left(\frac{d^2 i_{\prime}}{dx^2}\right)_0 = 0$ ist, lässt sich bei Anwendung von nur zwei Prismen resp. Linsen nicht erzielen. Mh.

A. Crova. Sur l'analyse de la lumière bleue diffusée par le ciel. Assoc. Franç. Marseille XX. 295-297.

V. Legros. Éléments de photogrammétrie. Application élémentaire de la photographie à l'architecture, à la topographie, aux observations scientifiques et aux opérations militaires. Paris. [Revue d'Art. XXXVIII. 494-495].

A. Mallock. Photographic definition. Nature XLIV. 552-555.

Der Verfasser will die Grenze der Genauigkeit des photographischen Bildes untersuchen und unterscheidet dabei drei Klassen von Problemen: 1) solche, die von der Wellenlänge des Lichtes abhängen und von der Wirkung einer vollkommenen Linse auf solche Wellenlängen, 2) die verschiedenen Abweichun-

gen wirklicher Linsen, 3) die Eigenschaften der verschiedenen Oberflächen, auf denen die Bilder zu Stande kommen. Die Arbeit ist noch nicht beendigt. Lp.

Lord RAYLEIGH. On pin-hole photography. Phil. Mag. (5) XXXI. 87-99.

Besprechung der einhegenden Kraft verschiedener Oeffnungen und Anpassung an die Lommel'schen Resultate (Münch. Abh. 1884) zu dem Probleme der Photographie von Nadellöchern.

Gbs. (Lp.)

H. SEELIGER. Notiz über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Münch. Ber. XXI. 239-246.

H. SEELIGER. Ueber die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre. Münch. Ber. XXI. 247-272.

Zwischen der scheinbaren Grösse σ_0 eines Planeten, wie derselbe ohne Atmosphäre erscheinen würde, und dem factisch stattfindenden Radius σ besteht die Gleichung

$$\sigma = \mu_0 \sigma_0,$$

wo μ_0 der Brechungsexponent an der Oberfläche des Planeten ist. Doch gilt diese Formel nur unter der Einschränkung, dass die Refractionscurve ohne Unterbrechung durch die Gleichung

$$\mu r \sin i = \text{const.}$$

definirt ist, dass also vor allem keine totale Reflexion eintritt. Für die Erdatmosphäre, deren Dichtigkeit ϱ im Abstande r vom Erdmittelpunkte

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\beta \frac{r-a}{r}}$$

ist, lautet die Bedingung dafür, dass totale Reflexionen nicht eintreten,

$$\beta < \frac{\mu_0}{\mu_0 - 1}.$$

In der zweiten Arbeit leitet der Verfasser die von Laplace

aufgestellte Formel für die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre in etwas allgemeinerer Weise ab, als es von Laplace geschehen ist. Nach dieser Formel gilt für die Intensität J des Sternlichtes, falls der Stern die Zenitdistanz z hat, die Beziehung:

$$\log\frac{J}{J_1} = -H\frac{\alpha - \alpha_0\cos z}{\cos z}, \quad \log\frac{J_1}{J_0} = -H\alpha_0.$$

Darin ist J_1 die Lichtintensität für $z = 0$, H ist eine Constante, α die in den Refractionstafeln benutzte, mit z veränderliche Grösse. J_0 ist die Intensität des ungeschwächten Lichtes. Ferner wird erörtert, welche Formel für die Intensität an Stelle der vorstehenden treten müsste, wenn man mit Langley die Transmissionscoefficienten der Luft für die einzelnen Farben als verschieden annehmen würde. Eine Vergleichung dieser Formel mit den Beobachtungen zeigt, dass die Einwände des Herrn Langley trotz ihrer principiellen Richtigkeit und Wichtigkeit von keiner grossen Bedeutung sind.

Zum Schluss wird die Laplace'sche Formel auf die Sonnenatmosphäre angewandt. Beobachtungen des Herrn Vogel über die Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe führen zu dem Schluss, dass durch die Sonnenatmosphäre das Licht in überraschend geringer Weise geschwächt wird, so dass man dieser Atmosphäre entweder eine sehr geringe Höhe oder eine auffallend geringe Dichte zuerteilen muss. Wn.

Aug. Schmidt. Die Strahlenbrechung auf der Sonne, ein geometrischer Beitrag zur Sonnenphysik. Stuttgart. J. B. Metzler. 32 S. 8°.

Der Verfasser sucht das Anschauungsbild der Sonne durch die Wirkung der auf ihr herrschenden Strahlenbrechung zu erklären. Er nimmt die Sonne — wie auch andere; cf. Neumayer Erdgeschichte I, 81 — als Gasball an, ohne festen oder flüssigen Kern wegen der hohen Temperatur. Die Dichte nimmt von aussen nach innen zu; die Strahlen werden unter dem Einflusse dieser Dichteänderung so gebrochen, dass einige die Bahn eines

geworfenen Körpers beschreiben, also die Sonne gar nicht verlassen, andere dieselbe umkreisen, noch andere endlich zu uns gelangen. Es wird dann erörtert, dass uns unter diesen Umständen die Sonne als scharf begrenzter Körper erscheinen muss; die Fackeln und Protuberanzen gelten als Erzeugnisse unregelmässiger Strahlenbrechung. Mh.

T. W. Backhouse. Apparent size of objects near the horizon. Nature XLV. 7-8.

E. Ladoux. Étude théorique d'un appareil de pointage automatique pour les batteries basses. Revue d'Art. XXXVII. 261-272.

Theorie und Beschreibung eines optischen Apparates zur Abmessung der Entfernung des Ziels vom Geschütze. Lp.

H. Höhl. Studien über Probleme der theoretischen Photometrie in der Physik und Astronomie. Pr. Realgymn. München. 61 S. 8°. (2 Fig.-T.)

In dieser Schrift werden zunächst die wichtigsten Definitionen der Photometrie, sowie Lambert's Grundgesetz mitgeteilt. Darauf wird eine Anzahl von Formeln für die Berechnung der Beleuchtungsstärke in bestimmten Fällen abgeleitet. Insbesondere werden Aufgaben aus dem Bereiche des Sonnensystems — Finsternisse, Auf- und Niedergang der Sonne u. a. betreffend — erledigt. Bemerkenswert ist, dass auch das doppelt reflectirte Sonnenlicht, dessen Weg z. B. Sonne-Erde-Mond-Erde ist, mit in Rechnung gezogen wird. Dabei werden auch einige geometrische Beziehungen entwickelt, welche zwischen den hier zu berücksichtigenden Phasenwinkeln und zwischen gewissen helio-, geo- und planetocentrischen Längen bestehen. Mh.

L. Houllevigue. Note sur la photométrie. Almeida J. (2) X. 126-130.

Die Wirkungen, welche gemäss dem Gesetze des umgekehrten Verhältnisses des Quadrates der Entfernungen stattfinden, können immer die Betrachtung eines Potentials veranlassen, welches die einfache Behandlung mancher Probleme ermöglicht. Auch in die Photometrie eingeführt, kann dieser Begriff gute Dienste leisten, wie der Verf. an einigen Beispielen zeigt: 1) Die Verteilung der Beleuchtung eines aus dem einen Brennpunkte beleuchteten Umdrehungs-Ellipsoids zu finden. 2) Wenn n durch ihre Lagen und Intensitäten definirte Lichtpunkte gegeben sind, die nach einem gegebenen Gesetze beleuchteten Oberflächen zu finden, z. B. die von einem Brennpunkte mit der Intensität 1 gleichmässig beleuchteten Oberflächen aufzusuchen. Lp.

W. Brennand. Photometric observations of the Sun and Sky. Lond. R. S. Proc. XLIX. 255-280. Cly.

Capitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

G. Kirchhoff. Vorlesungen über mathematische Physik. 3. Band: Elektricität und Magnetismus. Herausgegeben von M. Planck. Leipzig. Teubner. X + 228 S. gr. 8°.

Gustav Kirchhoff's Verehrer und von diesen namentlich seine Schüler werden die Drucklegung seiner Vorlesungen auf Grund der hinterlassenen sorgfältig ausgearbeiteten Collegienhefte des Verblichenen freudig begrüsst haben. Der Referent hat das Glück gehabt, im Wintersemester 1878 zu 1879 den Vorträgen Kirchhoff's über Elektricität und Magnetismus beiwohnen zu können; er kann auf Grund seiner damals gemachten Aufzeichnungen bezeugen, dass der Herausgeber mit der grössten Sorg-

falt ans Werk gegangen ist und jene eigentümlich schlichte Ausdrucksweise Kirchhoff's unangetastet gelassen hat, die bei jedem der Hörer den Eindruck hinterliess, nur ein Meister könne so sprechen. Den Inhalt des ganzen Werkes mit wenigen Strichen zu zeichnen, ist kaum möglich; Kirchhoff war Anhänger der Fernwirkungstheorie (S. 180), und „dem entspricht es, dass andere Theorien, so namentlich die von Faraday und Maxwell begründete, nur flüchtig gestreift sind. Aber es ist von Wichtigkeit, hervorzuheben, dass die in den Vorlesungen behandelten mathematischen Probleme, mit Ausnahme einiger weniger, die in der letzten Vorlesung auftreten, von dem Gegensatze der Theorien nicht berührt werden und daher auch unter veränderten physikalischen Gesichtspunkten ihre Bedeutung stets behalten". Voll und ganz kann man mit dem Herausgeber diesen Standpunkt in der Beurteilung jener Vorlesungen teilen; freilich hätte demselben da und dort noch mehr Rechnung getragen werden können. Ich vermisse so manche Deduction, die Kirchhoff seinen Zuhörern nicht vorenthielt, und die seinem reichen Wissen entstammte. Muss man auch bekennen, dass nichts Wesentliches fehlt, und dass die vielen erläuternden Bemerkungen und Fussnoten des Herrn Planck viel notwendiger sind (einige derselben decken sich freilich ihrem Inhalte nach mit meinen stenographischen Notizen), so glaube ich doch mit Rücksicht auf den oben präcisirten Gesichtspunkt den Wunsch aussprechen zu dürfen, es möchten in einer späteren Auflage nicht bloss die gedachten Kirchhoff'schen Erläuterungen, sondern auch die Noten des Hrn. Planck im Texte Aufnahme finden (dies gilt z. B. unbedenklich von der Note auf S. 157, die in Beachtung von S. 158, Zeile 18 von unten: „$1+4\pi k$ positiv" nur durch ein kleines Versehen des Kirchhoff'schen Collegheftes notwendig geworden ist), um das Verständnis des Werkes so viel als möglich zu erleichtern und damit den Vorlesungen von Kirchhoff die ihnen gebührende weiteste Verbreitung zu sichern. Aber noch in anderer Beziehung möchte ich Wünsche äussern. Der Herausgeber spricht von der „etwas spröden Form" des vorliegenden Werkes. Dieselbe wäre nicht so ganz zur Erscheinung gekommen, wenn der

Zusammenhang mit den Ergebnissen der experimentellen Forschung an einigen Stellen mehr in den Vordergrund gedrängt worden wäre. Kirchhoff hat dies, wie meine Notizen zeigen, wirklich gethan und dadurch den abstracten und abgeklärt mathematischen Charakter der Vorlesungen, den das Werk hervorkehrt, in etwas gemildert.

Folgende Bemerkungen mögen ferner ihren Platz finden. Auf S. 14 Zeile 16 von unten ist von dem Coulomb'schen Gesetze die Rede, ohne dass desselben je vorher Erwähnung geschehen ist; dazu sei bemerkt, dass nach meinen Aufzeichnungen Kirchhoff nach den Worten S. 4, Zeile 6 v. o. „und die Abstossungskraft bei der Entfernung $r\}\frac{e_1 e_2}{r^2}$" hinzuzufügen nötig fand: „Dies ist das Coulomb'sche Gesetz". Die Bezeichnung der Summationen auf S. 6, S. 7 und S. 8 ist nicht die übliche; im Colleg hat Kirchhoff sich der gewöhnlichen Bezeichnung bedient und der Reihe nach, durch die zugehörigen Erläuterungen geschieden, die Ausdrücke angeschrieben:

$$X = \sum_{\lambda=1}^{n} e_\lambda \frac{x - a_\lambda}{r_\lambda^3}; \quad X = -\sum_{\lambda=1}^{n} e_\lambda \frac{\partial \frac{1}{r_\lambda}}{\partial x}; \quad X = -\sum \frac{\partial \frac{e}{r}}{\partial x};$$

$U = \sum \frac{e}{r}$. (Vergl. auch S. 148-150.)

S. 9, Zeile 18-16 v. u. „Die in Klammern stehende Grösse ..." ist „$-$" $\frac{\partial U}{\partial n}$.

S. 57, § 4. Kirchhoff gab Hrn. Lipschitz als den an, der das Problem zuerst behandelt hat.

S. 86. Der Sonderfall $a = b$ wurde „mit Rücksicht auf die Coulomb'sche Drehwage" behandelt.

S. 109. Kirchhoff gab Clausius als den an, der das Problem zuerst behandelt hat.

S. 112, Zeile 2 v. o. Statt „Martin" Simon Ohm lese man „Georg" Simon Ohm; Kirchhoff hat den letzteren mit seinem jüngeren Bruder, dem Mathematiker Martin Ohm, verwechselt.

S. 136. Die Linien gleicher Stromdichte sind gegeben durch

$r_1 r_2$ = const.; Kirchhoff vergass nicht hinzuzufügen, dass hierdurch ein System von Lemniskaten definirt ist.

S. 166, § 7. Kirchhoff gab F. Neumann (Journal für Math. XXXVII) als denjenigen an, der das Problem zuerst behandelt hat.

S. 208, § 5. Das zweite Beispiel betrifft „das Barlow'sche Rädchen", nach Kirchhoff.

S. 215, § 2, Zeile 3-4. Vielleicht wäre durch Hervorheben, dass es sich um den Peltier'schen Effect handelt, wie es Kirchhoff that, die erste Note auf S. 216 entbehrlich geworden.

Hae.

H. Poincaré. Elektricität und Optik. Autorisirte deutsche Ausgabe von W. Jaeger und E. Gumlich. I. Band. Die Theorie von Maxwell und die elektromagnetische Lichttheorie. Berlin. J. Springer. VII+248 S. 8°.

Das vorliegende Buch, aus Vorlesungen entstanden, die Herr Poincaré im Sommer 1888 gehalten hat, und die nachher von Herrn Blondin redigirt sind, giebt eine übersichtliche Darstellung der Maxwell'schen Theorie der Elektricität und des Magnetismus, sowie im Anschluss daran seiner elektromagnetischen Lichttheorie; zugleich werden diese Theorien kritisch beleuchtet.

In meisterhafter Weise setzt der Verfasser in der Einleitung einerseits die Vorzüge, andererseits die Schwächen der Maxwell'schen Theorie auseinander. Von den Ausführungen des Herrn Poincaré mögen die folgenden hier Platz finden. Maxwell giebt nicht eine mechanische Erklärung der Elektricität und des Magnetismus; er beschränkt sich vielmehr darauf, nachzuweisen, dass solch eine Erklärung möglich ist. Der englische Gelehrte sucht nicht ein einheitliches, wohl geordnetes und endgültiges Gebäude zu errichten; es scheint vielmehr, als wolle er eine ganze Anzahl von vorläufigen und unzusammenhängenden Constructionen geben, zwischen denen die Verbindung schwierig, ja bisweilen unmöglich ist. Die zu Grunde liegende Idee ist verschleiert, und zwar in so hohem Grade, dass dies in der Mehr-

zahl der populären Darstellungen der einzige Punkt ist, welcher vollkommen unberücksichtigt bleibt. Diesen Grundgedanken glaubt Herr Poincaré darum vor allem scharf hervorheben zu müssen.

Zu dem Zwecke führt er aus, dass es bei jeder physikalischen Erscheinung eine Anzahl von Parametern giebt, welche direct der Untersuchung zugänglich sind. Durch die Beobachtung lernen wir nur die Gesetze von den Veränderungen dieser Parameter kennen, und diese Gesetze können im allgemeinen in der Form von Differentialgleichungen dargestellt werden, durch welche jene Parameter mit der Zeit verbunden sind. Um derartige Erscheinungen zu erklären, kann man sie als Bewegungserscheinungen der gewöhnlichen Materie oder von einem oder mehreren hypothetischen Fluidis auffassen. Daraus ergiebt sich, dass, wenn eine Erscheinung eine vollständige mechanische Erklärung zulässt, sie auch noch eine unbeschränkte Anzahl anderer Erklärungen zulassen wird, welche ebenso gut von allen durch das Experiment enthüllten Einzelheiten Rechenschaft ablegen. Von diesen Erwägungen geleitet, formulirt der Verfasser den Grundgedanken Maxwell's folgendermassen: Um die Möglichkeit einer mechanischen Erklärung der Elektricität nachzuweisen, brauchen wir uns nicht damit abzugeben, diese Erklärung selbst zu finden; sondern es genügt uns, zwei Functionen T und U kennen zu lernen, welche die beiden Teile der Energie bilden, mit diesen Functionen die Gleichungen von Lagrange aufzustellen und diese alsdann mit experimentellen Gesetzen zu vergleichen. Die Wahl zwischen den verschiedenen möglichen Erklärungen kann nur durch Betrachtungen geleitet werden, bei denen die persönliche Ansicht eine grosse Rolle spielt. Was die Elektricität und den Magnetismus anbelangt, so verzichtet Maxwell darauf, eine Entscheidung zu treffen. Die von ihm früher zum Zweck einer Erklärung herbeigezogenen Hypothesen hat Maxwell in seinem Buche nicht reproducirt.

Herr Poincaré hebt dann weiter hervor, dass in Maxwell's Werk das Wesentliche, d. h. das, was allen Theorien gemeinsam bleiben muss, besonders hervortritt; was sich dagegen nur mit

einer speciellen Theorie vereinigen lasse, darüber gehe er fast stets mit Stillschweigen hinweg. Der Leser sehe sich also einer von Materie fast leeren Form gegenüber. Am schwierigsten sei das Verständnis der Elektrostatik Maxwell's; hier sei ihm, Poincaré, nichts anderes übrig geblieben, als zwei vollständige, aber gänzlich verschiedene Theorien auseinanderzusetzen.

Auch im Texte selbst fehlt es nicht an kritischen Bemerkungen. So wird z. B. dargelegt, weshalb Maxwell's Theorie der Bewegung von Leitern unter der Einwirkung elektrischer Kräfte, obgleich für sich vollkommen annehmbar, nicht in den allgemeinen Rahmen der Maxwell'schen Ideen passt.

Abgesehen von diesen kritischen Erörterungen, die Referent für besonders wertvoll hält, zeichnet sich das Buch durch eine grosse Klarheit der Darstellung aus, so dass es einerseits geeignet ist, dem Leser das eingehende Studium des Maxwell'schen Originalwerks bedeutend zu erleichtern, und dass es andererseits allen denen, welchen die Zeit zu diesem Studium fehlt, einen genügenden Ueberblick über die Hauptresultate und den Gedankengang von Maxwell darbietet. Den zwölf Capiteln, in denen Maxwell's Theorie behandelt wird, ist ein Schlusscapitel beigefügt, das die experimentellen Bestätigungen der Maxwell'schen Hypothesen bespricht. Dasselbe rührt von dem Herausgeber der Vorlesungen, Herrn Blondin, her. Die Uebersetzung schliesst sich dem Original eng an und giebt nur an wenigen Stellen kleinere erläuternde Zusätze. Wn.

L. Boltzmann. Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes. I. Teil: Ableitung der Grundgleichungen für ruhende, homogene, isotrope Körper. Leipzig. J. A. Barth. XII + 139 S. mit 2 Tafeln. 8°.

Eine bedeutende litterarische Erscheinung liegt vor uns, aber wir müssen gleich von vorn herein bemerken, dass schon dieser erste Teil nicht für Anfänger geschrieben ist; abgesehen von Kenntnissen aus der Mechanik sind solche aus der Theorie der Elektricitätslehre mindestens in dem Umfange erforderlich,

wie sie durch die oben S. 1105 besprochenen Kirchhoff'schen Vorlesungen vermittelt werden (vergl. S. 30, S. 34). Wer diesen Anforderungen gerecht zu werden vermag, für den ist das Studium des frisch geschriebenen Werkes ein hoher Genuss; wir müssen es Herrn Boltzmann Dank wissen, dass er sich dazu entschlossen hat, diese 14 Vorlesungen durch den Druck bekannt zu geben. Der Verf. geht von den allgemeinen Gleichungen der analytischen Mechanik aus, und zwar von derjenigen Form, die ihnen Lagrange gegeben hat. Unter der Voraussetzung, dass in dem gegebenen Systeme von Körpern nur solche Bewegungen stattfinden können, die Hr. v. Helmholtz cyklische genannt hat, werden die Bewegungsgleichungen für Cykeln abgeleitet. Diesen Entwickelungen parallel geht einerseits der Nachweis, dass bestimmte elektrische Vorgänge durch diese Gleichungen beschrieben werden können, andererseits die Construction mechanischer Modelle, welche zeigen sollen, dass die Annahmen, die im Laufe der Untersuchung über die Variabilität von cyklischen Coordinaten und von Parametern gemacht worden sind, nicht einzig in der Phantasie des Verfassers existiren, sondern in gewissem Sinne einer Realisirung fähig sind. Aber Hr. Boltzmann verwahrt sich dagegen, dass die Mechanik der elektrischen Vorgänge vergleichbar oder gar identisch wäre mit den an seinen Apparaten künstlich hervorgerufenen Bewegungen; die Modelle sollen versuchen, als Analogien zum Verständnis beizutragen. In dieser constructiven Hinsicht erreichen die Vorlesungen ihren Höhepunkt in der sechsten, wo der durch zwei lithographirte Tafeln erläuterte Apparat besprochen wird. Von nun an wenden sich die Entwickelungen intensiv der Aufstellung der Maxwell'schen Grundgleichungen zu, die am Schlusse der neunten Vorlesung beendet ist. Aus diesen Gleichungen werden alsdann in der zehnten Vorlesung die Gesetze der stationären und der angenähert stationären Strömung deducirt, in der elften das Ampère'sche Gesetz und die Theorie der elektrischen Schwingungen, in der zwölften und dreizehnten werden die Hauptresultate der Elektrostatik abgeleitet. Die vierzehnte Vorlesung endlich bringt eine Vergleichung des elektrostatischen und des elektromagneti-

schen Masssystems und die Magnetisirungsgleichungen. Ein erster Anhang enthält eine reiche, nach acht verschiedenen Gesichtspunkten geordnete Litteraturübersicht; ein zweiter Anhang giebt eine Uebersicht über die im vorliegenden Werke angewandten Bezeichnungen, verglichen mit denen von Maxwell, mit welchen sie in einigen wenigen Fällen nicht übereinstimmen, mit denen von v. Helmholtz, von Stefan und von Hertz. Hae.

AMÉDÉE GUILLEMIN. Electricity and magnetism. Translated from the French. Revised and edited by Silvanus P. Thompson. London. Macmillan and Co. [Nature XLV. 1-3].

A. GRAY. Maxwell's electromagnetic theories. Nature XLIV. 296-299.

Eine ausführliche Anzeige des Buches von Poincaré: Électricité et optique I. Les théories de Maxwell et la théorie électromagnétique de la lumière. Paris 1890. Lp.

W. T. A. EMTAGE. An introduction to the mathematical theory of electricity and magnetism. Oxford. Clarendon Press. VIII + 228 S. [Nature XLIV. 443-444].

Dieses kleine Werk ist für Studirende bestimmt, die eine Kenntnis der elementaren Teile der Infinitesimal-Rechnung besitzen, und kann als Vorbereitung für vollständigere Bearbeitungen, wie z. B. von Clerk Maxwell, dienen, obschon der Unterschied in der Schwierigkeit zwischen den beiden Büchern sicherlich sehr bedeutend ist. Gbs. (Lp.)

H. HERTZ. Sur les équations fondamentales de l'électrodynamique pour les corps en repos. Basel. Georg. 66 S. 8°. (Sonderdr.)

H. HERTZ. Sur les équations fondamentales de l'électrodynamique pour les corps en mouvement. Acta Math. XIV. 349-375.

Uebersetzung der in Wiedemann's Ann. XL bez. XLI erschienenen und bereits in den F. d. M. XXII. 1890. 1103 bez. 1110 besprochenen Abhandlungen. Hae.

V. VOLTERRA. Sopra le equazioni di Hertz. Nuovo Cimento. (3) XXIX. 53-63.

Es werden hier die elektrodynamischen Gesetze durch Differentialgleichungen ausgedrückt, welche mit den von Hertz für ruhende und für in Bewegung begriffene Körper angegebenen Gleichungssystemen übereinstimmen. Vi.

V. VOLTERRA. Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII_1. 177-188.

Hertz hat die Gesetze der Elektrostatik, des Magnetismus und der Elektrodynamik für den Fall ruhender Körper aus einem System von Differentialgleichungen erhalten. Man kann sich die Aufgabe stellen, diejenigen Fragen der Variationsrechnung zu studiren, die auf dieselben Differentialgleichungen führen. Auf diese Weise werden die Probleme der Elektricität und des Magnetismus darauf zurückgeführt, ein bestimmtes Integral stationär zu machen (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 370 bez. 382); unter diesem Gesichtspunkte werden die Gleichungen von Hertz betrachtet. Es wird zuerst untersucht, wann die erste Variation eines gewissen Integrals auf ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung führt. Die Bedingungen werden aufgestellt, damit dieses System gerade dasjenige von Hertz ist. Weiter wird aus der ersten Variation eines bestimmten Integrals der von Hertz für die Energie gegebene Ausdruck abgeleitet, und es werden aus derjenigen eines andern in den Grenzen t_0 und t_1 gegebenen Integrals die von Hertz gegebenen Differentialgleichungen entwickelt. Hae.

V. Volterra. Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica. Nuovo Cimento. (3) XXIX. 147-154.

Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen können bekanntlich auf eine einzige Frage der Variationsrechnung (das Hamilton'sche Princip) zurückgeführt werden. Eine analoge Reduction der Hertz'schen elektrodynamischen Gleichungen bildet den Inhalt der vorliegenden Note. Vi.

G. Adler. Ueber eine Consequenz der Poisson-Mosotti'schen Theorie. Wiedemann Ann. XLIV. 173-176, Exner Rep. XXVII. 348-352.

Abgedrückt aus Wien. Ber. XCIX, IIa, 1890. Vergl. F. d. M. XXII. 1890. 1102-1103. Hae.

E. Padova. Una nuova interpretazione dei fenomeni elettrici, magnetici e luminosi. Nuovo Cimento. (3) XXIX. 225-241.

Der Verfasser zeigt, wie man zu den elektrischen, magnetischen und optischen Fundamentalgleichungen auf die natürlichste Weise gelangt, wenn man voraussetzt, dass durch die Drehung der unendlich kleinen Teile des Aethers eine Arbeit geleistet wird. Vi.

J. Larmor. On the theory of electrodynamics. Lond. R. S. Proc. XLIX. 521-536.

Enthält mathematische Forschungen in Bezug auf das Maxwell'sche allgemeine Princip, dass elektrische Ströme immer um vollständige Stromkreise fliessen, und in Bezug auf die allgemeinere Anschauung von der Natur der dielektrischen Polarisation, die von Hrn. von Helmholtz in einer Reihe von Abhandlungen dargelegt ist. Die Titel der einzelnen Abschnitte der Abhandlung sind: Verallgemeinerte Polarisationstheorie, verallgemeinerte elektrodynamische Theorie, Fortpflanzung in dielektrischen Medien, Vergleichung mit den Versuchsergebnissen. Cly. (Lp.)

R. Lamprecht. Zur Theorie der Elektrodynamik. Pr. (No. 542) Gymn. Zittau. 32 S. 4°.

R. Lamprecht. Ueber die Gleichungen der elektromagnetischen Kraft. Wiedemann Ann. XLIII. 835-838.

Es handelt sich in der zuerst genannten Abhandlung um eine übersichtliche und doch in sich geschlossene Darstellung der §§ 553-616 aus dem 2. Bande des Maxwell'schen Lehrbuches der Elektricität und des Magnetismus. Daneben citirt der Verfasser mehrfach Stellen aus der von Hrn. Weinstein herausgegebenen deutschen Uebersetzung des genannten Werkes, wo seiner Meinung nach der Sinn der Uebersetzung sich nicht mit dem des Originals deckt; Textstelle und Uebersetzung derselben werden leider nicht gegenübergestellt. Im besonderen wird darauf aufmerksam gemacht, dass der § 602, S. 295-296, der in der Uebersetzung die Ausführung von Rechnungen enthält, die Maxwell selbst nur angedeutet hat, durchaus umzugestalten ist wegen einer Incorrectheit. Diese Veränderung wird in der ersten Abhandlung auf S. 29, dann aber ausführlicher in der oben an zweiter Stelle genannten Notiz gegeben. Hae.

P. Duhem. Applications de la thermodynamique aux actions qui s'exercent entre les courants électriques et les aimants. Acta Soc. Fennicae (Helsingfors). XVIII. 1-100.

Der Verf. beabsichtigt in dieser Arbeit, die Formeln für die elektromagnetischen Erscheinungen, ohne Verwertung der Experimente von Ampère, Biot und Savart, aus den „Gesetzen der Thermodynamik und den Hypothesen, welche zur Definition der elektrischen Ströme und der Magnete dienen", herzuleiten.

Im Cap. I, § 1 wird für das thermoelektrische Potential (F) eines Systems nicht elektrisirter Magnete der Ausdruck

$$F = E(U-TS)+Y+\iiint f(M)\,dx\,dy\,dz$$

hergeleitet, wo E das mechanische Wärmeäquivalent ist, U die innere Energie des Systems unter Voraussetzung, dass alle Körper

aufhören, magnetisch zu sein, ohne sonst verändert zu werden, S die Entropie des Systems unter derselben Bedingung, T die absolute Temperatur (dieselbe im ganzen Systeme), Y das Potential der mechanischen Wirkungen zwischen den Magneten, M die Intensität der magnetischen Polarität in einem beliebigen Punkte, $f(M)$ eine unbestimmte Function von M, welche ausserdem von der physikalischen und chemischen Beschaffenheit des Systems abhängt. Bei der Deduction wird, ausser der Existenz des Potentials der mechanischen Einwirkungen, der vom Verf. an anderer Stelle bewiesene Satz benutzt, dass das innere thermodynamische Potential eines Systems vom Potentiale der mechanischen Kräfte um einen Term verschieden ist, welcher bei blossen Versetzungen des Systems unverändert bleibt.

Im § 2 wird gezeigt, dass bei elektrisirten Magneten im Ausdrucke für F die Terme

$$W + \Sigma \Theta q + \Sigma M q G(M)$$

hinzukommen, wo W das elektrostatische Potential ist, q die elektrische Ladung in einem beliebigen Punkte, Θ eine Grösse, welche von der physikalischen und chemischen Natur des Leiters in demselben Punkte abhängt, $G(M)$ eine unbestimmte Function von M und von der Natur des Systems. — Es wird hierbei angenommen, dass das Potential der mechanischen Einwirkungen $W + Y$ ist.

Im Cap. II wird bewiesen, dass für einen geschlossenen Raum, in welchem längs einer geschlossenen Linie L ein unendlich dünner Kanal gegraben ist, die Gleichung

$$X dx + Y dy + Z dz = dU + dl \cdot \frac{H}{4\pi} \int \triangle dL$$

besteht, wo X, Y, Z Functionen von x, y, z sind, welche im fraglichen Raume continuirlich sind und den Gleichungen

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

genügen, dl das Bogenelement einer beliebigen Curve bedeutet, dx, dy, dz die x-, y-, z-Componenten desselben sind, U eine Function von x, y, z ist, welche, mit möglicher Ausnahme für die

Linie L, überall eindeutig und continuirlich ist, H eine gewisse Constante,

$$\triangle = \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} \frac{\xi - x}{r}, & \frac{\eta - y}{r}, & \frac{\zeta - z}{r} \\ \frac{dx}{dl}, & \frac{dy}{dl}, & \frac{dz}{dl} \\ \frac{d\xi}{dL}, & \frac{d\eta}{dL}, & \frac{d\zeta}{dL} \end{vmatrix},$$

(ξ, η, ζ) ein beliebiger Punkt auf L.

Cap. III bringt die Herleitung des thermodynamischen Potentials eines Systems von Magneten und von geschlossenen, gleichförmigen Strömen. Die Ströme werden vorläufig als linear betrachtet. Es wird angenommen, dass der oben hergeleitete Ausdruck um einen Term Λ zu vermehren ist, von welchem gezeigt wird, dass auf ihn nur folgende Umstände Einfluss haben: 1) Lage, Form und Grösse der Leiterelemente, durch welche Ströme gehen; 2) die Stromintensität J und ihre Derivirten $\frac{dJ}{ds}$, $\frac{d^2J}{ds^2}$ etc.; 3) Lage, Form und Grösse der magnetischen Elemente; 4) die Grösse der magnetischen Polarisation in jedem Punkte und die Derivirten derselben nach x, y, z. Man setzt

$$\Lambda = \Pi + \Omega,$$

wo

$$\Pi = \Sigma\Psi(ds, ds'), \quad \Omega = \Sigma\Xi(ds, dv).$$

Hierin bedeuten ds, ds' Stromelemente, dv ein magnetisches Element; Ψ ist eine Function von J, $\frac{dJ}{ds}$, $\frac{d^2J}{ds^2}$ etc., J', $\frac{dJ'}{ds'}$ etc. und von den Parametern, welche Form, Grösse und gegenseitige Lage von ds, ds' bestimmen, Ξ ist eine Function von

$$J, \frac{dJ}{ds}, \cdots, \quad M, \frac{\partial M}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \text{ etc.}$$

und von Parametern, welche Form, Grösse und gegenseitige Lage von ds, ds' und die Lage von ds zur Richtung der magnetischen Polarisation in dv bestimmen. Π wird dann die Function, für welche der Verf. in einer früheren Abhandlung „Sur

les actions qui s'exercent entre les courants électriques" (Acta Soc. Fenn. XVI. 1888) den Ausdruck

$$\Psi(ds, ds') = -A\frac{ds\,ds'}{r}\left[\frac{1-\lambda}{2}\cos(ds, ds') + \frac{1+\lambda}{2}\cos(r, ds)\cos(r, ds')\right]$$

hergeleitet hat; r bedeutet hier die Länge der von ds nach ds' gezogenen Geraden, λ ist die Helmholtz'sche Constante, A eine Constante, welche von der für die Stromstärke angewandten Einheit abhängt.

Ξ wird von der Form:

$$\Xi(ds, ds') = \xi\, dv J ds,$$

wo ξ von folgenden Grössen abhängt: der magnetischen Intensität M in einem Punkte des Elementes dv, der Entfernung ϱ zwischen ds und dv, dem Winkel θ zwischen ds und ϱ, dem Winkel θ' zwischen ϱ und der Richtung der magnetischen Axe l des Elementes dv, endlich dem Winkel zwischen l und ds.

Zufolge der Annahme, dass die Einwirkung eines Magneten auf ein Stromelement durch die Wirkungen zweier magnetischen Pole ersetzt werden könne, ergiebt sich $\xi = \zeta M$, wo

$$\zeta = \frac{H\triangle}{4\pi} + \frac{\partial^2 F(\varrho)}{\partial s\,\partial l},$$

F eine eindeutige Function. Für geschlossene Ströme reducirt sich ζ auf $\frac{H\triangle}{4\pi}$.

Im Cap. IV wird gezeigt, wie die Erfahrung zur Annahme $H = A$ führt. Zwei geschlossene Ströme wirken nämlich auf einen Magneten, wie zwei magnetische Doppellager von gewisser Beschaffenheit, und man nimmt an, dass die Ströme auch auf einander dieselbe Wirkung haben, welche die Doppellager haben würden.

Cap. V behandelt die Wirkungen zwischen Magneten und beliebigen (nicht gleichförmigen) linearen Strömen. Statt jedes magnetischen Elementes wird derjenige geschlossene Strom (J) eingeführt, welcher hinsichtlich der Wirkung auf einen Magneten mit dem Elemente äquivalent ist, und es wird angenommen, dass das elektromagnetische Potential des Elementes und eines beliebigen Stromes dem elektrodynamischen Potentiale für J und

denselben beliebigen Strom gleich ist. Hieraus ergeben sich für Ω folgende drei äquivalente Ausdrücke:

$$\Omega = -H\Sigma M dv \int \frac{J' ds'}{\varrho^2} \sin(\varrho, dl) \sin(ds', dl) \sin(D', D),$$

$$\Omega = -H\Sigma M dv \int \frac{J' ds'}{\varrho^2} \sin(\varrho, dl) \sin(\varrho, ds') \sin \varepsilon,$$

$$\Omega = \quad H\Sigma M dv \int J' \Delta ds'.$$

Hierin ist ds' ein Element des gegebenen Stromes, J' die Stromstärke in diesem Elemente, ϱ die Entfernung zwischen dv und ds', dl die Richtung der magnetischen Axe in dv, D' die Richtung der Projection von ds' auf die Ebene des Stromes J, D die Richtung der Projection von ϱ auf dieselbe Ebene, ε der Winkel zwischen der Halbebene (ϱ, ds') und der Halbebene (ϱ, dl). Diese drei Ausdrücke für Ω geben bei gleichförmigen Strömen den gewöhnlichen, von der Erfahrung bestätigten Ausdruck für das Potential eines Magneten und eines elektrischen Stromes.

Daraus ergiebt sich, dass ein magnetisches Element auf ein Stromelement mit einer Kraft wirkt, deren x-Componente

$$HM dv J ds \frac{d}{dl}\left[\frac{y'-y}{r^3}\frac{dz'}{ds} - \frac{z'-z}{r^3}\frac{dy'}{ds}\right] + HM dv \frac{dJ}{ds}\left[\frac{z'-z}{r^3}\frac{dy}{dl} - \frac{y'-y}{r^3}\frac{dz}{dl}\right]$$

ist, wo x, y, z zu dv und x', y', z' zu ds gehören.

Die Wirkung eines Stromes auf ein magnetisches Element reducirt sich auf eine Kraft und ein Kräftepaar, deren x-Componenten sind:

$$-HM dv \int J ds \left\{\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(x-x')^2}{r^5}\right]\left(\frac{dy}{dl}\frac{dz'}{ds} - \frac{dz}{dl}\frac{dy'}{ds}\right) - \frac{3(y-y')(x-x')}{r^5}\left(\frac{dz}{dl}\frac{dx'}{ds} - \frac{dx}{dl}\frac{dz'}{ds}\right) - \frac{3(z-z')(x-x')}{r^5}\left(\frac{dx}{dl}\frac{dy'}{ds} - \frac{dy}{dl}\frac{dx'}{ds}\right)\right\},$$

resp.

$$-HM\,dv\int J\,ds\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(\frac{dy}{dl}\frac{dy'}{ds}+\frac{dz}{dl}\frac{dz'}{ds}\right)-\frac{\partial\frac{1}{r}}{dy}\frac{dy}{dl}\frac{dx'}{ds}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dz}{dl}\frac{dx'}{ds}\right\}.$$

Das Eigentümliche in dieser neuen Theorie ist die Einführung der Kraftcomponente, welche $\frac{dJ}{ds}$ enthält.

Im Cap. VI wird gezeigt, wie die Formeln sich gestalten, wenn man mit Magneten und elektrischen Strömen von in jeder Richtung endlichen Dimensionen zu thun hat.

In einer Note wird die Rotation eines Magneten unter Einwirkung von einem Strome besprochen. Nach Sir William Thomson ist diese Erscheinung dadurch zu erklären, dass das Potential des Stromes auf einen Magnetpol eine unendlich vieldeutige Function ist, und dass während der Bewegung nicht beide Pole durch die vom Strome eingeschlossene Fläche passiren. Der Verf. sucht dagegen die Erklärung in der Einwirkung des Stromes und des Magneten auf einen beweglichen Teil der Stromleitung. Bdn.

J. McCowan. On the heating of conductors by electric currents, and on the electric distribution in conductors so heated. Phil. Mag. (5) XXXI. 259-275.

Bezeichnen V das elektrische Potential und c die Leitungsfähigkeit zur Zeit t in einem Punkte x, y, z eines heterogenen isotropen Leiters, in dessen Innerem keine elektrische Polarisation stattfindet, so muss V der Gleichung genügen:

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(c\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(c\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(c\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\Delta_c V=0.$$

Bezeichnen ϑ die Temperatur, k die Wärmeleitungsfähigkeit und s die Wärmecapacität für die Einheit des Volumens zur Zeit t im Punkte x, y, z, so ist die Wärmezunahme für die Einheit des Volumens und die der Zeit $=\Delta_k\vartheta$. Weiter ist nach dem Joule'-

schen Gesetz die Wärmezunahme, die durch einen elektrischen Strom für die Einheit von Raum und Zeit erzeugt wird, gleich $jc\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$, wo j das mechanische Wärmeäquivalent ist. Daher genügt ϑ der Gleichung:

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}(s\vartheta) = \Delta_k\vartheta + jc\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right).$$

Die Gleichungen (1) und (2) müssen in Gemeinschaft mit den Anfangs- und Grenzbedingungen von V und ϑ erfüllt werden.

Diese allgemeinen Gleichungen werden, um integrirbare Fälle zu erhalten, namentlich unter der Voraussetzung behandelt, dass es sich nur um einen stationären Wärmezustand handelt. Wir heben unter den Resultaten das folgende hervor: Wenn zwei Teile der Oberfläche eines Conductors, für welchen die Grössen k und c constant sind, auf den Potentialen V_1 und V_2 und den Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 gehalten werden, wenn aber der Rest der Begrenzung so beschaffen ist, dass kein elektrischer oder Wärmestrom durch ihn hindurchgeht, wenn endlich der stationäre Zustand überwiegt, dann werden die Aequipotentialflächen zugleich Isothermenflächen sein, und die Temperatur ϑ in irgend einem Punkte mit dem Potential V ist gegeben durch:

$$k\vartheta = \tfrac{1}{2}jc(V_2-V)(V-V_1)+k\frac{\{\vartheta_2(V-V_1)+\vartheta_1(V_2-V)\}}{V_2-V_1}.$$

Ist demnach das elektrische Problem lösbar, so kann auch die Temperatur bestimmt werden. Hae.

A. Schuster. Electrical notes. 1. The vector potential. Phil. Mag. (5) XXXII. 9-20.

Der Verfasser beschäftigt sich mit der Lösung des Problems: Gegeben sei ein Magnet; für einen Punkt $(\xi\eta\zeta)$ seien die Componenten der magnetischen Kraft A, B, C. Das Vectorpotential soll für ein System von Strömen gefunden werden, die längs der Kraftlinien des Magneten fliessen, deren Strompotential also identisch mit dem magnetischen Potential ist. Was die Oberflächenbedingungen betrifft, so wird zuerst angenommen, dass

die magnetische Permeabilität im ganzen Medium constant ist; alsdann wird auch der Fall betrachtet, dass die Ströme durch ein Medium fliessen, welches einer magnetischen Polarisation fähig ist. Hae.

C. Neumann. Ueber stationäre elektrische Flächenströme. Leipz. Ber. XLIII. 571-574.

Eine vorläufige Mitteilung von Untersuchungen, die der Verf. inzwischen genauer dargelegt hat in seinen „Beiträgen zu einzelnen Teilen der mathematischen Physik", Leipzig bei Teubner, 1893. N.

A. Schülke. Elektricität und Magnetismus nach den neueren Anschauungen für höhere Schulen dargestellt. II: Elektrische Ströme. Pr. (Nr. 21) Realgymn. Osterode i. Ostpreussen. 16 S. 4° u. 1 Fig.-Taf.

Der Verf. fährt in seinem Entwurf, von dem er jetzt sagt, dass er nur für die Hand des Lehrers bestimmt sei, fort und verteilt den Lehrstoff in der Elektricitätslehre, soweit es sich um elektrische Ströme handelt, auf zwei Stufen, dabei die Faraday-Maxwell'schen Anschauungen zu Grunde legend. Die Dynamomaschine als Stromquelle wird in den Mittelpunkt des Unterrichts gestellt. Stromstärke, Widerstand, elektromotorische Kraft werden erläutert. Die Ampère'schen Gesetze, die elektromagnetischen Erscheinungen und die Inductionsströme werden mit Hülfe der Kraftlinien-Theorie erklärt, und dabei die Regel aufgestellt: „Man denke sich in der Kraftlinie schwimmend und den Leiter ansehend, so geht der Strom nach links". Eine einfache Construction der Kraftlinien für zwei unendlich lange, parallele, gleich bez. entgegengesetzt gerichtete Ströme, erläutert an zwei Zeichnungen (es handelt sich also um einen Grenzfall der allgemeineren von Maxwell gelösten Aufgabe für zwei Kreisströme), leitet diesen Abschnitt ein. Es folgt die Erklärung des Gramme'schen Ringes, der magnetelektrischen Maschine und nun die der Dynamomaschine in ihren verschiedenen Arten, die des Telephons und

des Mikrophons. An die Besprechung der Wärme-Erscheinungen (Joule's Gesetz) schliesst sich die der chemischen an, wesentlich mit Berücksichtigung der Clausius'schen Theorie. Referent ist mit dem Verfasser darin einig, dass durch die Kürze der Darstellung die Klarheit der Arbeit gelitten hat; musste sie denn bei so eng zugemessenem Raume geschrieben werden?

Hae.

J. J. Thomson. On the illustration of the properties of the electric field by means of tubes of electrostatic induction. Phil. Mag. (5) XXXI. 149-171.

Im engsten Anschluss an Faraday's Kraftröhren-Theorie werden die Gleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper abgeleitet, und an Beispielen ihre Anwendung erläutert.

Hae.

G. Buti. Sulla misura della forza fornita da una corrente elettrica qualsiasi in un circuito qualunque. Rom. Acc. P. d. N. L. XLIV. 252-258.

Es wird vorgeschlagen, sich eines Voltameters zu bedienen, um die Stromstärke zu messen. Man verbinde dazu den Stromleiter *ab* mit einem nicht inducirenden Widerstande *bc* von *r* Ohms. Liest man dann an dem Voltameter für *ab* allein V_1, für *bc* allein V_2 und für *ac* noch V ab, so ist

$$W = \frac{1}{2r}\left(V^2 - V_1^2 - V_2^2\right) = AV_1\left(1 - \frac{(V_1+V_2-V)(V_1+V_2+V)}{2V_1V_2}\right).$$

Das Resultat wird benutzt, um die Intensität des Stromes bei einer elektrischen Bogenlampe zu bestimmen. Hae.

F. Lucas. Sur les équations abstraites du fonctionnement des machines. S. M. F. Bull. XIX. 152-154.

J. Puluj. Ueber die Wirkungen gleich gerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction. Wien. Ber. C. 767-780.

In einer Drahtrolle, die um eine gegen die Richtung eines homogenen magnetischen Feldes geneigte Axe gleichmässig gedreht wird, entstehen bekanntlich durch Induction sinusartige elektromotorische Kräfte, deren Richtung nach jeder halben Umdrehung wechselt. Ist die Drahtrolle noch mit einem zweiteiligen Commutator versehen, so entstehen im äusseren Stromkreise sinusartige Stromimpulse, welche aber nur in einer Richtung verlaufen. Um die Gesetze einer solchen Elektricitätsströmung in einem Leiter mit Selbstinduction untersuchen zu können, muss für die elektromotorische Kraft ein mathematischer Ausdruck gefunden werden, der die Eigenschaft besitzt, dem einfachen Sinusgesetz zu genügen, aber für jede beliebige Zeit nur positive Werte anzunehmen vermag. Eine solche Function ist

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{T},$$

wo E_0 die Amplitude der elektromotorischen Kraft, T die Dauer der Periode und t die Zeit bedeutet. Setzen wir dies in die bekannte v. Helmholtz'sche Gleichung ein:

$$R \,.\, i + L \frac{di}{dt} = E,$$

wo R der totale Widerstand des Stromleiters, L der Coefficient der Selbstinduction ist, so geht Hr. Lucas behufs Integration dieser Gleichung folgendermassen vor. Für $L = 0$ ist offenbar $i = \frac{E_0}{R} \sin \frac{2\pi t}{T}$. Setzen wir also

$$t = \frac{T}{2\pi} x + \theta,$$

$$i = y \frac{E_0}{R} \cos \frac{2\pi\theta}{T},$$

so genügt y der Gleichung:

$$y - \sin x + \frac{2\pi L}{RT} \cdot \frac{dy}{dx} - \operatorname{tg} \frac{2\pi\theta}{T} \cdot \cos x = 0.$$

Dieser wird nach Hrn. Lucas, wenn die Nebenbedingung gilt:

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi\theta}{T} = \frac{2\pi L}{RT},$$

durch

$$y = \sin x + C . e^{-x \operatorname{tg} \frac{2\pi\theta}{T}}$$

als allgemeines Integral genügt; richtiger muss es

$$y = \sin x + C . e^{-x \operatorname{ctg} \frac{2\pi\theta}{T}}$$

heissen. Da nun für grosse Werte der Zeit auch x gross ist, so kommt, wie Herr Lucas deducirt, für die Praxis der zweite Summand auf der rechten Seite des Ausdrucks für y nicht in Betracht, und es ist

$$i = \frac{E_0}{R} \cos \frac{2\pi\theta}{T} . \sin \frac{2\pi(t-\theta)}{T},$$

vorausgesetzt natürlich, dass die Nebenbedingung gilt.

Herr Puluj entwickelt E in die Reihe:

$$E = \frac{2}{\pi} E_0 \left[1 - \frac{2}{1.3} \cos \frac{4\pi t}{T} - \frac{2}{3.5} \cos \frac{8\pi t}{T} - \dots\right],$$

macht keinerlei einschränkende Voraussetzungen und erhält natürlich einen complicirteren Ausdruck für i, nämlich für die momentane Stromstärke:

$$i = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{E_0}{R} \left[1 - \frac{2}{1.3} \frac{\cos\left(\frac{4\pi t}{T} - \psi_1\right)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_1}} - \frac{2}{3.5} \frac{\cos\left(\frac{8\pi t}{T} - \psi_2\right)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_2}} - \dots \right],$$

wenn

$$\frac{4\pi L}{RT} = \operatorname{tg} \psi_1, \quad \frac{8\pi L}{RT} = \operatorname{tg} \psi_2, \quad \frac{12\pi L}{RT} = \operatorname{tg} \psi_3, \dots.$$

Es bedeuten also ψ_1, ψ_2, ψ_3, ... die Phasenverschiebungen der einzelnen elektromotorischen Kraftcomponenten. Daraus folgt für die mittlere Stromstärke:

$$(1) \qquad M(i) = \frac{2}{\pi} . \frac{E_0}{R} .$$

Die momentane Stromstärke ist daher gleich der mittleren Stromstärke, vermindert um eine Anzahl periodisch veränderlicher Glieder; diese letzteren sind von der Selbstinduction abhängig und werden um so kleiner, je grösser diese und die Anzahl der Wechselperioden ist. Für $L = \infty$ verschwinden die veränderlichen Glieder, die momentane Stromstärke erreicht alsdann den

grössten Wert $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{E_0}{R}\cdot$ Die Selbstinduction verursacht somit keine Schwächung der mittleren Stromstärke; ihre Wirkung besteht bloss darin, die Stromwellen zu ebnen.

Für das mittlere Quadrat der Stromstärke folgt:

$$M(i^2) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i^2 dt,$$

$$(2)\quad M(i^2) = \left(\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}\right)^2\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{2}{1.3}\right)^2\cos^2\psi_1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{2}{3.5}\right)^2\cos^2\psi_2 + \cdots\right].$$

Auch aus dieser Reihe ersieht man die Gültigkeit des Gesetzes der Superposition der Wirkungen.

Die im Stromkreise von der elektromotorischen Kraft geleistete mittlere Wärmearbeit ist

$$W = M(i^2)R = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} Ei\,dt.$$

Angenähert ist demnach

$$W = \frac{1}{R}\left(\frac{2}{\pi}E_0\right)^2\left[1 + \tfrac{2}{9}\cos^2\psi_1\right].$$

Für $L = 0$ ergiebt sich die grösste Arbeit:

$$W(\max) = \tfrac{1}{2}\frac{E_0^2}{R}.$$

Es folgen nun noch für den Fall, dass die gleichgerichtete elektromotorische Kraft E die periodische Function der Zeit ist:

$$E = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{2\pi t}{T} + A_2\cos\frac{4\pi t}{T} + \cdots,$$

die Ausdrücke für i, $M(i^2)$ und W.

Aus den oben angegebenen Ausdrücken (1) und (2) für $M(i)$ und $M(i^2)$ ergiebt sich das Resultat: Während das mittlere Quadrat der Stromstärke mit der Selbstinduction sich ändert, ist die mittlere Stromintensität von derselben ganz unabhängig und numerisch gleich $\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}$, wenn die gleichgerichtete elektromotorische Kraft eine einfache Sinusfunction der Zeit ist.

Nach diesem Ergebnis war im voraus zu erwarten, dass ein Galvanometer unter der Wirkung von schnell auf einander folgenden gleichgerichteten Stromimpulsen bei grosser und kleiner Selbstinduction denselben Ausschlag gebe, während die Ausschläge eines Elektrodynamometers desto kleiner ausfallen, je grösser die Selbstinduction des Stromkreises bei sonst unverändertem Ohm'schen Widerstand derselben ist.

Dieses theoretische Ergebnis wurde durch Versuche geprüft. Der dabei gebrauchte Erdinductor soll später eingehender beschrieben werden. Die Versuche ergaben durchaus die im voraus erwarteten Resultate. Hae.

C. E. HOLLAND, P. R. JONES and C. G. LAMB. Table of zonal spherical harmonics calculated by Messrs. ... with a short explanation and some illustrations of its use by Professor JOHN PERRY. Phil. Mag. (5) XXXII. 512-523.

Für die gewöhnlichen Kugelfunctionen (Heine, Handbuch, I, S. 12, 1878) $P_1, \ldots, P_7$ wird eine Tabelle der Werte für die Argumente von 0° bis 90°, je um 1° steigend, gegeben und der Wert einer solchen für die exacte Lösung physikalischer Aufgaben an den folgenden drei Beispielen erläutert:

1) Die Dichtigkeit σ der Masse einer Kugelschale von 1 cm Radius ist proportional dem Quadrat der Entfernung irgend eines Punktes von einer bestimmten Diametralebene und im besondern gleich 6 für das qcm für den am weitesten entfernten Punkt. Es soll das Potential für einen innern und äussern Punkt gefunden werden. — Die Lösung wird durch eine Tafel von Meridiancurven der sich ergebenden Aequipotentialflächen erläutert.

2) Durch eine kreisförmige Drahtspirale vom Radius a fliesst ein elektrischer Strom C. Das elektromagnetische Potential in irgend einem Punkte derselben zu bestimmen.

3) Die geradlinige Bewegung einer Kugel in einer ruhenden, unendlichen, incompressiblen Flüssigkeit zu beschreiben. (Vergl. das Referat S. 510 dieses Bandes.) Hae.

E. Riedel. Ueber die elektrische Verteilung auf der Reciprocitätsfläche eines Rotationsellipsoides. Pr. (Nr. 536) Nicolaigymn. Leipzig. 20 S. 4°.

a) Nachdem der Wert $\frac{1}{E}$ der reciproken Entfernung zweier Punkte eines Rotationsellipsoides in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe entwickelt worden ist, wird dieses Resultat darauf angewandt, die Verteilung der Elektricität auf einem Rotationsellipsoide zu untersuchen, wenn demselben eine Elektricitätsmenge M mitgeteilt und dasselbe alsdann sich selbst überlassen wird. Es muss sehr bald das Potential der Belegung auf Punkte im Innern einen constanten Wert c erreichen und daher die Gleichung

$$\iint q d\varphi \frac{1}{E} = c$$

statthaben, wo q die elektrische Dichtigkeit auf dem Conductor, $d\varphi$ dessen Oberflächenelement und E die Entfernung eines Punktes im Innern von diesem letzteren bedeuten. Die Werte von $d\varphi$ und $\frac{1}{E}$ werden eingesetzt, und es ergiebt sich unter Berücksichtigung, dass alle Punkte eines Parallelkreises des Conductors dieselbe Dichtigkeit haben:

$$q\sqrt{\varrho^2-\mu^2} = \frac{c}{2\pi a\sqrt{\varrho^2-1}\,.\,Q_0(\varrho)}.$$

Wenn die Gesamtbelegung den vorgeschriebenen Wert M hat, so ist $\iint q d\varphi = M$, woraus dann $M = \frac{2ac}{Q_0(\varrho)}$ folgt. Demnach durch Elimination von c:

$$(1) \qquad q = \frac{M}{4\pi a^2\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-1}},$$

wenn $\mu = \cos\vartheta$, und ein Punkt des Rotationsellipsoides gegeben ist durch

$$\xi = a\varrho\cos\vartheta, \quad \eta = a\sqrt{\varrho^2-1}\sin\vartheta\cos\omega, \quad \zeta = a\sqrt{\varrho^2-1}\sin\vartheta\sin\omega.$$

b) Ist der Conductor mit einer Elektricitätsmenge M geladen, und wirkt ausserdem noch ein elektrischer Massenpunkt

$M_1(\varrho_1, \mu_1, \omega_1)$ auf denselben ein, so muss wieder das Gesamtpotential der Belegung und des influenzirenden Massenpunktes M_1 in Bezug auf irgend einen Punkt $(\varrho_2, \mu_2, \omega_2)$ im Innern des Conductors constant, etwa $= c$, sein. Also

$$\iint q d\varphi \frac{1}{E_{02}} + M_1 \frac{1}{E_{12}} = c.$$

Wird $d\varphi = -a^2\sqrt{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-1)}\,d\mu d\omega$ eingesetzt und berücksichtigt, dass alle Punkte auf einem Parallelkreise nicht gleiche Dichtigkeit haben, dass also $q\sqrt{\varrho^2-\mu^2}$ nicht bloss von μ, wie in a), sondern auch von ω abhängt, also in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe zu entwickeln ist, so folgt, wenn wieder M den Wert der Gesamtmasse der Belegung des Conductors bezeichnet,

$$q = \frac{1}{4\pi a^2\sqrt{\varrho^2-1}\sqrt{\varrho^2-\mu^2}}$$

$$\times\left\{M - M_1 \sum_1^\infty{}_n \sum_0^n{}_i \alpha_i (2n+1) \Delta_{ni} \frac{Q_{ni}(\varrho_1) P_{ni}(\mu_1)}{Q_{ni}(\varrho)} P_{ni}(\mu) \cos i(\omega-\omega_1)\right\}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1 \text{ für } i = 0, \\ \alpha_i &= 2 \quad\text{„}\quad i > 0; \end{aligned} \qquad \Delta_{ni} = \frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)}.$$

c) Wird das Rotationsellipsoid durch reciproke Radien vom Mittelpunkte aus transformirt, so entsteht die Fläche

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2+z^2}{\beta^2} = (x^2+y^2+z^2)^2,$$

wo

$$x = \frac{\xi}{\varepsilon^2}, \quad y = \frac{\eta}{\varepsilon^2}, \quad z = \frac{\zeta}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon^2 = a^2(\varrho^2 - \sin^2\vartheta).$$

Wieder werden auch für diesen Körper die beiden so eben für das Rotationsellipsoid erledigten Probleme behandelt. In dem ersten Falle ergiebt sich als Resultat:

$$q = \frac{a^2\sqrt{(\varrho^2+\mu^2-1)^3}\,M}{2\pi k\sqrt{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-1)}} \sum_0^\infty{}_n (4n+1) \frac{P_{2n}(0)}{P_{2n}(\varrho)} P_{2n}(\mu)$$

mit

$$k = \sum_0^\infty{}_n (4n+1) P_{2n}^2(0) \frac{Q_{2n}(\varrho)}{P_{2n}(\varrho)}$$

als einer dem Conductor eigentümlichen Constante.

In dem zweiten Falle lautet das Endresultat, wenn

$$k = \sum_0^\infty {}_n(2n+1)P_n^2(0)\frac{Q_n(\varrho)}{P_n(\varrho)}$$

$$k_1 = \sum_0^\infty {}_n(2n+1)P_n(0)\frac{Q_n(\varrho)}{P_n(\varrho)}P_n(\varrho_1)P_n(\mu_1)$$

bedeuten:

$$q = \frac{a^3(\varrho^2+\mu^2-1)^{3/2}}{4\pi\sqrt{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-1)}}\Big[\frac{1}{k}\{2M+M_1k_1\sqrt{\varrho_1^2+\mu_1^2-1}\}$$

$$\times\sum_0^\infty {}_n(4n+1)P_{2n}(0)\frac{P_{2n}(\mu)}{P_{2n}(\varrho)}$$

$$-M_2\sqrt{\varrho_2^2+\mu_2^2-1}\sum_0^\infty {}_i\sum_i^\infty {}_n\alpha_i(2n+1)\Delta_{ni}P_{ni}(\varrho_2)P_{ni}(\mu_2)$$

$$\times\frac{P_{ni}(\mu)}{P_{ni}(\varrho)}\cos i(\omega-\omega_2)\Big].$$

Hae.

H. Poincaré. Sur l'équilibre des diélectriques fluides dans un champ électrique. C. R. CXII. 555-557.

Nach der Theorie von Hrn. v. Helmholtz (Wiedemann Ann. XIII) muss man in die Gleichungen der Hydrostatik Ergänzungsglieder einführen, die sich auf die Wirkung des elektrischen Feldes beziehen, wenn ein dielektrisches Fluidum in ein Feld gebracht wird. Ist p der Druck der Flüssigkeit, v das Gewicht der Volumeneinheit derselben, K die Dielektricitätsconstante, F die Intensität des Feldes, und wirken ausser der Schwere und den Kräften, die sich auf die Wirkung des Feldes beziehen, keine weiteren äusseren Kräfte, so ist nach Hrn. v. Helmholtz:

$$dp+g\frac{dz}{v}+\frac{F^2}{8\pi}dK+d\Big(\frac{v}{8\pi}\frac{dK}{dv}F^2\Big)=0.$$

Da nun

$$\frac{gdz}{v}=gd\Big(\frac{z}{v}\Big)-gzd\Big(\frac{1}{v}\Big)$$

ist, so muss

$$\frac{F^2}{8\pi}dK-gzd\Big(\frac{1}{v}\Big)$$

ein vollständiges Differential sein. Dasselbe kann als Null be-

trachtet werden im Innern einer Flüssigkeit, wenn zugleich deren Temperatur constant ist; denn da die Flüssigkeit incompressibel ist, so sind K (das nur von v abhängen kann) und $\frac{1}{v}$ Constanten. Aber an der Trennungsfläche zweier chemisch verschiedenen Fluida wird das Differential sehr gross sein. Dies erlaubt, die Gleichung der Trennungsfläche zweier Dielektrica niederzuschreiben. Haben für dieselben v_1 und v_2, K_1 und K_2 die oben angegebenen Bedeutungen; seien N_1 bez. N_2 die normalen, und T_1 und T_2 die tangentialen Componenten der elektrischen Kraft F, die beim Ueberschreiten der Trennungsfläche einen Sprung erleidet, in dem ersten bez. zweiten Medium, so ist $T_1 = T_2$, $K_1 N_1 = K_2 N_2$. Die Gleichung der Trennungsfläche wird dann:

$$\frac{T_1^2}{8\pi}(K_1 - K_2) + \frac{K_1^2 N_1^2}{8\pi}\left(\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1}\right) - gz\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) = \text{const.}$$

Es wäre interessant, diese Form der v. Helmholtz'schen Gleichung mit den Versuchen von Quincke zu vergleichen, die sich dann vielleicht auch ohne Maxwell's Theorie erklären lassen.

Hae.

O. Heaviside. On the forces, stresses, and fluxes of energy in the electromagnetic field. (Abstract.) Lond. R. S. Proc. L. 126-129.

Die ausführliche Abhandlung ist abgedruckt in Phil. Trans. CLXXXIII A (1892). 423-480.

Cly.

R. Kopp. Zur Theorie der Elektrostriction kugelförmiger Condensatoren. Leipzig. Fock. 41 S. 8°.

L. de la Rive. Sur la valeur de la tension électrostatique dans le diélectrique. C. R. CXIII. 429-432.

Es wird der Satz abgeleitet: „Der Wert für die Spannung im Dielektricum wird ausgedrückt durch die Bewegungsgrösse des elektrischen Fluidums, wofern dasselbe als incompressibel

vorausgesetzt wird". Als Ausdruck für diese Bewegungsgrösse, also diejenige einer Schicht des Dielektricums, die mit dem Conductor in Berührung ist, wird abgeleitet

$$q = \delta \frac{K'}{4} d\tau \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)^2;$$

dabei ist δ die Dichtigkeit des Fluidums, $-\frac{d\varphi}{dn}$ die Geschwindigkeit desselben in Richtung einer Kraftröhre, $d\tau$ das Volumenelement, und K' der Coefficient der linearen Contraction des Dielektricums. Nach Maxwell ist

$$q = \frac{K}{8\pi}\left(\frac{d\psi}{dn}\right)^2 d\tau;$$

es würde also $\frac{\delta K'}{4} = \frac{K}{8\pi}$, d. h. die Dielektricitätsconstante $K = 2\pi\delta K'$ sein. Hae.

G. Adler. Ueber die mechanische Kraftwirkung an der Conductoroberfläche. Monatsh. f. Math. II. 155-156.

Ist R die Grösse der E. M. K. an der Oberfläche eines Conductors, K die Dielektricitätsconstante in der an ihn angrenzenden Stelle des isolirenden Mediums, so ist die Spannung, die an dem Oberflächenelement normal nach auswärts angreift, $p = \frac{K}{8\pi} R^2$, wie Maxwell zuerst bewiesen hat. Der Verf. giebt folgenden directen Beweis für diese Formel. Die elektrische Energie ist

$$W = \iiint \frac{K}{8\pi} R^2 d\tau,$$

wo die Integration über alle Raumpunkte zu erstrecken ist, in denen R einen von Null verschiedenen Wert hat, also über den ganzen unendlichen Raum mit Ausschluss der Conductoren. Wird nun eine virtuelle Verschiebung dw der Elemente der Conductoroberfläche nach der Normale n vorgenommen, bei welcher diese Elemente sich normal nach auswärts zur unendlich benachbarten Conductoroberfläche ausdehnen, so ist die

Aenderung von W gegeben durch

$$\delta W = -\iint \frac{K}{8\pi} R^2 dw \delta n;$$

dies ist aber die gegen die elektrische Kraft zu leistende Arbeit. Es ist andererseits durch die zur Verschiebung in Anwendung gebrachte mechanische Zugkraft, wenn p deren auf die Flächeneinheit bezogenen Betrag bedeutet, die Arbeit geleistet worden $\iint p dw \delta n$. Nach dem Princip der Erhaltung der Energie muss die Summe beider Arbeiten gleich Null sein; also ist die Spannung, die normal nach auswärts an der Conductoroberfläche angreift, gleich dem oben von Maxwell gegebenen Wert. (Vergl. F. d. M. XVI. 1887. 960). Hae.

Th. Lohnstein. Bemerkungen zu einem Versuch des Herrn von Bezold über dielektrische Polarisation. Wiedemann Ann. XLIV. 164-167.

Herr v. Bezold hat einen Versuch beschrieben (Wiedemann Ann. XXI. 1884), durch welchen die nach dem Tangenten-Gesetze erfolgende Brechung der elektrischen Kraftlinien an der Grenze zweier Dielektrica, nämlich Paraffin und Luft, nachgewiesen werden sollte. Indem Herr v. Bezold eine metallene Kugel nebst Zuführungsdraht in einen Paraffinblock einliess und die Kugel elektrisirte, wurde annähernd der Fall verwirklicht, dass sich eine elektrisirte leitende Kugel im Innern des einen Dielektricums, einer unendlich ausgedehnten ebenen Platte, befindet. Die Vorstellung, von der Hr. v. Bezold ausging, war die, dass in diesem Falle die Kraftlinien Gerade seien, die im ersten Dielektricum, welches die Kugel enthält, von deren Mittelpunkt ausgehen, im zweiten einen Strahlenbüschel darstellen, dessen einzelne Strahlen aus dem ersten durch das Brechungsgesetz erhalten werden, und dessen Mittelpunkt um die Strecke $\frac{K}{K'} \cdot \frac{d}{2}$ hinter der brechenden Ebene liegt, wo d die Dicke der Platte, K und K' die Dielektricitätsconstanten der beiden Medien sind.

Diese Anschauung ist aber ungenau, denn die Kraftlinien sind der Theorie zufolge in beiden Dielektricis krumme Linien. Die mathematische Untersuchung des Problems führt nun zu folgendem Resultat. Befindet sich ein elektrischer Punkt in einer unendlich ausgedehnten elektrischen Platte, und setzt man $\mu = \frac{K-K'}{K+K'}$, so findet man, dass die Tangenten der Kraftlinien, welche durch einen der brechenden Ebene und der Plattennormale unendlich benachbarten Punkt gehen, letztere in einem Punkte schneiden, dessen Entfernung hinter der brechenden Ebene:

$$= \frac{d}{2} \cdot \frac{1+\frac{\mu}{3^2}+\frac{\mu^2}{5^2}+\cdots}{1+\frac{\mu}{3^3}+\frac{\mu^2}{5^3}+\cdots}$$

ist. Dieser Schnittpunkt liegt also in allen Fällen äusserst nahe dem Punkte E. Dagegen schneidet die Tangente einer Kraftlinie, in einem unendlich fernen Punkte gezogen, die Normale in einem Punkte, der um die Strecke:

$$\frac{d}{2} \cdot \frac{1+3\mu+5\mu^2+\cdots}{1+\mu+\mu^2+\cdots} = \frac{d}{2} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} = \frac{d}{2} \frac{K}{K'}$$

hinter der brechenden Ebene liegt. Wahrscheinlich hat Herr v. Bezold die Wirkung in solchen Punkten untersucht, für welche die für unendlich entfernte Punkte geltende Formel angenähert gilt. Hae.

F. Braun. Zur Berechnung der elektromotorischen Kraft inconstanter Ketten. Wiedemann Ann. XLIV. 510-512.

Der Verf. wendet sich gegen einen Einwurf, den Hr. Ostwald gegen einen Satz, enthalten in des ersteren Abhandlung über Tropf-Elektroden, gemacht hatte. Hr. Braun bemerkt, dass sein Satz nur auf der Annahme 1) des Faraday'schen Gesetzes und 2) des Nichtvorhandenseins einer Strömung bei constantem Potential beruht, und dass die Richtigkeit des Satzes keineswegs, wie Hr. Ostwald meint, von der Annahme der Hypothese des-

selben von der Existenz freier Ionen in einer Salzlösung abhängig sei. Hae.

S. H. Burbury, O. J. Lodge, A. P. Chattock. „Modern views of electricity“ — Volta's so called contact force. Nature XLIII. 268-269, 366-367, 439, 463, 515.

Wiederholte Erörterungen über theoretische Vorstellungen betreffs der Contacttheorie, im Anschluss an das Werk des Herrn O. J. Lodge: „Modern views of electricity“. Lp.

S. U. Pickering. On the theory of dissociation into ions and its consequences. Phil. Mag. (5) XXXII. 20-27.

J. Swinburne. On some points in electrolysis. Phil. Mag. (5) XXXII. 1-9.

Zwei Vorträge, gehalten in der Londoner Physikalischen Gesellschaft, von denen besonders der zweite auf die Theorie des Hrn. v. Helmholtz Bezug nimmt. Lp.

A. Oberbeck und J. Edler. Ueber die elektromotorischen Kräfte galvanischer Ketten. Wiedemann Ann. XLII. 209-226.

Nach einer Uebersicht über die bisherigen theoretischen Untersuchungen über galvanische Elemente wird unter Voraussetzung, dass es sich um Ketten handelt, welche die vollständige Umkehrbarkeit derjenigen Vorgänge zulassen, die eintreten, wenn der Strom die Kette in dem einen oder andern Sinne durchläuft, der Ausdruck für die E. M. K. derselben abgeleitet:

$$E = c(A-K)-\vartheta(\alpha-\varkappa)-c\vartheta\int\frac{d(A-K)}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{\vartheta};$$

dabei bedeutet A die Wärmetönung des chemischen Processes für die Stromeinheit und Zeiteinheit an der Anode, K dieselbe an der Kathode, $c = \frac{1}{46000}$, $a = \alpha\vartheta$ die wirklich bei Strom-Durchgang auftretende Wärmemenge an der Anode, $k = \varkappa\vartheta$ den durch Abkühlung zu erkennenden Wärmeverbrauch an der Kathode, beide Wärmemengen nach mechanischem Mass gemessen; ϑ die absolute Temperatur.

Danach wäre also die Berechnung der elektromotorischen Kraft streng umkehrbarer Ketten zurückgeführt auf die Kenntnis der Wärmetönungen der chemischen Processe und auf diejenige der localen Wärmeentwickelungen bei Uebergang der Elektricität vom Metall in die Salzlösung des Metalls. Die Grundlagen dieser Annahmen werden durch ein reiches Beobachtungsmaterial geprüft, und aus dem letzteren die folgenden Sätze abgeleitet:

1) Die elektromotorischen Kräfte der untersuchten Ketten hängen hauptsächlich ab:

a) von dem Metall der beiden Elektroden,

b) von dem elektronegativen Bestandteil der Salzlösung.

2) Von dem Metall der Salzlösung sind die E. M. Kräfte nur dann abhängig, wenn dasselbe mit dem Metall der einen Elektrode übereinstimmt. In diesem Fall ist die E. M. K. kleiner.

Für die Theorie der galvanischen Ketten aber liegen die wesentlichsten Grundlagen in den beiden Sätzen:

1) Die E. M. K. ist zu berechnen aus den Wärmetönungen der chemischen Processe, aber mit Berücksichtigung der an den Elektroden sich abspielenden localen Wärmevorgänge.

2) Die inconstanten Ketten sind auf die constanten Ketten durch die Annahme molecularer Schichten von Lösung der Elektrodenmetalle zurückzuführen. Letztere sind als verdünnte Lösungen aufzufassen. Hae.

F. Streintz. Beiträge zur Theorie des Secundärelementes. (Dritte Mitteilung.) Wiedemann Ann. XLIII. 241-256.

Man vergleiche die Referate über die beiden ersten Mitteilungen in F. d. M. XXI. 1889. 1163 und XXII. 1890. 1129. Es handelt sich um Untersuchungen über die Capacität und den Wirkungsgrad von Elementen mit verschieden grossen positiven Platten.

Sei während der Ladung P' die Potentialdifferenz zwischen dem amalgamirten Zink und der positiven Bleiplatte des Elementes, p' die Potentialdifferenz zwischen dem amalgamirten Zink und der negativen Platte, weiter P und p die entsprechenden Grössen während der Entladung, so ist die elektromotorische Kraft des

Elementes während der Ladung gegeben durch $e' = P'-p'$. Bedeutet J' die Stromstärke, bei welcher geladen worden, dann erhält man $P'-p' = K'-J'w'$, wenn unter K' die Klemmenspannung, unter w' der Widerstand des Elementes verstanden wird. Das Product J'^2w' giebt die im Elemente in der Secunde entwickelte Wärmemenge (Joule-Wärme) an. Da die zur Erzeugung dieser Wärme erforderliche Energie im Elemente verbraucht wird, so muss dieselbe bei Beurteilung der an dasselbe abgegebenen Energie berücksichtigt werden. Diese Energie, die in der Zeit t' an den Polen abgesetzt wird, ist mithin $= K'J't'$.

Für die Entladung gilt die Gleichung:

$$P-p = K+Jw,$$

und die Arbeit ist $(P-p)Jt$. Daher ist der Wirkungsgrad des Elementes $\eta = \frac{(P-p)Jt}{K'J't'}$. Da es sich nun bei der Messung zunächst nur darum handelt, die verschiedenen Elemente auf ihre Capacität und ihren Wirkungsgrad zu vergleichen, so wurde gewöhnlich auf die Ermittelung von K' verzichtet und angenähert $\eta = \frac{(P-p)Jt}{(P'-p')J't'}$ gesetzt.

Diese Formel hat dieselbe Berechtigung wie die bisher angewandte $\eta = \frac{KJt}{K'J't'}$.

Es wird nun zur experimentellen Untersuchung der Capacität eines Secundärelementes geschritten, worunter die Energie, ausgedrückt in Stundenwatts, verstanden wird, welche das Element bis zu einem gewissen Verluste der anfänglichen Stromstärke abzugeben im Stande ist; gewöhnlich wird diese Energie auf ein Kilogramm des Gesamtgewichtes des Elementes bezogen.

Hae.

Ch. Ed. Guillaume. Théorème relatif au calcul de la résistance d'une dérivation. C. R. CXII. 223-226.

Gebraucht man die Carpentier'schen Widerstandskästen, um Bruchteile der Widerstandseinheit zu bestimmen, so hat man, wenn z. B. zehn Spulen von je 1 Ohm eingeschaltet werden, 11

Stöpsel zur Verbindung der Spulen nötig, deren Widerstand, verglichen mit der zu bestimmenden Grösse von etwa $\frac{1}{10}$ Ohm, keineswegs vernachlässigt werden kann. Ueberschreitet nun die Zahl der Spulen 3 oder 4, so ist die Berechnung des Widerstandes zwischen A und B ziemlich mühsam. Es wird daher folgendes Verfahren vorgeschlagen, das auf der Umformung einer bekannten Formel beruht. a) Geht von K bis L ein Strom mit dem Widerstande r_0, und zerteilt sich der Strom in L in n Zweige mit den Widerständen $r_1, r_2, \ldots, r_n$, die in M sämtlich wieder zusammenkommen, so ist bekanntlich der Widerstand zwischen K und M durch die Formel gegeben:

$$(1) \qquad R = r_0 + \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}}.$$

Wir wollen nun annehmen, dass der Draht KL aus n Drähten besteht, deren jeder einen Widerstand r'_p habe, proportional dem Widerstande r_p seiner Fortsetzung von L bis M. Dann lässt sich (1) umformen in:

$$(2) \qquad R = \frac{1}{\sum_1^n {}_p \frac{1}{r_p + r'_p}},$$

wenn r'_p definirt ist durch die Gleichung:

$$(3) \qquad r'_p = r_p r_0 \sum_1^n {}_p \frac{1}{r_p},$$

die offenbar der so eben ausgesprochenen Bedingung Genüge leistet.

b) Diese allgemeine Methode möge zuerst auf folgendes Beispiel angewandt werden. Gegeben sei ein Viereck $ABDC$, gebildet aus Leitern mit den Widerständen $AB = r_1$, $BD = r_2$, $DC = r_4$, $CA = r_3$; auf der Diagonale BC herrsche der Widerstand r_5. Der Leitungsdraht AB werde in zwei zerlegt mit den bezüglichen Widerständen mr_1 und nr_1, und der Draht CD in zwei andere mit den bezüglichen Widerständen pr_4 und qr_4. Nach (2) ist dann der Widerstand von A bis zur gegenüberliegenden Ecke

D gegeben durch

$$R = \frac{1}{\frac{1}{mr_1+r_2} + \frac{1}{nr_1+r_5+qr_4} + \frac{1}{r_3+pr_4}},$$

während nach (3) die Grössen m, n, p, q folgendermassen sich bestimmen:

Von A bis B liegen zwei Drähte; dieselben verzweigen sich bei B in die Wege $BD(r_2)$ und $B-C-D(r_5, qr_4)$; daher ist

$$mr_1 = r_2.r_1\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_5+qr_4}\right)$$

und

$$nr_1 = (r_5+qr_4)r_1\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_5+qr_4}\right),$$

oder kurz

$$m = r_2\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_5+qr_4}\right) = \frac{n}{n-1};$$

und ganz analog für die Schleife $AC(nr_1+r_5)-CD(pr_4)-DC(qr_4)$:

$$p = r_3\left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{nr_1+r_5}\right) = \frac{q}{q-1}.$$

Man hat also zwei Gruppen von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten, die man auflösen muss, um R berechnen zu können.

c) Gehen nun im allgemeinen von A Drähte mit den Widerständen a_i aus, deren jeder sich in zwei Drähte spaltet, die der Reihe nach die Widerstände r_1, r_2, ... haben, doch so, dass je zwei, die nicht von demselben a_i herkommen, sich zu einem Draht vereinigen, der den Widerstand b_i hat, und zerlegt man die Drähte a_i bez. b_i in je zwei andere, deren Widerstände im Verhältnis $m_i:n_i$ stehen, so kann der Stromkreis von A bis B ersetzt gedacht werden durch:

$$m_1a_1+r_1+b_1, \quad n_1a_1+r_2+p_2b_2, \quad m_2a_2+r_3+q_2b_2, \quad \ldots,$$

und die m, n, p, q sind gegeben durch:

$$m_1 = (r_1+b_1)\left(\frac{1}{r_1+b_1} + \frac{1}{r_2+p_2b_2}\right) = \frac{n_1}{n_1-1},$$

$$p_2 = (r_2+n_1a_1)\left(\frac{1}{r_2+n_1a_1} + \frac{1}{r_3+m_2a_2}\right) = \frac{q_2}{q_2-1},$$

. . . .

Die wirkliche Auflösung dieses Systems von Gleichungen ist für den allgemeinen Fall recht complicirt. Aber für den oben erwähnten Carpentier'schen Widerstandskasten vereinfacht sich das Verfahren bedeutend. Da für denselben die a_i und b_i sehr klein sind gegen die Widerstände der Spulen r_i, so kann man diese Grössen sämtlich einander gleich annehmen, also $a_i = b_i = \varepsilon$ setzen. Setzt man nun in dem allgemeinen Schema von Gleichungen für n oder p einen angenäherten Wert ein und berechnet alsdann die übrigen, so wird ein Rest bleiben; es muss also zu dem Werte von n noch ein Correctionsglied hinzugefügt werden. Wird dann in dem letzteren $r_1 = r_2 = \dots$ gesetzt, so ergiebt sich $m_1 = n_1 = p_1 = \dots = 2$, und folglich ist

$$R = \frac{1}{\frac{1}{r_1+3\varepsilon}+\frac{1}{r_2+4\varepsilon}+\frac{1}{r_3+4\varepsilon}+\dots+\frac{1}{r_n+3\varepsilon}}.$$

Hae.

J. Linde. Methode zur Bestimmung des Selbstpotentials. Exner Rep. XXVII. 385-390.

Mit Hülfe der Wheatstone'schen Brücke. Lp.

Lord Rayleigh. On the sensitiveness of the bridge method in its application to periodic electric currents. Lond. R. S. Proc. XLIX. 203-217. Cly.

M. Wien. Messung der Inductionsconstanten mit dem „optischen Telephon“. Wiedemann Ann. XLIV. 689-712.

A. Anderson. On coefficients of induction. Phil. Mag. (5) XXXI. 329-337.

Hr. W. benutzt den von ihm construirten Apparat, um das Selbstpotential, den gegenseitigen Inductionscoefficienten und die Capacität zu messen, und zwar kommt dabei nur die Nulleinstellung der Wheatstone'schen Brücke zur Anwendung. Nachdem im Anschluss an die Arbeiten von Oberbeck und Lord

Rayleigh der Ausdruck für die Amplitude eines Wechselstromes im Brückenzweige abgeleitet worden ist, werden die Bedingungen dafür aufgestellt, dass ein Sinusstrom von der Periode n im Brückendraht verschwindet.

Hr. A. gebraucht ein ballistisches Galvanometer und verwendet zur Bestimmung der Inductionsconstanten sowohl die Nullmethode nach dem Vorgang von Maxwell (Art. 778), als auch noch zwei andere Methoden. Hae.

G. Adler. Ueber die Capacität von Condensatoren. Monatsh. f. Math. II. 413-420.

Es handelt sich um einige Anwendungen eines Satzes, den der Verf. bereits in dem Aufsatz: „Allgemeine Sätze über die elektrostatische Induction" (vergl. F. d. M. XXI. 1889. 1140) abgeleitet hat, und dessen Beweis hier zuerst wiederholt wird. Der Satz lautet: „Besteht ein Condensator aus zwei einander umschliessenden Conductoren, die zu einander als Niveauflächen gehören, bezeichnet C_1 die Capacität des inneren, allen elektrischen Einflüssen entzogenen Conductors, C_2 diejenige des äusseren, dann ist die Capacität dieses Condensators, d. h. jene Ladung, die der innere Conductor aufzunehmen vermag, wenn er, unter gleichzeitiger Ableitung des umschliessenden äusseren Conductors zur Erde, zum Potential Eins geladen wird:

$$C' = \frac{C_1 C_2}{C_2 - C_1}.\text{“}$$

Daraus folgt: 1) für den Kugelcondensator in Uebereinstimmung mit Maxwell $C' = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$; 2) für den Cylindercondensator von der Länge L in Uebereinstimmung mit dem von Sir W. Thomson für ein Telegraphenkabel gefundenen Wert:

$$C' = \frac{L}{2} \frac{1}{\log r_2 - \log r_1};$$

3) für einen ellipsoidischen Conductor wie in Betti, Potential-

theorie, freilich bis auf das Vorzeichen:

$$C = \frac{2}{\int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{D}},$$

wenn $D = \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$, $l^2 = a^2-c^2$. Setzt man $\lambda = \wp\left(\frac{u}{l}\right)$, wo $\wp(u)$ die bekannte Weierstrass'sche Function ist, so ist $C = \frac{l}{u_1}$, wenn $\lambda_1 = \wp\left(\frac{u_1}{l}\right)$ sich auf den angezogenen Punkt bezieht; 4) für einen von zwei confocalen Ellipsoiden begrenzten Condensator, für welchen die Werte der Halbaxen a, b, c bez. $a' = \sqrt{a^2+\lambda_1}$, $b' = \sqrt{b^2+\lambda_1}$, $c' = \sqrt{c^2+\lambda_1}$ sind, ist $C' = \frac{l}{u-u_1}$. Weiter ergiebt sich hieraus durch Uebergang zur Grenze 5) für einen aus zwei confocalen verlängerten Rotationsellipsoiden gebildeten Condensator, für den $b = c$ ist:

$$C' = \frac{l}{\log\left(\frac{a+l}{a'+l}\cdot\frac{c'}{c}\right)};$$

6) für einen aus zwei confocalen abgeflachten leitenden Rotationsellipsoiden gebildeten Condensator, für den $a = b$ ist:

$$C' = \frac{l}{\operatorname{arctg}\frac{l}{c} - \operatorname{arctg}\frac{l}{c'}};$$

7) für einen Condensator, der von einer leitenden Kreisscheibe und einem dieselbe in der Entfernung d umgebenden leitenden Rotationsellipsoide gebildet ist:

$$C' = \frac{a}{\operatorname{arctg}\frac{d}{a}}.$$

Dieser Ausdruck ist nach dem Verf. für sehr kleine Werte von d angeblich doppelt so gross wie die Capacität einer Kreisscheibe vom Radius a, die sich mitten zwischen zwei unendlichen ebenen Platten und zwar im Abstande d von jeder derselben befindet, und die nach Maxwell gegeben sein soll durch

$$C'_1 = \frac{a^2}{2d} + \frac{2a}{\pi}\log\pi + d.$$

Dies ist aber ein Irrtum; denn im Maxwell (-Weinstein), § 200, S. 320 steht in Wirklichkeit

$$C'_1 = \frac{a^2}{d} + \frac{2a}{\pi}\log 2 + \frac{d}{2}.$$

Der daran geknüpfte Schluss ist also falsch.

Endlich wird die Ladung für die zwei Leiterflächen des Condensators bestimmt. Sie ist für die äussere Fläche, wenn dieselbe auf dem Potential α gehalten wird, die innere aber auf dem Potential β, für jene $A = C'(\alpha-\beta)$, und für die innere Fläche:

$$B = C_2\beta - C'(\alpha-\beta).$$

Hae.

A. Heydweiller. Ueber den Durchgang der Elektricität durch Gase. 3. Funkenentladungen von Condensatoren in normaler Luft. Wiedemann Ann. XLIII. 310-342.

G. Kirchhoff, C. Neumann und Sir W. Thomson haben bekanntlich die Gleichungen für die Elektricitätsbewegung bei der Entladung eines Condensators abgeleitet. Bezeichnet q_1 die Ladung der einen Belegung eines Condensators von der Capacität c zur Zeit t, so ist die Differentialgleichung für die Elektricitätsbewegung in einem ununterbrochenen leitenden Schliessungsbogen vom Widerstand r und mit dem Selbstinductionscoefficienten p bekanntlich:

$$(1) \qquad \frac{q_1}{c}\frac{dq_1}{dt} + r\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + p\frac{dq_1}{dt}\frac{d^2q_1}{dt^2} = 0.$$

Hierin stellt das erste Glied die Arbeit der elektrischen Kräfte, das zweite die Joule'sche Stromwärme, das dritte die der Selbstinduction entsprechende Arbeit dar. Die Gleichung ist vollständig, falls keine andere Arbeit geleistet wird.

Bei den angestellten Versuchen war der Widerstand $r > 2\sqrt{\frac{p}{c}}$. Unter dieser Bedingung lautet die vollständige Lösung von (1), wenn den Anfangsbedingungen $q = q_0$ und $\frac{dq}{dt} = 0$ für $t = 0$ genügt wird:

$$q_1 = \frac{q_0}{2ap} e^{-\frac{rt}{2p}} \left\{ \left(ap + \frac{r}{2} \right) e^{at} + \left(ap - \frac{r}{2} \right) e^{-at} \right\},$$

$$a = \frac{r}{2p} \sqrt{1 - \frac{4p}{r^2 c}}.$$

Nimmt man die Richtung des positiven Entladungsstroms als positiv, so ist die Stromintensität i_1 zur Zeit t:

$$i_1 = -\frac{dq_1}{dt} = \frac{q_0}{2apc} e^{-\frac{rt}{2p}} \{ e^{at} - e^{-at} \}.$$

Wenn aber der Schliessungsbogen durch eine Funkenstrecke unterbrochen ist, so ist noch die in dieser geleistete Arbeit in die Gleichung (1) einzuführen. Es sei dieselbe gleich k, so erhält man für den unterbrochenen Schliessungsbogen die Differentialgleichung:

$$(2) \qquad \frac{q}{c} \frac{dq}{dt} + r \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + p \frac{dq}{dt} \frac{d^2 q}{dt^2} + k = 0.$$

Ueber k sind verschiedene Annahmen gemacht worden. Die Prüfung derselben scheitert an der Nichtintegrirbarkeit der Gleichung (2). Indessen lassen sich aus (2) einige Folgerungen ziehen, die mit der Erfahrung vergleichbar sind.

Aus (2) geht hervor:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{r}{p} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{pc} = -\frac{k}{p \frac{dq}{dt}}.$$

Nun ist aber für die einfache Entladung die Stromintensität $i_1 = -\frac{dq_1}{dt}$ eine von dem fast augenblicklich erreichten Maximalwerte an allmählich abnehmende Function der Zeit, die nur für den Beginn und das Ende der Entladung für $t = 0$ mit $t = t_1$ verschwindet. Innerhalb gewisser hinreichend weit von jenen Endwerten abliegenden Grenzen kann man sich daher

$$-\frac{k}{p \frac{dq}{dt}} = \frac{k}{pi}$$

nach steigenden Potenzen von t entwickelt denken. Die Lösung von (2) hat dann die Form:

$$q = q_1 + l + mt + nt^2 + \cdots$$

und

$$i = i_1 - m - nt - \cdots,$$

wo l, m, n gewisse von t unabhängige Coefficienten bezeichnen. Daraus folgt, in Uebereinstimmung mit früheren Experimentaluntersuchungen des Verf., dass die Intensität des Entladungsstromes durch die Einschaltung der Funkenstrecke um einen mit der Zeit wachsenden Betrag vermindert wird. Hae.

HERTZ's experiments. Nature XLIII. 536-538; XLIV. 12-14, 31-35.

Eine populäre Beschreibung und Erklärung der Hertz'schen Versuche. Lp.

E. COHN und F. HEERWAGEN. Ueber die Periode sehr schneller elektrischer Schwingungen. Wiedemann Ann. XLIII. 343-370.

Die Entladung eines Condensators durch einen Draht von nicht zu grossem Widerstand ist bekanntlich oscillatorisch. Die Periode der Schwingungen ist bei verschwindendem Widerstand der Leitung durch die wohl zuerst von W. Thomson aufgestellte Formel gegeben:

$$T = A\pi\sqrt{pc},$$

wo p den Selbstinductionscoefficienten des Entladungskreises in magnetischem Mass, c die Capacität des Condensators in elektrischem Mass und A die Reductionszahl der beiden Masssysteme (das Reciproke der Lichtgeschwindigkeit) bedeutet. Die obige Gleichung hat sich als gültig erwiesen, wenn die Schwingungszahlen bis zu einer Million in der Secunde ansteigen. Für die sehr viel schnelleren Hertz'schen Schwingungen war eine directe Messung der äusserst kleinen Schwingungszeiten bisher nicht gelungen. Für die Bestimmung dieser Grössen gehen die Verfasser daher von den allgemeinen elektrodynamischen Grundgleichungen des Hertz'schen Aufsatzes aus: „Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie“, und aptiren dieselben für die von Lecher angestellten Versuche. Indem sie die vereinfachenden Annahmen machen:

a) die Energie beider Systeme (Drahtleitung und Condensator) hat eine von der Zeit unabhängige Summe;

b) die elektromotorische Kraft zwischen den Drahtenden nächst dem Condensator ist identisch mit der elektromotorischen Kraft zwischen den Condensatorplatten,

erhalten sie für die Wellenlänge λ die Formel

$$\operatorname{tg}\frac{\pi z}{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi c q},$$

worin $q = 4\log\left(\frac{b}{a}\right)$ den Selbstinductionscoefficienten der Längeneinheit der Paralleldrähte mit den Radien a bez. b bedeutet. Es wird gezeigt, dass diese Formel, wenn z klein gegen qc ist, in die Thomson'sche Formel übergeht, indem $\frac{\lambda}{T} = \frac{n}{m} = \frac{1}{A}$ ist. Die Lecher'schen Versuche werden einer Kritik unterzogen, unter möglichster Veränderung der Versuchsbedingungen wiederholt, und die Beobachtungsresultate mit den sich aus der Formel ergebenden verglichen, wobei sich unter Berücksichtigung der Fehlergrenzen ein befriedigendes Ergebnis herausstellt.

Hae.

V. Bjerknes. Ueber die Erscheinung der multiplen Resonanz elektrischer Wellen. Wiedemann Ann. XLIV. 92-101.

V. Bjerknes. Ueber den zeitlichen Verlauf der Schwingungen im primären Hertz'schen Leiter. Wiedemann Ann. XLIV. 513-526.

Durch Untersuchungen über die in einem Draht erzeugten stehenden elektrischen Wellen sind die Herren Sarasin und de la Rive zu dem bemerkenswerten Resultat gekommen: Die auf gewöhnliche Weise gemessene Länge solcher Wellen variirt mit den Dimensionen des secundären Leiters, wenn auch der primäre Leiter derselbe bleibt; sie ist constant für einen und denselben secundären Leiter, welches auch der primäre Leiter sei. Sie haben diese Entdeckung so gedeutet, dass alle durch die verschiedenen secundären Kreise beobachteten Wellen that-

sächlich vorhanden sind, dass also der primäre Leiter, etwa wie die Sonne, Wellen von allen möglichen Längen aussendet. Die Erscheinung haben sie als „multiple Resonanz“ bezeichnet. Herr Bjerknes bemüht sich, zu zeigen, dass man die ausgesprochene Hypothese der beiden Genfer Physiker ganz gut entbehren kann. Denn das von denselben erhaltene experimentelle Resultat ist eine Consequenz der beiden von Hrn. Bjerknes in seiner Experimentaluntersuchung „über die Dämpfung schneller elektrischer Schwingungen“ (Wied. Ann. XLIV) erhaltenen Zahlen, nämlich $\gamma = 0{,}26$ für das logarithmische Decrement der Schwingungen des primären und $\delta = 0{,}002$ für das der Schwingungen des secundären Leiters.

Die Rechnungen werden für ebene Wellen im Luftraume durchgeführt. Handelt es sich erstens um stehende elektrische Wellen, so sei die yz-Ebene die reflectirende Metallwand. Ein mit ihr paralleles System ebener Wellen komme von positiv unendlich x. Die elektrische Kraft, welche in der Wellenebene liegt, sei parallel der y-Axe. Die aufeinander folgenden Wellen sollen nach einem Exponentialgesetze abnehmen, aber jede Welle an sich soll sich mit unveränderlicher Höhe fortpflanzen. Zur Zeit $t = 0$ soll die Bewegung die yz-Ebene erreichen. Die elektrische Kraft des einfallenden Wellenzuges kann man dann schreiben:

$$Y_1 = \mathfrak{A}.e^{-\alpha t - \alpha_1 x}\sin(at + a_1 x).$$

Die Forderung, dass sich jede Welle mit unveränderter Höhe fortpflanzt, ergiebt:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\alpha}{\alpha_1} = v,$$

wo v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist; aus der anderen, für $t = 0$ bestehenden, folgt: für $t < -\frac{x}{v}$ ist $Y_1 = 0$.

Das logarithmische Decrement der Wellen ist bestimmt durch:

$$\mathfrak{Y} = 2\pi\frac{\alpha}{a} = 2\pi\frac{\alpha_1}{a_1}.$$

An der Oberfläche des Spiegels ist nach der Maxwell'schen Theorie die elektrische Kraft immer Null. Die Gleichung der

reflectirten Bewegung wird deshalb sein:

$$Y_2 = -\mathfrak{A}.e^{-at+a_1x}\sin(at-a_1x),$$

mit der Nebenbedingung:

$$\text{für } t<\frac{x}{v} \text{ ist } Y_2=0.$$

Also ist $Y=Y_1$ im Zeitraum $t=-\frac{x}{v}$ bis zu $t=\frac{x}{v}$, von da an ist $Y=Y_1+Y_2$. Aus der Annahme, dass $\alpha_1 x$ nur kleine Werte hat, wird dann

$$Y_1+Y_2 = 2\mathfrak{A}\sin a_1x.e^{-at}\cos at$$

geschlossen, und dies ist der Ausdruck für stehende Schwingungen mit festen Knoten, dessen Discussion unter Annahme eines logarithmischen Decrements von $\gamma = 0{,}26$ zu den Sarasin-de la Rive'schen Resultaten für den primären Leiter führt.

Zweitens werden aber auch die Rechnungen für den secundären Kreis durchgeführt. In der Zeit $t=-\frac{x}{v}$ bis $t=\frac{x}{v}$ ist die Elektricitätsbewegung der einfallenden Welle gegeben durch:

$$\varphi_1 = Ae^{-at-a_1x}\sin(at+a'+a_1x)+Be^{-\beta t-\beta_1 x}\sin(bt+b'+b_1x).$$

Von da an wirken die Kraft der einfallenden und die der zurückkehrenden Welle gemeinschaftlich, und es ist

$$\varphi = \varphi_1+\varphi_2,$$

wo φ_2 aus φ_1 dadurch hervorgeht, dass man die Vorzeichen von A, B, α_1, β_1, a_1 und b_1 umkehrt. Dabei muss

$$\frac{\beta}{\beta_1} = \frac{b}{b_1} = v$$

und wegen der Anfangsbedingung:

$$\frac{B}{A} = \frac{a}{b}$$

sein. Auch dieser Ausdruck wird discutirt, unter Rücksicht auf das logarithmische Decrement $\delta = 0{,}002$, und die Resultate stimmen mit denen der genannten Genfer Physiker überein.

In seiner zweiten Abhandlung prüft Hr. Bjerknes von den verschiedenen Hypothesen über die Elektricitätsbewegung im

primären Hertz'schen Leiter die in der ersten benutzte und zugleich einfachste, in der die Entfernung vom Gleichgewichtszustand gegeben ist durch die Function:

$$F(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(at + a').$$

Er berechnet das Decrement und kommt zu Resultaten, die mit seinen Versuchen in ziemlicher Uebereinstimmung sind.

Hae.

H. Poincaré. Sur la résonance multiple des oscillations hertziennes. Arch. scienc. phys. et nat. Genève. (3) XXV. 609-627.

Diese Arbeit schliesst sich eng an die Untersuchungen der Herren Sarasin und de la Rive an. Sie sucht deren Resultat aus der Annahme einfach periodischer Schwingungen mit Dämpfung herzuleiten; ihre Grundgedanken sind dieselben wie die in den Abhandlungen des Hrn. Bjerknes. Indem Hr. Poincaré an die Arbeiten von Hertz und an die Note V seines Werkes „Électricité et optique" anknüpft, entwickelt er die Theorie eines geradlinigen und eines kreisförmigen Hertz'schen secundären Leiters bez. Resonators, um aus derjenigen des letzteren die Erscheinungen der multiplen Resonanz zu deuten. Der Schluss der Abhandlung gilt der Frage, warum bei den Experimenten über Interferenz der elektrischen Wellen die Abstände der Knoten der Periode des Resonators, aber nicht der Periode des Vibrators entsprechen. Die Ergebnisse seiner Theorie sind, wie bei Hrn. Bjerknes, in Uebereinstimmung mit den Resultaten der beiden Genfer Physiker. Hae.

H. Poincaré. Sur le calcul de la période des excitateurs hertziens. Archives sc. phys. et nat. de Genève. (3) XXV. 5-25.

H. Poincaré. Sur la théorie des oscillations hertziennes. C. R. CXIII. 515-519.

Hatte Herr Poincaré in der voranstehenden Abhandlung aus der Theorie des kreisförmigen Resonators Schlüsse für die Grösse der Periode des Vibrators zu ziehen versucht, so gelten die oben genannten Abhandlungen der Bestimmung der Periode eines be-

liebigen Vibrators. In der ersten wird gezeigt, dass die gesuchte Grösse durch die Lösung des folgenden Problems gefunden werden kann:

Eine Zahl μ und sechs Functionen X, Y, Z, L, M, N der drei Coordinaten x, y, z zu finden, die folgenden Bedingungen genügen:

1) Diese sechs Functionen müssen in allen Punkten des von dem Dielektricum erfüllten Raumes analytische Functionen sein.

2) Wenn dieser Raum sich bis ins Unendliche erstreckt, so müssen dort die Functionen verschwinden.

3) In allen Punkten des Dielektricums müssen die Functionen den Bedingungen genügen:

$$X = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad K\mu^2 L = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$
$$Y = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad K\mu^2 M = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x},$$
$$Z = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad K\mu^2 N = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

wo

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

4) An der Oberfläche der Leiter und im besonderen an der des Vibrators ist der Vector, dessen Componenten X, Y, Z sind, normal zur Oberfläche. Die Zahl μ und die sechs Functionen können reell oder imaginär sein.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, und wenn man setzt:

$4\pi f$ = dem reellen Teil von $e^{i\mu t} X$,
$4\pi g$ = „ „ „ „ $e^{i\mu t} Y$,
$4\pi h$ = „ „ „ „ $e^{i\mu t} Z$,
α = „ „ „ „ $i\mu . e^{i\mu t} . L$,
β = „ „ „ „ $i\mu . e^{i\mu t} . M$,
γ = „ „ „ „ $i\mu . e^{i\mu t} . N$,

so genügen die Componenten f, g, h der elektrischen Verrückung und α, β, γ der magnetischen Kraft den Maxwell'schen Gleichungen.

Man hat also auf diese Weise eine periodische elektromagnetische Störung definirt, die mit den Maxwell'schen Gleichungen verträglich ist.

Die Periode ist dann gleich 2π dividirt durch den reellen Teil von μ.

Wenn die Zahl μ selbst reell ist, so ist die Amplitude der Schwingungen constant. Die sechs Functionen sind reell.

Wenn μ imaginär ist, so nimmt die Amplitude nach einem Exponentialgesetz ab; es giebt ein logarithmisches Decrement, das von dem imaginären Teil von μ abhängt. Die sechs Functionen sind imaginär.

Diese zwei Fälle bieten sich dem Experimentirenden in der Weise dar, dass entweder 1) der Vibrator in einem vollständig geschlossenen Zimmer mit leitenden Wänden sich befindet, wo also der vom Dielektricum erfüllte Raum ein endlicher ist, oder 2) der Vibrator sich in einem unendlich grossen Raume befindet.

Dieser zweite Fall ist nach Hrn. Poincaré's Meinung in den Experimenten von Hertz, von Sarasin und de la Rive u. a. verwirklicht worden. Hr. Poincaré tritt den Beweis für die Richtigkeit der oben gegebenen Bedingungen und Resultate nur für den ersten Fall an. Aber in der an zweiter Stelle genannten Note kommt er noch einmal auf den Gegenstand zurück und zeigt, dass ganz allgemein X, Y, Z die reellen Teile von $X'.e^{kt}$; $Y'.e^{kt}$; $Z'.e^{kt}$ sind, wo X' ein Potential aus der Anziehung einer fingirten Belegung auf der Oberfläche des Leiters, k eine imaginäre Constante ist. Im Innern des Leiters muss f verschwinden; dort ist folglich $Xdx+Ydy+Zdz$ ein vollständiges Differential. Wenn umgekehrt diese Bedingung erfüllt ist, so sind die elektrische Verrückung und die magnetische Kraft gleich Null im Innern des Leiters; die Kraftlinien aber treffen aussen senkrecht auf die Oberfläche des Leiters. Dieser Grenzbedingung muss also bei der Berechnung der Periode genügt werden. Hae.

Fr. Koláček. Zur Theorie der elektrischen Schwingungen. Wiedemann Ann. XLIII. 371-384.

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, die Schwingungsdauer elektrischer Wellen bei Benutzung eines Hertz'schen Vibrators, dessen Materie unendlich gut leitet, direct aus den Maxwell'schen Gleichungen herzuleiten. Das Problem ist für beliebig gegebene Vibratorformen nicht lösbar, wohl aber ist das folgende der Rechnung zugänglich: „Es ist ein Vibrator gegeben, dessen Oberfläche durch ein Rotationsellipsoid begrenzt ist. Der zwischen seinen congruenten Hälften liegende Schlitz ist durch die Oberfläche eines confocalen Rotationshyperboloids begrenzt. Während der Oscillation existirt ein die Scheitel der Hyperboloidflächen verbindender, unendlich gut leitender Funke, dessen Oberfläche wir unbeschadet der Genauigkeit mit einem confocalen Rotationsellipsoid zusammenfallen lassen können, und dessen Halbaxe fast gleich ist dem Abstande der Brennpunkte."

Die schliessliche Lösung dieser Aufgabe erscheint abhängig von der anderen, die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\mu^2 y=\frac{\nu y}{(x^2-e^2)}$$

in geschlossener Form zu integriren. Ein Versuch, dies zu thun, wird nicht gemacht. Wohl aber wird das Problem in dem leicht zugänglichen Falle $\nu=0$ eingehend behandelt und gelöst, und daraus dann die Schwingungsdauer elektrischer Wellen abgeleitet.

Hae.

V. Dvořák. Zur Theorie selbstthätiger Stromunterbrecher. Wiedemann Ann. XLIV. 344-376.

Die bisherige Theorie des Wagner'schen Hammers, wie sie schon 1839 von Neeff aufgestellt wurde, ist, wie Lord Rayleigh, Koppe u. a. gezeigt haben, völlig verfehlt. Deshalb erörtert der Verf. die verschiedenen Umstände, welche die Schwingungen des Hammers unterhalten, so die Contactverzögerung, die Selbstinduction, den Einfluss des Eisens, also namentlich die Abhängigkeit zwischen Stromstärke und Magnetisirung, den Einfluss der Dimension des Eisenkerns, endlich die magnetische Hysteresis, also diejenigen Factoren, die in einer vollständigen Theorie

des Hammers zu berücksichtigen sind. Die Versuche wurden mit einem Elsas'schen Unterbrecher gemacht, der auf Torsionsschwingungen eines elastischen Drahtes beruht. Die Berechnung der Energie ergab, dass nur 1 Proc. der Energie des unterbrochenen Stromes notwendig ist, um den Hammer in Schwingung zu erhalten. Ist J die Stärke des constanten Stromes, während der Hammer ruht, J' die mittlere Stärke des unterbrochenen Stromes, und nimmt man an, dass sich der Schliessungsextrastrom während einer halben Schwingungsdauer $\left(\frac{T}{2}\right)$ des Hammers fast ganz entwickelt, so müsste man jedesmal von der Elektricitätsmenge des Hauptstromes $\left(\frac{JT}{2}\right)$ diejenige des Extrastromes $(J\tau)$ abziehen, wo $\tau = \frac{L}{R}$ die Zeitconstante, L den Selbstinductionscoefficienten, R den Widerstand vorstellt. Es wäre dann $J' = \frac{J}{T}\left(\frac{T}{2} - \tau\right)$. Gerade die Zeitconstante ist bei den verschiedenen Zwecken, denen der Hammer zu dienen hat, gebührend zu berücksichtigen. Hae.

R. Colley. Zur Theorie des Ruhmkorff'schen Apparates.
Wiedemann Ann. XLIV. 109-132.

Es sollen die elektrischen Vorgänge in dem Inductionsapparat nach der Unterbrechung des Hauptstroms auf theoretischem Wege ermittelt, und das Resultat durch den Versuch geprüft werden. Dazu war es nötig, gewisse Nebenumstände, wie sie in der Wirklichkeit vorkommen und das Problem compliciren, ausser Acht zu lassen. Deshalb wurde der Einfluss mehrerer Factoren an dem Apparat absichtlich vergrössert, damit die Nebenwirkungen im Vergleich zu jenen verschwinden, und damit die theoretischen Vorstellungen sich nach Möglichkeit mit der Wirklichkeit decken. Für den primären Stromkreis gelten dann die folgenden Gleichungen:

$$i = -c\frac{dv}{dt}; \quad ri = v - l\frac{di}{dt}$$

mit den Integralen:

$$v = i_0 \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{c} e^{-\alpha t} \sin \beta t, \qquad i = i_0 e^{-\alpha t}\left(\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t\right).$$

Hierbei ist i die Stromstärke, r der Widerstand, v das Potential auf dem freien (nicht mit der Erde verbundenen) Ende des Stromkreises, l der Selbstinductionscoefficient, c die Capacität des Condensators; dieselben grossen Buchstaben sind die entsprechenden Grössen für den secundären Stromkreis; M ist der Coefficient der gegenseitigen Induction beider Stromleiter, ferner:

$$\alpha = \frac{r}{2l}, \quad \beta = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{r^2}{4l^2} - \frac{1}{lc}},$$

τ die Periode einer vollen Schwingung.

Für den secundären Stromkreis, wofern derselbe geschlossen ist, wird die Bewegung der Elektricität durch die Gleichung

$$L \frac{dJ}{dt} + RJ = -M \frac{di}{dt}$$

dargestellt mit dem Integral

$$J = \frac{Mi_0}{L}(-e^{-2\gamma t} + e^{-\alpha t} \cos \beta t),$$

$$\gamma = \frac{R}{2L}.$$

In dem complicirteren Falle eines offenen secundären Stromkreises gelten die Gleichungen:

$$J = -C \frac{dV}{dt}, \quad RJ = V - L \frac{dJ}{dt} - M \frac{di}{dt}.$$

Durch Elimination von J folgt V als Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V = \frac{M}{LC} \frac{di}{dt},$$

das drei verschiedene Formen annehmen kann, je nachdem $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$, in welchem Falle das Integral aperiodisch, oder $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, in welchem Falle es periodisch, oder endlich $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ ist. Dem entsprechend hat auch J drei verschiedene

Werte. Der nun folgende experimentelle Teil der Abhandlung prüft die erhaltenen Ergebnisse, vornehmlich unter Beobachtung der von einer Geissler'schen Röhre erhaltenen Funkenstrecke mit Hülfe eines rotirenden Spiegels. Hae.

W. E. AYRTON and W. E. SUMPNER. The measurement of the power given by any electric current to any current. Lond. R. S. Proc. XLIX. 424-439. Cly.

W. E. AYRTON and W. E. SUMPNER. Alternate current and potential difference analogies in the methods of measuring power. Phil. Mag. (5) XXXII. 204-215.

A. HEYDWEILLER. Ein absolutes Elektrodynamometer für stärkere Ströme. Wiedemann Ann. XLIV. 533-549.

Es wird von dem von Maxwell gegebenen Ausdruck für die Kraftwirkung zweier coaxialen, parallelen, vom Strom i durchflossenen Drahtkreise ausgegangen, und aus diesem Ausdruck diejenige zweiër Drahtrollen abgeleitet. Hierauf fusst der Verf. bei der nun folgenden Theorie der Lord Rayleigh'schen Stromwage. Er benutzt für sein neues Elektrodynamometer die von Lord Rayleigh angegebene Anordnung der Drahtrollen und beschreibt die Construction desselben. Die Theorie dieses neuen Apparates wird entwickelt, und der Wert für die Stromstärke in ihrer Abhängigkeit von den Hauptfactoren, einschliesslich der verschiedenen Correctionen, abgeleitet. Hae.

E. AYRTON and F. TAYLOR. Proof of the generality of certain formulae published for a special case by Mr. Blakesley. Phil. Mag. (5) XXXI. 354-358. [Nature XLIII. 478.]

T. H. BLAKESLEY. Further contributions to dynamometry. Phil. Mag. (5) XXXI. 346-354. [Nature XLIII. 479.]

Berichte über zwei Vorträge in der Londoner Physikalischen Gesellschaft. Im Jahre 1888 hat Hr. Blakesley Formeln bezüglich der Messung der Stromstärke bei Wechselströmen mit Hülfe von Elektrodynamometern mit je zwei Drahtrollen veröffentlicht. Die bei der Ableitung derselben gemachten beschränkenden Annahmen kann man fallen lassen, ohne dass darum die Gültigkeit jener Formeln aufhört. Der Gegenstand der zweiten Mitteilung war, zu zeigen, was für physikalische Grössen mit Vorteil dadurch ausgewertet werden können, dass man Elektrodynamometer mit zwei Rollen niedrigen Widerstandes in elektrischen Stromkreisen benutzt. Lp.

J. Perry. On Blakesley's method of measuring power in transformers. Nature XLIV. 142, Phil. Mag. (5) XXXII. 185-192.

Auszug aus einem Vortrage vor der Londoner Physikalischen Gesellschaft. Hr. Perry verlässt die auf Hopkinson zurückgehende Beweismethode und benutzt die ursprünglichen Maxwell'schen Gleichungen zur Herleitung, wodurch die Blakesley'sche Formel als allgemein richtig erwiesen wird. In der sich anschliessenden Discussion sprechen aber verschiedene Redner sich für das Hopkinson'sche Verfahren aus, das allerdings nur mit einer neuen Hypothese zur Blakesley'schen Formel führe.

Lp.

M. Hutin et M. Leblanc. Sur un moteur à courants alternatifs. C. R. CXII. 933-936.

Die Verfasser haben eine Wechselstrom-Maschine construirt, die nicht mit einem Commutator versehen ist. Die Theorie dieser Maschine wird kurz gegeben; sie lieferte bei einem Strom, der 75 Perioden in der Secunde hatte, 11 Pferdekräfte bei einem Nutzeffect von 78 Proc. Hae.

E. Karll. Ueber die Theorie der gleichzeitigen Schwingungen zweier gedämpften Magnete. Pr. (Nr. 458) Progymn. Trarbach. 18 S. 4°.

In Gauss' Werken, Bd. V, finden sich verschiedene Beobachtungen über die gleichzeitigen Schwingungen zweier gedämpften Magnete aufgezeichnet. Der Verf. versucht von diesen Erscheinungen eine Theorie zu geben. Es seien zwei kreisförmige Galvanometer vorhanden, deren Magnete um eine verticale Axe drehbar sind. Die Drahtwindungen seien so gewickelt, dass ein Strom, der in der Leitung fliesst, beide Magnete in demselben Sinne in Bezug auf ihre Ruhelage zu drehen strebt. Ausserdem sei an dem einen Galvanometer eine Vorrichtung angebracht, die es gestattet, in dasselbe einen von den Multiplicatorwindungen isolirten Kupferring einzusetzen. Verbindet man alsdann die Multiplicatoren der beiden Galvanometer leitend mit einander, so muss jeder Strom, welcher die Leitung durchfliesst, gleichzeitig auf die Bewegung der Magnete beider Apparate wirken. Umgekehrt wird jede Bewegung des einen Magneten, da durch dieselbe in den Multiplicatorwindungen ein Strom inducirt wird, auch den Bewegungszustand des andern Magneten beeinflussen.

Es seien $\varkappa$ bez. $\varkappa_1$ die Trägheitsmomente der Magnete,
m „ m_1 die magnetischen Momente derselben,
φ „ φ_1 die Ablenkungen derselben aus der Ruhelage,
τ „ τ_1 die Schwingungsdauer bei geöffneter Leitung und entferntem Kupferring,
T „ T_1 die Schwingungsdauer bei geschlossenen Multiplicatoren und unterbrochener Verbindung zwischen denselben,
r „ r_1 die mittleren Radien der Drahtwindungen,
f „ f_1 die Anzahl der Windungen,
w der Widerstand des gesamten Stromkreises.

Die Bewegung eines um eine verticale Axe drehbaren Körpers wird bestimmt durch die Differentialgleichung:

$$(1) \qquad \varkappa \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Sigma D,$$

wenn ΣD die Summe der Drehungsmomente darstellt, welche den Körper aus der Ruhelage zu entfernen streben; diese letzteren müssen nun zuerst bestimmt werden.

Der erste Magnet inducirt während des Zeitelements dt in der Lage φ die Strommenge $idt = -\frac{2f\pi m}{wr}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}dt$, und ganz analog der zweite Magnet, wenn überall der Index 1 angehängt wird. Der Strom i übt nun auf den ersten Magneten das Drehungsmoment

$$(\alpha) \qquad -\frac{1}{w}\left(\frac{2f\pi m}{r}\right)^2\cos^2\varphi\frac{d\varphi}{dt} = -2\varepsilon\varkappa\cos^2\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

aus, und auf den Magneten im andern Galvanometer das Drehungsmoment:

$$(\alpha_1) \qquad -\left(\frac{2f_1\pi m_1}{r_1}\right)\left(\frac{2f\pi m}{rw}\right)\cos\varphi\cos\varphi_1\frac{d\varphi}{dt} = -2c_1\varkappa_1\cos\varphi\cos\varphi_1\frac{d\varphi}{dt}.$$

Für die Drehungsmomente des Stromes i_1 lauten die entsprechenden Werte:

$$(\beta) \qquad -\frac{1}{w}\left(\frac{2f_1\pi m_1}{r_1}\right)^2\cos^2\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt} = (-2\varepsilon_1\varkappa_1 + q^2)\cos^2\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt}$$

und

$$(\beta_1) \qquad -\left(\frac{2f\pi m}{r}\right)\left(\frac{2f_1\pi m_1}{r_1 w}\right)\cos\varphi\cos\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt} = -2c\varkappa\cos\varphi\cos\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt}.$$

In beiden Gruppen stellt der erstere Ausdruck das Drehungsmoment der sogenannten Dämpfung dar. Bevor der Verf. diese Werte (α) und (β) in die Gleichung (I) einsetzt, beschliesst er, da diese Dämpfung bei kleinen Schwingungen gewöhnlich der Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ bez. $\frac{d\varphi_1}{dt}$ proportional gesetzt wird, die Factoren $\cos^2\varphi$ bez. $\cos^2\varphi_1$ in (α) und (β) der Einheit gleich zu setzen. Damit ist doch offenbar über die Grössenordnung von φ und φ_1 eine Annahme gemacht, die folgerichtig auch für die Drehungsmomente (α_1) und (β_1) gelten muss. Der Verf. ist anderer Meinung; er erhält, indem noch die Drehungsmomente

$$-\varkappa\frac{\pi^2}{\tau^2}\varphi = -\varkappa a^2\varphi \quad \text{und} \quad -\varkappa_1\frac{\pi^2}{\tau_1^2}\varphi_1 = -\varkappa_1 a_1^2\varphi_1$$

des Erdmagnetismus und $-q^2 \frac{d\varphi_1}{dt}$ als Drehungsmoment, welches die Dämpfung des Kupferringes auf die Bewegung des zweiten Magneten ausübt, in Rechnung gezogen werden, die simultanen Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + a^2\varphi + 2c\cos\varphi\cos\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \\ \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + 2\varepsilon_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + a_1^2\varphi_1 + 2c_1\cos\varphi\cos\varphi_1 \frac{d\varphi}{dt} = 0; \end{cases}$$

diese gehen für kleine Schwingungen in die anderen über:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + a^2\varphi + 2c \frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \\ \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + 2\varepsilon_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + a_1^2\varphi_1 + 2c_1 \frac{d\varphi}{dt} = 0. \end{cases}$$

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wird nun dazu übergegangen, das System (1) dahin zu modificiren, dass es sich den Untersuchungen von Gauss anpasst. Gauss benutzte einen kräftigen 25-pfündigen Magneten, auf der Sternwarte, und einen 4-pfündigen, im magnetischen Observatorium zu Göttingen befindlich. Mit Rücksicht auf die verschiedene Stärke dieser beiden kann man die inducirende Wirkung des schwächeren im Vergleich zu der des stärkeren vernachlässigen. Dadurch fällt der vierte Summand in der ersten Gleichung von (1) fort; ausserdem wird $\cos\varphi_1 = 1$ im vierten Summanden der zweiten Gleichung von (1) gesetzt. Es lautet demnach (1):

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + a^2\varphi = 0, \\ \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + 2\varepsilon_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + a_1^2\varphi_1 + 2c_1\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} = 0. \end{cases}$$

Für $n = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2}$ ergiebt sich:

$$(4) \quad \varphi = Ae^{-\varepsilon t}\left(\cos(nt) + \frac{\varepsilon}{n}\sin(nt)\right).$$

Nehmen die Schwingungen nur langsam ab, so ist ε eine kleine Grösse, und man kann $\varphi = Ae^{-\varepsilon t}\cos(nt)$ setzen. Wird dieser Wert nun in die zweite Gleichung von (3) eingeführt, so geht

dieselbe in die andere über:

$$(5)\qquad \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}+2\varepsilon\frac{d\varphi_1}{dt}+a_1^2\varphi_1 = \frac{2c_1a^2}{n}\cos(Ae^{-\varepsilon t}\cos(nt))Ae^{-\varepsilon t}\sin(nt).$$

In bekannter Weise wird die rechte Seite zuerst gleich Null gesetzt und daraus $\varphi_1 = B_1e^{-\varepsilon_1 t}\cos(n_1t)+B_2e^{-\varepsilon_1 t}\sin(n_1t)$ für $n_1 = \sqrt{a_1^2-\varepsilon_1^2}$ abgeleitet, alsdann dieser Wert in (5) eingeführt, um B_1 und B_2 zu ermitteln. Ein recht complicirter Ausdruck ist das Resultat, aus dem sich aber Werte ergeben, die mit den Beobachtungen von Gauss (Werke V, 535-536) in Uebereinstimmung sind.

Es wird dann der Fall untersucht, wie der zweite Magnet sich unter Einwirkung des vom ersten Magneten inducirten Stromes bewegt, wenn er ohne Einwirkung desselben in Folge einer sehr starken Dämpfung in aperiodische Bewegung gerät.

Der Schluss gehört der Untersuchung des Falles von sehr kleinen Schwingungen, wo also das System von Differentialgleichungen (2) gilt. Sowohl φ als φ_1 sind dann Integrale der folgenden Differentialgleichung vierter Ordnung mit constanten Coefficienten:

$$\frac{d^4\varphi}{dt^4}+4p\frac{d^3\varphi}{dt^3}+6q\frac{d^2\varphi}{dt^2}+4r\frac{d\varphi}{dt}+s\varphi = 0$$

für:

$$\varepsilon+\varepsilon_1 = 2p,\quad a^2+a_1^2+4\varepsilon\varepsilon_1-4cc_1 = 6q,$$
$$\varepsilon_1a^2+\varepsilon a_1^2 = 2r,\quad a^2a_1^2 = s.$$

Die Integrale lauten:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=4}A_ie^{\lambda_i t}\quad\text{und}\quad \varphi_1 = \sum_{i=1}^{i=4}B_ie^{\lambda_i t},$$

wo die λ_i die Wurzeln der Gleichung:

$$\lambda^4+4p\lambda^3+6q\lambda^2+4r\lambda+s = 0$$

sind. Die Bestimmung der Integrationsconstanten mit Rücksicht auf die Magnete wird zuletzt noch geleistet. Hae.

E. Beltrami. Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo. Bologna Mem. (5) I. 409-453; Cimento (3) XXX. 222-230. (Forts. folgt 1892.)

Die umfangreiche Abhandlung erscheint im wesentlichen

als eine Ueberarbeitung bereits früher veröffentlichter, wobei aber vor allem zu bemerken ist, dass die Grundanschauung von der magnetischen Polarisation an die Stelle der Coulomb-Poisson'schen vom magnetischen Molecül getreten ist. Dadurch ergeben sich natürlich in der Darstellung mannigfache Veränderungen, doch ist der Hauptinhalt dargelegt durch die Referate in den F. d. M. XVI. 1884. 996-1000 und 1000-1005; XV. 1883. 862; XVII. 1885. 1022-1026. Hae.

P. JANET. Sur l'aimantation transversale des conducteurs magnétiques. (Suite.) Almeida J. (2) X. 20-33.

Hauptsächlich Beschreibung der Versuche zur Bestätigung der im ersten Teile entwickelten Formeln (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 1092). Lp.

P. BACHMETJEW. Einige Erscheinungen des remanenten Magnetismus. Exner Rep. XXVII. 147-175.

Wir erwähnen von den Resultaten der Arbeit nur den aus Versuchsergebnissen gefundenen und durch theoretische Ueberlegungen erläuterten Satz: „Der normale Magnetismus jener Elektromagnete, deren Axen keine geschlossenen Curven bilden, findet seinen Ausdruck in dem arithmetischen Mittel zweier Inductionsströme, welche beim einfachen Schliessen des Hauptstroms und bei dessen Schliessen in entgegengesetzter Richtung als vorher erhalten werden". Lp.

G. ADLER. Ueber den magnetischen Arbeitswert von Substanzen veränderlicher Magnetisirungszahl, insbesondere von Eisen. Wien. Ber. C. 469-492.

Bezeichnen E, F, G die nach den rechtwinkligen Coordinatenaxen genommenen Componenten der im Felde herrschenden Magnetkraft H; J die Intensität des magnetischen Moments, das unter Wirksamkeit dieser Kräfte in der Volumeneinheit erzielt wird; A, B, C die Componenten desselben; (J, H) den Winkel

zwischen den Richtungen beider; endlich $k_1 = \frac{J_1}{H_1}$ den dem schliesslich erreichten magnetischen Momente entsprechenden Wert der (mit J veränderlichen) Magnetisirungszahl k, und θ einen mit J veränderlichen echten Bruch, so wird zuerst, indem der Verf. einem von W. Thomson angegebenen Gedankengange folgt, für den Arbeitswert der vollzogenen Polarisirung der magnetischen Substanz der Ausdruck abgeleitet:

$$(1) \qquad W = -\int\left[\tfrac{1}{2}(AE+BF+CG)+J^2\left(\frac{1}{2k_1}-\int_0^1\frac{\theta d\theta}{k}\right)\right]d\tau.$$

Ein zweiter Weg ergiebt W in der Form:

$$(2) \qquad W = -\int JH\cos(J,H)dv + \iint_0^{J_1} H\cos(H,J)dJ\,dv,$$

$$(2^a) \qquad = -\tfrac{1}{2}\int JH\cos(J,H)dv + \int J_1^2\left[\int_0^1\frac{\theta d\theta}{k}-\frac{1}{2k_1}\right]d\tau,$$

und zwar stellt $J_1^2\left[\int_0^1\frac{\theta d\theta}{k}-\frac{1}{2k_1}\right]$ den Einfluss der Veränderlichkeit der Magnetisirungszahl auf den Arbeitswert dar. Die Discussion des letzteren wird an der Hand des Werteverlaufs der Magnetisirungszahl k, als Function des magnetischen Moments aufgefasst, geführt. Es zeigt sich weiter, dass, wenn man bei der Magnetisirung einen vollständigen Kreisprocess ausführt, der Betrag dissipirter Energie für je 1 cm^3 polarisirter Substanz gegeben ist durch:

$$D = 2J_1^2\int_0^1\theta\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k'}\right)d\theta,$$

wo k den Wert von $\frac{J}{H}$ beim Aufsteigen, k' den beim Absteigen der magnetisirenden Kraft H bezeichnet, beide Male in jenem Augenblicke, wo das magnetische Moment J denselben Bruchteil θJ_1 des grössten bei Ausführung des Processes erreichten Wertes J_1 besitzt. Die angestellten Betrachtungen haben zur wesentlichen Voraussetzung, dass die Temperatur des Systems sich nicht ändert. Es ist also W das, was v. Helmholtz als die

freie Energie des Systems bezeichnet. Die Totalenergie ist gegeben durch

$$U = W + TS,$$

wo T die absolute Temperatur, S den zugehörigen Wert der Entropie bedeuten. Unter Benutzung v. Helmholtz'scher Grundgleichungen aus der Thermodynamik ergiebt sich:

$$U = -\int^{H_1} J\cos(J, H)dH + \int_0^{H_1} T.\frac{\partial[J_1\cos(J, H)]dH}{\partial T},$$

und dies wird auf die Theorie des thermomagnetischen Motors angewandt. Hae.

G. Adler. Ueber eine Bestimmungsmethode der Magnetisirungszahl fester Körper mittels der Wage. Wien. Ber. C. 897-913.

Durch Rechnung lässt sich zeigen, indem der Verf. die Resultate seiner vorhergehenden Abhandlung benutzt, dass man am einfachsten die Magnetisirungszahl aus der mechanischen Anziehung einer Substanz im Magnetfelde bestimmen kann, wenn man der Substanz die Gestalt eines sehr langen und sehr dünnen Drahtes giebt, von welchem ein im Verhältnisse zu seiner Dicke sehr langes Stück in ein homogenes Magnetfeld der Art ragt, dass die Kraftlinien desselben parallel der Längsaxe des Stabes verlaufen, während der andere Endquerschnitt desselben sich an Orten befindet, wo die Magnetkraft bereits verschwindend kleine Werte hat. Der Betrag der in dieser Anordnung den vorderen Endquerschnitt für die Flächeneinheit angreifenden Zugkraft ergiebt sich unter Annahme einer veränderlichen Magnetisirungszahl:

$$p_1 = J_1 H_1 - \int_0^{J_1} \frac{JdJ}{k},$$

oder

$$p_1 = \frac{k_1}{2} H^2 + \left(\frac{J_1^2}{2k_1} - \int_0^{J_1} \frac{JdJ}{k}\right),$$

wo die Klammer bei Substanzen von unveränderlicher Magnetisirungszahl fortfällt, da alsdann $k = k_1$ = constant ist.

Quincke hat eine andere Versuchsanordnung messend verfolgt, in der die Längsaxe des Stabes die Kraftlinien des homogenen Magnetfeldes senkrecht durchsetzt. Ist für diese die magnetische Zugkraft p_2, so ist $\frac{p_1}{p_2} = 1+2\pi k_1$ für Körper von constanter Magnetisirungszahl, indem für solche $p_2 = \frac{k_1}{2} \frac{H^2}{(1+2\pi k_1)}$ ist.

Hae.

I. Fröhlich. Wechselseitige Anziehungen und Abstossungen gleichzeitig schwingender Elementarmagnete. Ungar. Ber. IX. 90-137.

Sind die Dimensionen von n Magneten klein im Verhältnis zu ihren gegenseitigen Entfernungen, kann man dieselben also als Elementarmagnete betrachten, und sind dieselben so aufgehängt, dass sie in der stabilen Gleichgewichtslage zu einander parallel liegen und daher mit der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte einen und denselben Winkel bilden, so üben die Magnete auf einander, also auch längs der Geraden, auf welcher ihre Mittelpunkte liegen, translatorische Kräfte aus, welche abstossende Kräfte sind, d. h. welche die Mittelpunkte der Elemente von einander zu entfernen streben. Wenn nun die Elemente des Systems Schwingungen vollziehen, so werden die eben genannten Kräfte sich ändern. Es fragt sich, ob bei dieser Aenderung auch eine anziehende Kraft auftreten kann. Wird vorausgesetzt, dass die Schwingungsamplituden der Elementarmagnete sehr klein sind, und dass die Perioden der Schwingungen der einzelnen Elemente im Verhältnis zu den gewöhnlichen Zeiteinheiten sehr klein sind, dass somit eine grosse Anzahl von Perioden einzelner Schwingungen vergehen muss, bis die gegenseitige Entfernung der Mittelpunkte in Folge der Aenderung der translatorischen Kräfte sich merklich ändert, so kommt der Verfasser unter anderen zu folgenden Resultaten:

Bei einem aus einer beliebigen Anzahl von $n(=2k$ bez. $2k+1)$ Elementen bestehenden System sind die Schwingungen der einzelnen Elemente aus der Summe von n einzelnen harmonischen

Schwingungen zusammengesetzt. Von den n^2 Schwingungsamplituden sind nur n von einander unabhängig. Diese n unabhängigen Amplituden kann man so wählen, dass sie k Bedingungen erfüllen, die gelten müssen, wenn die von den Schwingungen abhängigen Teile der translatorischen Kräfte Anziehungskräfte sind. Aber man kann auch über diese n Amplituden in anderer Weise verfügen, so dass sie ebenfalls k Bedingungen erfüllen, die bestehen müssen, wenn die von den Schwingungen abhängigen Teile der translatorischen Kräfte abstossende Kräfte sind.

Hae.

J. A. Ewing. Magnetic induction in iron and other metals. London. Electrician office. XVIII + 351 S.

Das Buch enthält eine vollständige Uebersicht über die neueren Untersuchungen im Gebiete der elektrischen Induction und stellt sie in einer durchaus klaren und lesbaren Form dar. Vergl. Nature XLVII. 460-461. Gbs. (Lp.)

J. A. Ewing. The molecular process in magnetic induction. Nature XLIV. 566-572.

Ein Freitagabend-Vortrag in der Royal Institution, in welchem ein reicher Gebrauch von den graphischen Methoden gemacht ist.

Lp.

Th. H. Blakesley. The solution of a geometrical problem in magnetism. Nature XLIII. 191 und Phil. Mag. (5) XXXI. 281-284.

„Gegeben sind die beiden Pole eines Magneten und eine seine verlängerte Axe unter rechtem Winkel schneidende Gerade; den Punkt zu bestimmen, wo die Gerade zu dem Felde parallel ist.“ Ist O der Schnittpunkt der Geraden mit der Verbindungslinie MN der beiden Pole M und N, P der gesuchte Punkt der Geraden, ferner $PO = d$, $OM = m$, $ON = n$, so findet der Verf. d aus der Gleichung:

$$\left(\frac{d^2}{2mn}\right)^3 - \frac{3}{4}\frac{d^2}{2mn} - \frac{1}{4}\frac{m^2+n^2}{2mn} = 0$$

oder aus:

$$\cosh 3\theta = \frac{m^2+n^2}{2mn}, \quad \frac{d^2}{2mn} = \cosh\theta.$$

Setzt man $OC = \frac{1}{2}(OM+ON) = l$, so ist für $\cosh\theta = \frac{1}{2}\sqrt{5}$:

$$\angle OCP = 40^0 23' 10''.$$

Lp.

Sir W. Thomson. On electrostatic screening by gratings, nets, or perforated sheets of conducting material. Lond. R. S. Proc. XLIX. 405-418.

Sir W. Thomson. On variational electric and magnetic screening. Lond. R. S. Proc. XLIX. 418-424. Cly.

W. G. Adams. Comparison of simultaneous magnetic disturbances at several observatories and determination of the value of the Gaussian functions for those observatories (Abstract). Lond. R. S. Proc. L. 129-130.

Die vollständige Abhandlung ist veröffentlicht in Phil. Trans. CLXXXIII. (A) (1892). 131-139 und betrifft hauptsächlich einen grossen magnetischen Sturm, der am 24. und 25. Juni 1885 eintrat; für ihn wurden aus 17 Sternwarten photographische Diagramme erhalten. Cly. (Lp.)

Weitere Litteratur.

Th. Schwartze. Elektricität und Magnetismus als Bewegungsformen, erklärt nach der gyroskopischen Theorie. Berlin. Dierig und Siemens. 47 S. 8°.

W. Crookes. Electricity in relation to science. Nature XLV. 63-64.

S. P. Thompson. The electro-magnet and electro-magnetic mechanism. London. E. and F. N. Spon. [Nature XLV. 73-75.]

W. E. Ayrton. Note on rotatory currents. Nature XLV. 191-192.

W. Voigt. Modelle zur Theorie der Piëzo- und Pyroelektricität. Naturf. Ges. Halle LXIV. 35-39.

W. Stscheglajew. Vielfache Resonanz elektrischer Wellen. Arb. d. phys. Section d. kais. Ges. der Freunde der Naturkunde. Moskau. Bd. IV. Hft. 2. 3-5.

R. Colley. Zur Theorie der Ruhmkorff'schen Inductionsrolle. Phys. Ges. St. Petersb. XXIII. 1891. 7-29.

W. Tübine. Ueber den Einfluss magnetischer und elektrischer Kräfte auf die Concentration von Lösungen. Phys. Ges. St. Petersb. XXIII. 1891. 101-122.

W. Michelson. Ueber die Vielfältigkeit der mechanischen Theorien physikalischer Erscheinungen. Phys. Ges. St. Petersb. XXIII. 1891. 415-427.

J. Borgmann. Einige Versuche mit elektrischen Schwingungen. Phys. Ges. St. Petersb. XXIII. 1891. 458-468.

D. Goldhammer. Die elektromagnetische Theorie des Lichtes. Kasan Ber. (2) I. 81-165, 193-233, 261-302.

N. Sluginow. Bemerkung über die Zahl der Combinationen galvanischer Elemente. Kasan Ber. (2) I. 257-258.

A. Mokritzky. Der Mechanismus der Naturerscheinungen. Kurze Darstellung der Theorie der physikalischen Erscheinungen. Kiew. 1891. 1-26.

Capitel 4.

Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

R. Clausius. Die mechanische Wärmetheorie. 2. Aufl. III. Bd., herausgeg. von M. Planck und C. Pulfrich. 2. Lieferung. Braunschweig. F. Vieweg u. Sohn. S. 49-264. 8°.

Die vorliegende Lieferung bringt das dreibändige Werk zum Abschluss. Der Inhalt des dritten Bandes, die kinetische Theorie der Gase, ist nach einem vom Verf. hinterlassenen Entwurf von den Herausgebern mit grosser Pietät bearbeitet worden. Die zweite Lieferung enthält Abschnitt II: „Ueber die mittlere Weglänge der Gasmolecüle", Abschnitt III: „Ueber die innere Reibung der Gase", Abschnitt IV: „Ueber die Wärmeleitung gasförmiger Körper". Der dritte Abschnitt ist neu, die beiden anderen sind Neubearbeitungen der in Pogg. Ann. CV und CXV erschienenen Abhandlungen.

In einem Anhange werden noch acht andere Abhandlungen des Verfassers beigefügt, die inhaltlich mit der kinetischen Gastheorie verwandt sind, und von denen die sechs ersten ursprünglich in Pogg. und Wiedem. Ann. erschienen waren, die beiden letzten aber bisher nur in französischer Sprache existirten.

Sbt.

J. Parker. Elementary Thermodynamics. Cambridge. University Press. VIII + 408 S. 8°.

Der Verf. hat seinem Buche den Titel „elementare" Thermodynamik nicht etwa deswegen gegeben, weil auf die Hülfsmittel der höheren Mathematik verzichtet, sondern weil die Untersuchung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen ausgeschlossen wird. Er behandelt in sechs Capiteln: I. die Erhaltung der Energie, II. die vollkommenen Gase, III. Carnot's Princip, IV. die Anwendungen von Carnot's Princip, V. das

thermodynamische Potential, VI. die Anwendungen desselben. Sehr eingehend wird das Carnot'sche Princip erörtert, und von besonderem Interesse ist dabei die Untersuchung der thermodynamischen Fragen, die die Bewegung unseres Sonnensystems betreffen. [In Nature XLV. 314-315 erfahren die ersten Abschnitte dieses Buches eine etwas strenge Beurteilung; das Werk enthält jedoch zweifelsohne manches wertvolle Material, obschon die in jener Anzeige hervorgehobenen Mängel nicht abzuleugnen sind. Gbs. (Lp.)] Sbt.

Report of a Committee ... on the present state of our knowledge of thermodynamics, especially with regard to the second law. Part I. Researches relating to the connection of the second law with dynamical principles. Drawn up by G. H. Bryan. Brit. Ass. Rep. (1891). 85-122.

Der gegenwärtige Bericht handelt ausschliesslich von den Versuchen, die man gemacht hat, um den zweiten Hauptsatz aus rein mechanischen Principien herzuleiten. Die Methoden, mittels deren man das Problem in Angriff genommen hat, werden nach der folgenden Ordnung eingeteilt und besprochen: I. Die Hypothese der „stationären“ oder „quasiperiodischen“ Bewegungen, die von Clausius und Szily angenommen wurde. II. Die Hypothese der „monocyklischen Systeme“ von Herrn von Helmholtz und ähnliche Annahmen. III. Die statistische Hypothese der Herren Boltzmann, Clerk Maxwell und anderer Schriftsteller über die kinetische Gastheorie. Gbs. (Lp.)

C. Neumann. Bemerkungen zur mechanischen Theorie der Wärme. Leipz. Ber. XLIII. 75-156.

Eine beliebig gegebene, homogene oder heterogene, Substanz M (die z. B. auch aus mehreren räumlich getrennten Teilen bestehen kann) mag unter dem Einfluss irgend welcher äusserer mechanischer und calorischer Einwirkungen irgend welchen lang-

samen oder schnellen oder auch tumultuarischen Kreisprocess Ω durchlaufen. Ueberhaupt soll dieser Process Ω völlig unbekannt sein, bis auf den einen Umstand, dass er ein Kreis-Process ist, dass also die Substanz M zu Ende desselben sich wieder in genau demselben Zustande befindet, wie zu Anfang des Processes. Ob dieser zu Anfang und zu Ende vorhandene Zustand ein Ruhe- oder Bewegungszustand ist, bleibt dahingestellt.

Jene äusseren calorischen Einwirkungen mögen darin bestehen, dass der Substanz M während des Processes Ω durch successive Berührung mit irgend welchen constanten Wärmequellen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ die Wärmequantitäten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ zugeführt werden. Alsdann findet stets die Formel statt:

$$\frac{q_1}{\vartheta_1} + \frac{q_2}{\vartheta_2} + \cdots + \frac{q_n}{\vartheta_n} \leqq 0,$$

vorausgesetzt, dass man unter $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ die constanten absoluten Temperaturen jener Wärmequellen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ versteht.

Völlig falsch wird es sein, unter $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ die Temperaturen der Substanz M selber zu verstehen. Wollte man z. B. unter ϑ_1 die Temperatur der Substanz M zu der Zeit verstehen, während welcher sie mit Θ_1 in Contact ist, so würde dies zwei Fehler involviren.

Erstens nämlich hat die Temperatur von M überhaupt in keinem Augenblick einen einheitlichen Wert. Denn sie wird im allgemeinen ungleichförmig sein, d. h. in einem gegebenen Augenblicke in verschiedenen Punkten der Substanz sehr verschiedene Werte haben können.

Wollte man nun aber (um diesen Fehler zu corrigiren) unter ϑ_1 die Temperatur verstehen, welche die Substanz M während ihrer Berührung mit Θ_1 speciell an derjenigen Stelle besitzt, an welcher die Berührung stattfindet, so würde dies immer noch fehlerhaft sein. Denn der Process Ω ist möglicherweise ein schnell ablaufender, tumultuarischer Process. Und dann wird die Temperatur der Substanz M an jener Berührungsstelle beträchtlich höher oder beträchtlich tiefer sein können als die von Θ_1.

Anders gestalten sich die Dinge, wenn man voraussetzt, der Process Ω verlaufe unendlich langsam, und ferner voraussetzt, die Temperatur der Substanz M bleibe während des Processes fortdauernd gleichförmig, sie sei also eine blosse Function der Zeit. Alsdann nämlich kann man in jener Formel unter $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ nach Belieben die Temperaturen der Quellen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ oder aber auch diejenigen Temperaturen verstehen, welche die Substanz M selber während ihrer Berührungen mit jenen Quellen successive besitzen wird. Denn die einen sind alsdann offenbar mit den andern identisch.

Auch wird in jener Formel, falls man an den so eben genannten beiden Voraussetzungen festhält, das Zeichen $\leqq$ durch $=$ zu ersetzen sein.

All' diese Sätze repräsentiren, zusammengenommen, dasjenige Theorem, welches nach Ansicht des Verfassers aus den Clausius'schen Untersuchungen, soweit dieselben den sogenannten zweiten Hauptsatz betreffen, in Wirklichkeit sich ergiebt. Der Verf. bemerkt dabei (gleich zu Anfang seines Aufsatzes), dieses Theorem sei bis jetzt niemals in deutlicher Weise ausgesprochen worden, weder von Clausius selber, noch von irgend einem andern Autor. Vielmehr sei dasselbe bis jetzt, seinem eigentlichen Inhalte nach, mehr oder weniger in Nebel gehüllt geblieben. Und aus diesem nebelhaften Zustande erkläre es sich, dass die von demselben gemachten Anwendungen zum Teil sehr bedenklicher Natur seien. Auch erkläre sich aus diesem Umstande die ungeheure Divergenz der Ansichten über den ganzen Gegenstand. Denn während einige Autoren, wie Gibbs, Duhem, Planck, den sogenannten zweiten Hauptsatz als ein sicheres und festes Fundament ansehen, haben andere, wie z. B. Bertrand, denselben für ein Wahngebilde erklärt.

Noch sei bemerkt, dass der Verf. im weiteren Verlauf seines Aufsatzes auf mancherlei schwache Punkte der mechanischen Wärmetheorie aufmerksam macht, namentlich auf die Additionssätze der Energie und Entropie, und dass er schliesslich näher eingeht auf die Theorie der Dissociation. N.

P. Duhem. Sur les équations générales de la Thermodynamique. Ann. de l'Éc. Norm. (3) VIII. 231-266.

In der Absicht, nach den klassischen Arbeiten von Clausius, Massieu, Gibbs, v. Helmholtz, v. Oettingen auch seinerseits eine systematische Darstellung der allgemeinen thermodynamischen Gleichungen zu geben, betrachtet der Verf. ein System, dessen Zustand durch eine Anzahl von beliebigen Parametern, nämlich die in allen Punkten gleiche Temperatur ϑ und n andere unabhängige Veränderliche $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, bestimmt ist. Bei einer unendlich kleinen Aenderung derselben leisten die Kräfte, die das System im Gleichgewicht halten, eine virtuelle Arbeit

$$A\delta\alpha + B\delta\beta + C\delta\gamma + \dots + L\delta\lambda + \Theta\delta\vartheta.$$

Sind $A, B, \dots, L, \Theta$ als Functionen von $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta$ bekannt, so kennt man die Gleichgewichtsbedingungen des Systems. Bei einer unendlich kleinen Aenderung der Parameter wird eine Wärmemenge entwickelt:

$$dQ = -(R_\alpha\delta\alpha + R_\beta\delta\beta + R_\gamma\delta\gamma + \dots + R_\lambda\delta\lambda + C\delta\vartheta),$$

wo $R_\alpha = \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{A}{E}$ u. s. w. (U die innere Energie, E das mechanische Wärmeäquivalent). Sind die „calorischen Coefficienten“ $R_\alpha, \dots, R_\lambda, C$ bekannt, so kennt man den thermischen Gleichgewichtszustand des Systems.

Wenn das System den beiden Hauptsätzen genügen soll, so müssen die beiden Grössen

$$\left(R_\alpha + \frac{A}{E}\right)d\alpha + \left(R_\beta + \frac{A}{E}\right)d\beta + \dots + \left(C + \frac{\Theta}{E}\right)d\vartheta$$

und

$$\frac{R_\alpha}{F(\vartheta)}d\alpha + \frac{R_\beta}{F(\vartheta)}d\beta + \dots + \frac{C}{F(\vartheta)}d\vartheta$$

vollständige Differentiale sein. Die Grössen A etc. müssen von der Form sein:

$$A = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha}, \quad B = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta}, \quad \dots, \quad \Theta = f_\vartheta(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta),$$

wo $\mathfrak{F}$ eine Function sämtlicher Parameter und f_ϑ von $\mathfrak{F}$ unabhängig ist. Es zeigt sich, dass, wenn $A, B, \dots, L, \Theta$ bekannt

sind, dann auch $R_\alpha, \ldots, R_\lambda$ zu berechnen sind, aber nicht die Wärmecapacität C; zur vollständigen Bestimmung des thermischen Zustandes ist notwendig und hinreichend, dass die Reihe von Werten bekannt ist, die C für ein besonderes System von $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ und für jeden Wert von ϑ annimmt.

Sind die thermischen Grössen gegeben, so lassen sich die mechanischen Grössen $A, B, \ldots, L, \Theta$ nicht eindeutig bestimmen.

Die bei einer beliebigen isothermischen Aenderung nicht compensirte Arbeit ist (dem Zeichen nach entgegengesetzt) gleich einer Function des Zustandes des Systems, die „thermodynamisches Potential" genannt wird. Das System ist dann im Gleichgewicht, wenn es sich in solchem Zustande befindet, dass das thermodynamische Potential ein Minimum ist.

Kennt man das innere thermodynamische Potential

$$\mathfrak{F} = E(U - F(\vartheta)S)$$

als Function von $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$ und ausserdem die Function $\Theta = f_\vartheta$, so lassen sich die mechanischen Grössen $A, \ldots, L$, ferner aber auch die Energie U, die Entropie S und die calorischen Coefficienten R durch die ersten und zweiten Derivirten von $\mathfrak{F}$ ausdrücken, so dass das System mechanisch wie thermisch vollkommen bestimmt ist.

Wählt man statt der Parameter $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$ die Kräfte $A, B, \ldots, L$ und die Temperatur ϑ als unabhängige Veränderliche, so giebt es wieder eine Function $G(A, B, \ldots, L, \vartheta)$, durch deren erste und zweite Derivirte sich die Parameter $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, aber auch die Energie, Entropie und alle calorischen Coefficienten ausdrücken lassen. Sbt.

G. Morera. Sulle equazioni fondamentali della termodinamica. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII_2. 54-58; Nuovo Cimento (3) XXX. 208-221.

G. Morera. Sulle capacità termiche dei vapori. Rom. Acc. L. Rend. (4) VII_2. 119-125.

Sind x und y zwei beliebige unabhängige Veränderliche, die den Zustand eines Körpers bestimmen, und sind der Druck p,

das Volumen v und die Temperatur t als Functionen von x und y bekannt, so lässt sich die charakteristische Function Massieu's H aus der partiellen Differentialgleichung

$$p = \frac{\partial(H, t)}{\partial(x, y)} : \frac{\partial(v, t)}{\partial(x, y)}$$

bis auf eine willkürliche Function der Temperatur berechnen. Ferner ergiebt sich dann die Entropie aus der Gleichung

$$u = \frac{\partial(v, H)}{\partial(x, y)} : \frac{\partial(v, t)}{\partial(x, y)}$$

und demnächst die Energie E mittels der Formel: $E = tu - H$. Für die specifischen Wärmen endlich gelten die Ausdrücke:

$$C_p = t \cdot \left\{ \frac{\partial(p, u)}{\partial(x, y)} : \frac{\partial(p, t)}{\partial(x, y)} \right\} \quad \text{und} \quad C_v = t \left\{ \frac{\partial(v, u)}{\partial(x, y)} : \frac{\partial(v, t)}{\partial(x, y)} \right\}.$$

Von diesen Formeln macht der Verf. in der zweiten Mitteilung Gebrauch zur Bestimmung der specifischen Wärme der Dämpfe. Die charakteristische Gleichung derselben wird in der von Clausius gegebenen Form $p = \frac{Rt}{v-\alpha} - \frac{\varphi(t)}{(v+\beta)^2}$ angenommen und bis zum Zustande der Sättigung als gültig vorausgesetzt; für $v = \infty$ soll der Dampf die Eigenschaften vollkommener Gase, also constante specifische Wärmen $\varkappa$ und γ haben. Der Verf. findet

$$C_v = \gamma + \frac{t\varphi''(t)}{J(v+\beta)},$$

wo J das mechanische Wärmeäquivalent; ferner:

$$C_p - C_v = \frac{R}{J} \cdot \frac{\left\{1 - \frac{\varphi'(t).(v-\alpha)}{R.(v+\beta)^2}\right\}^2}{1 - \frac{2\varphi(t)(v-\alpha)^2}{R.t.(v+\beta)^3}}.$$

Die Formeln werden auf den Aetherdampf angewandt, wobei sich schliesslich ergiebt, dass für dessen specifische Wärme bei constantem Druck der Wert 0,40 zu setzen ist, der mit dem von Wiedemann bestimmten Werte 0,398 gut übereinstimmt (aber nicht mit dem von Regnault). Sbt.

G. MOURET. Représentation géométrique des changements physiques et chimiques des corps. Almeida J. (2) X. 253-268.

Der Artikel enthält eine Erläuterung der Methode, deren sich Hr. W. Gibbs bedient, um die Aenderungen homogener oder aus homogenen Körpern gebildeter Systeme geometrisch zu veranschaulichen. Ist u die innere Energie, v das Volumen, s die Entropie, so wird der Inbegriff aller Zustände, deren das System fähig ist, durch eine Fläche repräsentirt in Bezug auf ein orthogonales Coordinatensystem, dessen drei Axen die u-Axe, die v-Axe und die s-Axe sind. Jede auf dieser „thermodynamischen Oberfläche“ des Hrn. Gibbs gezeichnete Curve stellt einen umkehrbaren Vorgang dar. Die Durchführung aller bezüglichen Betrachtungen muss in dem Aufsatze selbst nachgelesen werden. Lp.

PRÖLL. Mitteilungen über graphische Darstellung thermodynamischer Gleichungen. Civiling. XXXVII. 477-479.

Der Verfasser beschreibt zunächst die Brauer'sche Construction der sogenannten polytropischen Curve $pv^n = C$, wo v Abscisse, p Ordinate sein soll, und leitet hieraus eine Construction der Doerfel'schen Charakteristik ab. F. K.

W. OSTWALD. Studien zur Energetik. Leipz. Ber. XLIII. 271-288.

Die Einführung des absoluten Masssystems, dessen Grundeinheiten die der Länge, Zeit und Masse sind, hat nach dem Verf. nicht den gewünschten Erfolg in der Gesamtheit der physikalischen Wissenschaften gehabt; denn es ist nicht möglich, alle Grössen in denselben auszudrücken, beispielsweise nicht die Temperatur oder chemische Verwandtschaft oder elektrische Spannung. Der Fehler liegt darin, dass die Masse als Grundeinheit behandelt ist; ausser den beiden Anschauungsformen Raum und Zeit hat allein die Energie auf diese Stellung Anspruch, denn sie allein ist es, die ausser jenen beiden allen Ge-

bieten gemeinsam ist. Sie ist mehr als ein mathematischer Begriff, sie hat reale Existenz, und die Ausarbeitung einer Energetik, d. h. Lehre von der Energie, ist bei dem heutigen Stande der Wissenschaft eine unabweisliche Forderung. Die Masse ist weiter nichts als ein Factor, und zwar der „Capacitätsfactor“ (der zu dem „Intensitätsfactor“ der Energie hinzutritt) einer besonderen Form, nämlich der kinetischen oder Bewegungsenergie, also jedenfalls von untergeordneter Bedeutung. In der Mechanik hat sich der Energiebegriff schon eine herrschende Stellung errungen, wie die grossen Principien derselben darthun. Es ist nun die Aufgabe, allgemeingültige Sätze zu finden, die für das Gesamtgebiet der Physik und Chemie die Bedeutung haben wie jene Principien für die Mechanik. Einen solchen Satz kündigt der Verf. in folgender Form an: „Damit ein beliebige Energieformen enthaltendes Gebilde sich im Gleichgewicht befindet, ist notwendig und zureichend, dass bei jeder mit den Bedingungen des Gebildes verträglichen Verschiebung desselben die Summe der entstehenden und verschwindenden Energiemengen gleich Null ist“.

Führt man bei den mechanischen Begriffen statt der Masse die Energie (e) als Grundeinheit ein, so ergiebt sich zunächst, dass die Dimensionen sich übersichtlicher darstellen lassen als nach der alten Weise; man erhält z. B. für die Masse $el^{-2}t^2$, Bewegungsgrösse $el^{-1}t$, Kraft $e.l^{-1}$, Oberflächenspannung $e.l^{-2}$, Druck $e.l^{-3}$, Effect $e.t^{-1}$. Für die elektrischen Begriffe war die alte Bestimmung nicht nur unübersichtlich, sondern incorrect. Man hat hier, ebenso wie auf anderen Gebieten, noch eine vierte Grösse als Grundeinheit willkürlich zu bestimmen, z. B. einen der Factoren der Energie, etwa die elektromotorische Kraft, die Temperatur u. s. w. Sbt.

M. Planck. Ueber das Princip der Vermehrung der Entropie. Vierte Abhandlung. Wiedemann Ann. XLIV. 385-428.

Bei der allgemeinen Bedeutung, die dem Princip der Vermehrung der Entropie zuzuschreiben ist, müssen sich mit dessen

Hülfe für alle möglichen physikalischen und chemischen Vorgänge die Bedingungen des Gleichgewichts und der Richtung einer eintretenden Veränderung ermitteln lassen. Verf. hat früher (Wiedemann Ann. XXX-XXXII, s. F. d. M. XIX. 1887. 1166) die Anwendbarkeit des Princips auf thermische und chemische Processe untersucht; in der vorliegenden Abhandlung prüft er dieselbe für elektrochemische Vorgänge und findet sie in allen Punkten, wo die Erfahrung eine Entscheidung zulässt, bestätigt.

Es wird ein System von elektrischen Leitern betrachtet, die so verbunden sind, dass an keiner Stelle sich mehr als zwei Leiter gleichzeitig berühren; das System soll im mechanischen Gleichgewicht, von überall gleicher Temperatur und von einem Isolator von derselben Temperatur umgeben sein. (Der elektrische Einfluss des Isolators kommt nicht in Betracht, da die Beschaffenheit der an ihn grenzenden Leiterflächen stets ungeändert bleiben soll.) Eine hinreichende Bedingung des Gleichgewichts ist die, dass es keine Zustandsänderung des Systems giebt, bei der die Gesamtentropie vermehrt würde.

Werden nur solche Veränderungen berücksichtigt, die auch in entgegengesetzter Richtung erfolgen können, so nimmt die Gleichgewichtsbedingung die Form an:

$$\delta S - \frac{\delta U + A}{\vartheta} = 0,$$

wo S die Gesamtentropie des Leitersystems, U dessen Energie, A die gegen äussere Kräfte geleistete mechanische Arbeit und ϑ die Temperatur bedeutet. Für elektrische Zustandsänderungen kann man ϑ als constant annehmen und erhält dann:

$$\delta(U - \vartheta S) + A = 0.$$

Für die Bewegung der Elektricität in einem einzigen homogenen Leiter folgt daraus, dass die Potentialfunction im ganzen Leiter constant ist. Für den Uebergang einer Elektricitätsmenge von einem Metall zum anderen ergiebt die Gleichung einen Ausdruck für die Potentialdifferenz, der das Volta'sche Spannungsgesetz ausspricht, nämlich: $\varphi_1 - \varphi_2 = (\vartheta s_1 - u_1) - (\vartheta s_2 - u_2)$. Die auftretende Wärmetönung erweist sich proportional der Differenz der elektrischen Entropie beider Metalle: $\pi = \vartheta(s_1 - s_2)$.

Da nun zwar π direct beobachtet, aber die elektromolecularen Energien u_1 und u_2 nicht ohne weiteres bestimmt werden können, so giebt die Theorie über die Potentialdifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$ keinen bestimmten Aufschluss.

Viel weiter gehende Schlüsse lassen sich für verdünnte Lösungen ziehen, da deren Entropie und Energie durch thermodynamische Untersuchungen bereits bekannt sind. Die Anwendung der Gleichung $\delta(U - \vartheta S) + A = 0$ auf ungleichmässig concentrirte Elektrolyten führt zu vollkommener Uebereinstimmung mit den Resultaten, die der Verf. früher aus den Wirkungen des osmotischen Druckes (nach der von Nernst begründeten Theorie) abgeleitet hat. Auch für unpolarisirbare Elektroden ergeben sich Resultate, die sich mit denen der Nernst'schen Theorie decken und auch mit der Helmholtz'schen Theorie der Concentrationsketten übereinstimmen. Die für vollkommen polarisirbare Elektroden gefolgerten Sätze decken sich teilweise mit den Theorien von Lippmann, v. Helmholtz und Warburg und werden am Schluss der Abhandlung mit diesen verglichen.

Sbt.

L. NATANSON. Thermodynamische Bemerkungen.

Wiedemann Ann. XLII. 178-185.

Der Verf. macht zunächst den Vorschlag, die totale innere Energie U in drei Teile einzuteilen: die „innere thermische Energie" G, die „innere mechanische Energie" J und die „innere potentielle Energie" K. Er begründet diesen Vorschlag damit, dass bei einer elementaren (umkehrbaren) Veränderung dQ (die aufgenommene Wärme gleich $dG + dR$) der inneren thermischen Energie von aussen zugeführt wird, dR (die „transformirte Wärme" gleich $dK + dV$) aus innerer thermischer in innere potentielle Energie verwandelt wird, dV (die „transformirte Arbeit" gleich $dJ + dW$) aus innerer potentieller in innere mechanische Energie verwandelt und endlich dW (die äussere Arbeit) auf Kosten der inneren mechanischen Arbeit nach aussen abgegeben wird. Die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie können dann in folgende Form gebracht werden: „Durch Wärme-

zufuhr wächst die innere thermische Energie, durch Wärmeumsatz nimmt sie ab. Durch Wärmeumsatz wächst die innere potentielle Energie, durch Arbeitsumsatz nimmt sie ab. Durch Arbeitsumsatz wächst die innere mechanische Energie, durch Arbeitsleistung nimmt sie ab".

Der Verf. beschäftigt sich ferner mit dem dreifachen Punkte, der die zusammengehörigen Werte der Temperatur und des Druckes darstellt, wo eine Substanz in den drei Aggregatzuständen zugleich existirt. (Für Wasser z. B. ist $t = 0{,}0076^\circ$ C. und $p = 4{,}57$ mm). Bedeuten v_1, v_2, v_3 die Volumina der Masseneinheit der Substanz in jedem der drei Zustände, ferner p_a und t, p_b und t, p_c und t die zusammengehörigen Werte von Druck und Temperatur, die man, vom dreifachen Punkte ausgehend, längs der Verdampfungs-, Sublimations- und Schmelzcurve antrifft, so wird folgende „charakteristische Gleichung des dreifachen Punktes" gefunden:

$$(v_2 - v_3)\frac{\partial p_a}{\partial t} + (v_3 - v_1)\frac{\partial p_b}{\partial t} + (v_1 - v_2)\frac{\partial p_c}{\partial t} = 0.$$

Sbt.

E. Riecke. Das thermische Potential für verdünnte Lösungen. Wiedemann Ann. XLII. 483-501.

Abdruck aus Gött. Nachr. 1890; vgl. F. d. M. XXII. 1890. 1167.

Th. Gross. Ueber den Beweis des Princips von der Erhaltung der Energie. Berlin. Mayer u. Müller. 56 S. 8°.

Eine erkenntnistheoretische Studie, die auf eine Verherrlichung Robert Mayer's und eine Verurteilung der Helmholtz'schen Herleitungen des Princips der Energie hinauskommt.

Sbt.

Th. Gross. Ueber die Principien der Thermodynamik chemischer Vorgänge. Exner Rep. XXVII. 451-470.

Der Verf. will hier versuchen, neue Principien für die

Thermodynamik chemischer Vorgänge zu entwickeln, weil er die bezüglichen Sätze und Theorien von Thomsen und Berthelot sowie des Hrn. von Helmholtz für unrichtig hält; jedoch behält er sich ihre Ergänzung vor. Lp.

Berthelot. Sur l'unité calorimétrique. Almeida J. (2) X. 169-171.

Gegenüber den neueren Vorschlägen zur Definition der „Calorie" wünscht der Verf. die Beibehaltung der alten als die einem Gramm Wasser zur Temperaturerhöhung von 0° auf 1° zu liefernde Wärmemenge. Lp.

H. A. Lorentz. Sur la théorie moléculaire des dissolutions diluées. Arch. Néerl. XXV. 107-130.

Auf eine sehr verdünnte Lösung wirke in verticaler Richtung eine äussere Kraft, welche in allen Punkten einer Horizontalebene den nämlichen Wert hat, jedoch mit der Höhe variirt und ausserdem für die Masseneinheiten des Lösungsmittels und des gelösten Stoffes verschieden ist. Betrachtet man nun einen cylindrischen Raum mit verticaler Axe, welcher von zwei Horizontalebenen begrenzt wird, und dessen Querschnitt die Flächeneinheit sei; sind P, P' die Werte des osmotischen Druckes in den begrenzenden Querschnitten, f_1 die äussere Kraft, welche auf die Molekeln des gelösten Stoffes in jenem Raume wirkt, f_2 diejenige Kraft, welche auf die durch diese Molekeln verdrängte Menge des Lösungsmittels ausgeübt werden würde, so findet man mit Zuhülfenahme von semipermeablen Membranen:

$$P - P' = f_1 - f_2.$$

Versucht man nun dieselbe Relation aus dem Spiel der molecularen Kräfte herzuleiten, so ergiebt sich, dass hierzu die beiden nachstehenden Hypothesen erforderlich sind: 1. Eine gelöste Molekel besitzt durchschnittlich dieselbe kinetische Energie wie eine Gasmolekel bei derselben Temperatur. 2. Die betrachtete Menge des gelösten Stoffes erfährt vom Lösungsmittel eine Kraft,

welche von derselben Grösse ist, aber von entgegengesetzter Richtung wie die äussere Kraft, die auf die verdrängte Menge des Lösungsmittels wirken würde. Im weiteren werden daher diese Annahmen gemacht. Eine gelöste Molekel im Inneren der Flüssigkeit erfährt im allgemeinen keine resultirende Kraft; in der Oberfläche jedoch wirkt auf jede solche Molekel nach einer bekannten Betrachtungsweise eine nach dem Inneren der Flüssigkeit hin gerichtete Kraft, wodurch die Concentration in der Oberflächenschicht abnehmen muss, bis dieselbe unmerklich wird. Diese Kraft soll den kinetischen Druck des gelösten Stoffes im Gleichgewicht halten. Es wird dadurch erklärt, warum die Molekeln des gelösten Stoffes sich nicht an der Verdampfung beteiligen. Parallel der Oberfläche wird nun im Inneren der Flüssigkeit und in solcher Entfernung, dass in den Punkten dieser Fläche die Concentration der Lösung mit derjenigen im Inneren noch gerade übereinstimmt, eine neue Fläche gelegt. Aus der so erhaltenen Oberflächenschicht wird ein Cylinder vom Querschnitt Eins abgegrenzt und das Gleichgewicht des darin vorhandenen Stoffes, sowie in einem ähnlichen Raume des von Dampf erfüllten Gebietes, betrachtet. Es gelingt dadurch, die Formel für die Dampfdruckverminderung und in gewissem Masse auch diejenige für die Gefrierpunktserniedrigung darzuthun. Schliesslich stellt der Verf. einige Betrachtungen an über die Wirkungsweise gewisser, zum Teil fictiver, semipermeabler Membranen. Mo.

D. J. Korteweg. La théorie générale des plis et la surface ψ de van der Waals dans le cas de symétrie. Arch. Néerl. XXIV. 295-368.

Die ψ-Fläche ist von van der Waals in die mechanische Wärmetheorie eingeführt in einer in den Arch. Néerl. XXIV veröffentlichten Abhandlung. Bekanntlich lassen sich aus derselben in einfacher Weise die Phasen herleiten, welche in einem Gemisch zweier Stoffe coexistiren können. Der Verfasser untersucht in dieser Abhandlung die Aenderungen, welche jene Fläche

erfährt, wenn die Temperatur, der das Gemisch ausgesetzt ist, fortwährend abnimmt.

Im ersten Teil wird ein kurzer Abriss der Theorie der Falten und der Falten- und Osculationspunkte einer Fläche gegeben, und die Beziehung zwischen den drei- und vierfachen Tangentialebenen und den genannten Punkten erörtert. Insbesondere wird die Aufmerksamkeit auf das Erscheinen einer dreifachen Tangentialebene gelenkt, indem eine Falte mit ihrem Faltenpunkte einer zweiten Falte sich nähert, und auf die Bildung einer Nebenfalte in der Nähe einer Hauptfalte, weil diese Erscheinungen bei der ψ-Fläche am häufigsten vorzukommen scheinen.

Der zweite Teil ist descriptiv; die Erscheinungen sind abhängig von den relativen Werten der Coefficienten in der van der Waals'schen Gleichung

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b) = MRT,$$

wo

$$a = a_1(1-x)^2+2a_{12}x(1-x)+a_2x^2,$$
$$b = b_1(1-x)^2+2b_{12}x(1-x)+b_2x^2,$$

wenn mit x der Bruchteil der Anzahl der Molekeln bezeichnet wird, mit welchem der eine Stoff in dem Gemisch enthalten ist. Im Fall der Symmetrie ist $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, so dass die beiden Stoffe den nämlichen kritischen Druck und gleiche Temperatur haben. Der Fall, wo $a_{12} > a_1 = a_2$, d. h. wo die Anziehung der heterogenen Molekeln grösser ist als die der gleichartigen, ist der einfachste. Auf der ψ-Fläche findet sich sodann für $b_{12} \leqq b_1 = b_2$ nur die transversale Falte; für $b_{12} \geqq b_1 = b_2$ besteht auch eine longitudinale. Das Auftreten dieser Falten und einer dreifachen Tangentialebene bei tiefer Temperatur wird angegeben.

Der zweite Fall, wo $a_{12} < a_1 = a_2$ fordert ausführlichere Darlegungen. Sinkt die Temperatur, so erscheint die longitudinale Falte stets, die transversale nur, wenn $a_{12} < \frac{1}{2}a_1$, in zwei Teilen, welche allmählich sich einander nähern. Nur wenn $a_{12} > \frac{5}{13}a_1$, vereinigen sich die beiden Teile bei der kritischen Temperatur zum Gemisch gleicher molecularer Mengen.

An der longitudinalen Falte entsteht stets bei bestimmter Temperatur eine Nebenfalte. Diese Erscheinungen werden mittels Figuren qualitativ dargestellt; es ergiebt sich, dass dieselben in verschiedener Weise sich gestalten nach dem Werte des Verhältnisses $a_{12} : a_1$. Das Hervortreten der Falten und die Aenderung der Falten- und Osculationspunkte findet bei bestimmten Temperaturen statt, die näher betrachtet werden. Insbesondere wird die vorhergehende Theorie an dem Gemisch aus Aether mit Wasser erläutert.

Der dritte Teil enthält die mathematischen Entwickelungen, auf welche die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnittes sich stützen. Die Gleichung des Zweiges der connodalen Curve mit symmetrischen Connoden wird untersucht. Ebenfalls werden die spinodale Curve und die Faltenpunkte bestimmt. Der andere Zweig der connodalen Curve ist zu verwickelter Natur, um mathematisch ganz verfolgt zu werden; doch lassen sich die Eigenschaften desselben mittels der allgemeinen Theorie der Falten im allgemeinen finden. Schliesslich werden die Grenzen bestimmt, zwischen denen das Verhältnis $a_{12} : a_2$ enthalten sein muss, damit eine vierfache Tangentialebene an die ψ-Fläche gelegt werden kann, wodurch die Aufsuchung solcher Stoffe ermöglicht wird, die in einer Mischung in vier verschiedenen Phasen coexistiren können. Mo.

D. T. Korteweg. On Van der Waals's isothermal equation. Nature XLV. 152-154.

J. D. van der Waals. De grootte der drukking bij coëxisteerende phasen van mengsels, in het bijzonder bij zoutoplossingen. Amst. Versl. en Meded. (3) VIII. 409-447.

Nach der van der Waals'schen Theorie müssen in dem Falle, wo in einem Gemische zweier Substanzen zwei Phasen coexistiren, ausser T und p für die beiden Phasen noch zwei andere Functionen der Grössen V, T, x gleichen Wert haben,

nämlich

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{VT} \quad \text{und} \quad \Psi - x\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{VT} + pV,$$

wo mit Ψ die freie Energie bezeichnet wird und die Grösse x den Bruchteil der ganzen in der Phase vorhandenen Anzahl von Molekeln bedeutet, mit welchem jeder Stoff in die Mischung eingeht. Mit Hülfe der in den Arch. Néerl. XXIV entwickelten Formeln werden jene Bedingungen umgestaltet und auf den Fall angewandt, wo die zweite Phase derart ist, dass die Gesetze der vollkommenen Gase dabei gültig sind. Setzt man

$$pV - MRT\log(V - b_x) - \frac{a_x}{V} = \mu_x,$$

wo a_x, b_x die bekannten Grössen der van der Waals'schen Formel bedeuten, und beziehen die Indices 1, 2 sich auf die beiden Phasen, so kann der für p sich ergebende Ausdruck als Summe zweier Glieder geschrieben werden, deren erstes ist

$$MRT(1-x_1)e^{\frac{\mu_{x_1} - x_1\left(\frac{\partial \mu_{x_1}}{\partial x_1}\right)_{pT}}{MRT} - 1},$$

während das zweite hieraus erhalten wird, indem x_1 mit $(1-x_1)$ und umgekehrt vertauscht wird. Für $x_1 = 0$, $x_1 = 1$ ergeben diese Glieder zwei besondere Werte p_1, p_2 des Druckes; μ_{x_1} geht dabei über in μ_1, das moleculare thermodynamische Potential des ersten Stoffes in der flüssigen Phase bei dem Drucke p_1 des gesättigten Dampfes desselben. Dem ersten Glied des Ausdruckes für p kann sodann auch die Gestalt erteilt werden

$$p_1(1-x_1)e^{\frac{\mu_{x_1} - \mu_1 - x_1\left(\frac{\partial \mu_{x_1}}{\partial x_1}\right)_{pT}}{MRT}},$$

und der Zähler des Exponenten von e hat näherungsweise den Wert $-\frac{x_1^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_{x_1}}{\partial x_1^2}\right)_{pT}$.

Im zweiten Teile der Abhandlung werden Salzlösungen bei der Annahme $p_2 = 0$ betrachtet, so dass

$$p = p_1(1-x_1)e^{-ax_1^2}.$$

geschrieben werden kann. Zunächst wird α als Constante betrachtet. In erster Annäherung ist $p_1 - p = p_1 x_1$, wie die gewöhnliche Theorie der Lösungen fordert. Aus den Versuchen von Tamman ist die Grösse

$$\frac{p_1 - p}{p_1 x_1} = K$$

bekannt, und aus der Relation

$$e^{\alpha x_1^2} = \frac{1 - x_1}{1 - K x_1}$$

kann der Wert von α bestimmt werden. In dieser Weise werden für α Werte gefunden, welche mit steigender Concentration abnehmen. Für $\lim x_1 = 0$ ist $\lim K = 1$, während die Versuche den Wert 2 ergeben. Diese Thatsachen nötigen zur Annahme einer elektrolytischen Dissociation, deren Theorie sodann auseinandergesetzt wird. Mischt man $1-x$ Mol. Wasser mit x Mol. H_2SO_4, so dass nach der Mischung $1-x$ Mol. Wasser, $x-y$ Mol. Säure, y Ionen SO_4 und y Ionen H_2 vorhanden sind, so ergiebt sich

$$\log \frac{y^2}{(x-y)(V-b)} = -\frac{E}{MRT} + \frac{H}{MR} - 1 - \frac{\frac{MRT}{V-b}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{1}{V}\frac{\partial a}{\partial y}}{MRT},$$

worin mit E, H der Energieverlust bez. der Entropieverlust bezeichnet wird, wenn die beiden Ionen zu einer Molekel sich vereinigen und a, b die bekannten Grössen der van der Waals'schen Formel sind. Löst man nach y auf und trägt diesen Wert in den Ausdruck für Ψ ein, so kann mittels der anfangs erwähnten Gesetze wieder ein Ausdruck für p gefunden werden, dessen erstes Glied die Gestalt hat:

$$p = p_1 \frac{1-x}{1+y} e^{-(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)},$$

worin zunächst $\beta = \gamma = 0$ gesetzt wird. Die Versuche von Tamman können, wenn man die angenähert richtige Gleichung $y^2 = C(x-y)$ zu Hülfe zieht, eine experimentelle Bestätigung dieser Formel liefern. Am merkwürdigsten sind dabei die für KOH, LiJ angestellten Versuche, weil die vorher erwähnte Grösse K hierfür Werte grösser als 2 erhält, eine Thatsache,

welche auf keine Weise durch die alleinige Annahme einer elektrolytischen Dissociation erklärt werden kann. Mit der obigen Formel stimmen diese Werte jedoch befriedigend.

Im dritten Teil wird das Henry'sche Gesetz besprochen, welches sich auf diejenigen Erscheinungen bezieht, wo in der Formel für p das p_1 enthaltende Glied gegen das zweite verschwindet. Es wird hierfür eine corrigirte Formel von der Form

$$p = Cxe^{\beta x}$$

angegeben. Schliesslich wird noch der Einfluss der Temperatur auf die Grösse des Druckes in Betracht gezogen. Die gesamten Entwickelungen führen den Verfasser zu der Ueberzeugung, dass die Abweichungen, welche Salzlösungen von den gewöhnlichen Gesetzen zeigen, nur in einer Wirkung des Lösungsmittels auf die gelösten Molekel ihre Erklärung finden können.

Mo.

J. D. van der Waals. De formule der electrolytische dissociatie. Amst. Versl. en Meded. (3) VIII. 448-459.

Diese Abhandlung schliesst sich sehr eng an die vorhergehende an. Die Formel für die elektrolytische Dissociation wird aufs neue hergeleitet unter der einfacheren Annahme, dass $\frac{\partial b}{\partial y}$ gleich Null gesetzt werden kann; sodann wird in erster Annäherung geschrieben

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 2(a_{13}+a_{14}-a_{12}),$$

wo a_{13}, a_{14} die specifische Attraction einer Molekel Wasser auf die beiden Ionen, a_{12} dieselbe Grösse für die Wirkung zwischen einer Wasser- und einer Salzmolekel bedeutet. Die Grösse $E-2\frac{a_{13}+a_{14}-a_{12}}{V}$, welche in der Formel sich vorfindet, ist sodann der Energieverlust, wenn zwei Ionen innerhalb des Lösungsmittels zu einer Molekel sich verbinden; dieselbe ist von Arrhenius bestimmt. Ist ein Salz in zwei Lösungsmitteln gelöst und bezeichnet man die Grössen, welche auf die zweite Lösung

sich beziehen, mit Strichen, so ist für $\frac{y}{x} = z$, $\frac{z^2}{1-z} = C$:

$$\log \frac{C}{C'} \frac{V'-b'}{V-b} = \frac{2}{MRT}\left[\frac{a_{13}+a_{14}-a_{12}}{V} - \frac{a'_{13}+a'_{14}-a'_{12}}{V'}\right].$$

Ist der erste Bruch auf der rechten Seite dieser Gleichung gross gegen den zweiten, so verschwindet C' der Grösse C gegenüber. Hierdurch wird das verschiedene Verhalten eines Salzes zwei verschiedenen Lösungsmitteln gegenüber erklärt. Auch der Fall einer grösseren Concentration wird noch näher betrachtet.

Mo.

E. Heilborn. Die physikalische Bedeutung der Grösse b der van der Waals'schen Zustandsgleichung. Exner Rep. XXVII. 369-372.

„Die Erfahrung entscheidet zu Gunsten der Ansicht des Hrn. O. E. Meyer, dass nämlich die Grösse b der van der Waals'schen Zustandsgleichung als die mit $4\sqrt{2}$ multiplicirte räumliche Ausdehnung sämtlicher in der Volumeneinheit enthaltenen Molekeln zu betrachten sei.“ Lp.

Lord Rayleigh. On Van der Waals treatment of Laplace's pressure in the virial equation: a letter to Prof. Tait. Nature XLIV. 499, 597.

P. G. Tait. On Van der Waals's treatment of Laplace's pressure in the virial equation: in answer to Lord Rayleigh. Nature XLIV. 546, 627-628.

Es handelt sich darum, ob die Beweisführung bei Herrn van der Waals als streng anzuerkennen ist. Lp.

J. T. Bottomley, A. W. Rücker, R. E. Baynes. Prof. Van der Waals on the continuity of liquid and gaseous states. Nature XLIII. 415-416, 437, 487-488.

Hr. Bottomley meinte in dem ersten Artikel, die Rechte von

Andrews gegenüber Hrn. van der Waals wahrnehmen zu müssen, ist aber dann durch die beiden anderen Herren belehrt worden, dass seine scharfen Angriffe des holländischen Gelehrten gegenstandslos wären. Lp.

W. Ramsay. Liquids and gases. Nature XLIV. 274-277.

Eine Vorlesung in der Royal Institution über die Continuität des flüssigen und des gasförmigen Zustandes. Lp.

Sydney Young. On the generalizations of Van der Waals regarding „corresponding“ temperatures, pressures, and volumes. Nature XLV. 93-94.

Carl Barus. The continuity of solid and liquid. Silliman J. (3) XLII. 125.

J. Stefan. Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere. Wiedemann Ann. XLII. 269-286.

Abgedruckt aus Wien. Ber. XCVIII. S. F. d. M. XXI. 1889. 1198. Sbt.

P. G. Tait. On the virial equation for gases and vapours. Nature XLV. 199-200.

B. Galitzine. Ueber die Bestimmung der kritischen Temperatur, der Dichtigkeit der gesättigten Dämpfe und der Ausdehnung von Flüssigkeiten mittels Beobachtungen an zugeschmolzenen Röhren. Arbeiten der phys. Section der Kaiserlichen Gesellschaft der Freunde der Naturkunde. Moskau. IV. Hft. 2. 5-13. (Russisch.)

Im ersten Teil der Abhandlung weist der Verf. darauf hin,

dass die Temperatur, bei welcher das Erscheinen des Meniscus und die eigentümliche Nebelbildung beim Abkühlen des Rohrs stattfindet, tiefer als die wahre kritische Temperatur des Stoffes liegen muss.

Weiter schlägt der Verf. eine Methode vor, die zur Bestimmung der Dichtigkeit der gesättigten Dämpfe bei höheren Temperaturen dienen soll und auf folgendem Princip beruht. Bringt man in ein kleines zugeschmolzenes Röhrchen eine bestimmte Menge der zu untersuchenden Flüssigkeit hinein und erwärmt dieselbe, so muss, wenn die hineingebrachte Menge nicht zu gross ist, bei einer bestimmten Temperatur die ganze Menge Flüssigkeit sich in Dampf umwandeln, das Rohr also mit gesättigtem Dampfe gefüllt sein. Dividirt man das Gewicht der Substanz durch das später zu ermittelnde Volumen des Rohrs, so hat man die zu dieser Temperatur gehörige Dichte.

Zum Schluss untersucht der Verf. die Frage: wie ändert sich die Stelle des Meniscus im Rohre bei fortgesetztem Erwärmen desselben? Beobachtet man bei verschiedenen Füllungen des Rohrs diejenige Temperatur, bei welcher der Meniscus seine höchste Stelle im Rohre erreicht, so kann man daraus die Ausdehnung der Flüssigkeit selbst ermitteln, wie aus den mathematischen Auseinandersetzungen des Verf. folgt. Diese Methode ist insofern von Belang, als man zu ihrer Ausführung keiner calibrirten Röhren bedarf. Verf.

C. Puschl. Ueber das Verhalten gesättigter Dämpfe.

Wien. Ber. C. 843-854.

Aus den Formeln, die der Verf. für das Verhalten gesättigter Dämpfe herleitet, ergiebt sich, dass für Wasserdampf von 0° das Mariotte'sche Gesetz so gut wie vollkommen erfüllt ist (was auch mit einer Beobachtung von Dieterici übereinstimmt), während dem Gay-Lussac'schen Gesetze nicht annähernd so gut genügt wird. Schreibt man dem Quecksilberdampfe ein ähnliches Verhalten zu, so darf man annehmen, dass bei den Kundt'schen Versuchen über Schallgeschwindigkeit dieser Dampf sich nicht

wie ein ideales Gas verhielt, und dass, während bei diesen Versuchen $k = 1{,}67$ gefunden wurde, für den hinreichend von der Sättigung entfernten Dampf sich wie für die Luft $k = 1{,}40$ ergeben würde.

Die nachfolgenden Betrachtungen gelten dem Verhalten im kritischen Punkte. Sbt.

G. Jäger. Ueber die Verdampfungswärme. Wien. Ber. C. 1122-1131.

Die Verdampfungswärme r der Flüssigkeiten besteht aus drei Summanden $a+b+c$, wobei $a = a_0(1+\alpha t)$ die äussere Arbeit, $b = b_0(1-\varepsilon t)$ die zur Ueberwindung der Capillarkräfte geleistete Arbeit und $c = c_0(1+\beta t)$ die Arbeit bedeutet, die bei der Aenderung der Constitution der aus dem flüssigen in den dampfförmigen Zustand übergehenden Molecüle geleistet wird. Von besonderem Interesse ist hier die Grösse b, die der Capillaritätsconstanten proportional ist; ihr Wert folgt aus den Eigenschaften der Lösungen. Für solche gilt der Satz: „Die Verdampfungswärme der Lösung ist grösser als die des reinen Lösungsmittels, und es ist die Zunahme der Verdampfungswärme der Zahl der gelösten Molecüle proportional“; und zwar lässt sich dieser Satz sowohl aus der Clapeyron-Clausius'schen Gleichung als auch aus der Gleichung $r = a+b+c$ ableiten, wenn in dieser a und c als constant angenommen werden. Mit Hülfe von b ergiebt sich auch der innere Druck A. Der Verfasser findet für

	$b =$	$A =$	
Aether:	36,02 Cal.,	55.10^7 (c.g.s.)	od. 545 Atm.
Schwefelkohlenstoff:	35,15 „	95 „	935 „
Chloroform:	24,47 „	78 „	768 „
Aceton:	42,45 „	72 „	711 „ .

Sbt.

G. Jäger. Zur Theorie der Dampfspannung. Exner Rep XXVII. 378-381.

G. Jäger. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln. Exner Rep. XXVII. 547-554.

G. JÄGER. Ueber die Abhängigkeit des specifischen Volumens gesättigter Dämpfe von dem specifischen Volumen der zugehörigen Flüssigkeiten und der Temperatur. Exner Rep. XXII. 640-645.

Abdruck aus Wien. Ber. XCIX; Referat F. d. M. XXII. 1890. 1160ff.

C. DEL LUNGO. Ueber den Druck und das specifische Volumen der gesättigten Dämpfe. Wiedemann Ann. XLII. 344-346.

Verf. teilt in diesem Auszuge aus seiner Inauguraldissertation mit, dass er für den Druck und das specifische Volumen eines gesättigten Dampfes folgende Formeln theoretisch abgeleitet hat:

$$\log p = k - \frac{a}{T} - b \log T,$$

$$\log s = k' + \frac{a'}{T} + b' \log T.$$

Aus beiden Gleichungen folgert er den Wert der kritischen Temperatur $T = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Aus der hieraus sich ergebenden Bedingung $ab' = a'b$ lässt sich die Zeuner'sche Gleichung $ps^n =$ const. ableiten. Sbt.

H. DE LA GOUPILLIÈRE. Sur la durée de l'évaporation dans les générateurs. C. R. CXII. 977-983.

Sinkt der Wasserspiegel in einem Dampfkessel in der Zeit t von der Höhe z_0 der Feuerzüge bis zu irgend einer Höhe z herab, wobei die Grösse der Heizfläche von S_0 auf S abnimmt, so gilt die Gleichung:

$$t = \int_z^{z_0} \frac{s\,dz}{(v-u)S + w\sigma + uS_0}.$$

σ, der Umfang, und s, der Inhalt der horizontalen Wasseroberfläche, sind ebenso wie S Functionen von z; u, v, w sind Constanten, und zwar bedeutet v die Anzahl cbm Wasser, die für

jedes qm Heizfläche in 1' verdampft werden, u trägt der von der überhitzten Fläche $S_0 - S$ auf die Wasseroberfläche ausgeübten Strahlung, w der zwischen dem glühenden und der angrenzenden Zone des benetzten Metalls stattfindenden Leitung Rechnung. Die Gleichung wird angewandt auf die Fälle, wo die Kesselfläche eine verticale Cylinderfläche oder irgend eine Rotationsfläche ist.

Nach dieser für die Praxis wichtigen Untersuchung wird noch die rein theoretische Aufgabe behandelt: die Form der Meridiancurve zu bestimmen, wenn das Gesetz für die Geschwindigkeit gegeben ist, mit der der Wasserspiegel fällt $\left(-\frac{dz}{dt} = F(x)\right)$. Es ergiebt sich:

$$z = \int dx \cdot \sqrt{\left(\frac{x.F'(x) + 2F(x) - \frac{2w}{x}}{v-u}\right)^2 - 1}.$$

Sbt.

H. DE LA GOUPILLIÈRE. Sur la durée de l'évaporation dans les générateurs. C. R. CXII. 977-983.

H. DE LA GOUPILLIÈRE. Abaissement du plan d'eau dans un corps cylindrique horizontal. C. R. CXII. 1036-1038.

Es wird die Differentialgleichung für die im ersten Titel genannte Aufgabe angegeben. Sie führt unmittelbar auf eine Quadratur, welche für verschiedene Formen des Dampfkessels ermittelt wird. F. K.

P. DE HEEN. Recherches sur la vitesse d'évaporation des liquides pris au dessous de la température d'ébullition. Belg. Bull. (3) XXI. 11-24, 214-219, 798-810.

Eine vorzugsweise experimentelle Arbeit. Mn. (Lp.)

J. H. COTTERILL. The steam-engine considered as a thermodynamic engine. A treatise on the thermo-

dynamic efficiency of steam-engines, illustrated by diagrams, tables, and examples from practice. Second edition, revised and enlarged. London. E. and F. Spon. (1890). [Nature XLIII. 123-124.]

Hr. Larmor sagt am Schlusse seiner umfangreichen Anzeige: „Der Leser wird in dem Buche eine Einfachheit bei der Aufstellung der physikalischen Ergebnisse und eine Befreiung von der Ueberwucherung der algebraischen Analysis bei der Erörterung der allgemeinen Gesetze finden, die eine der wertvollsten Eigenschaften eines Lehrbuchs über die Principien der Physik bilden, und die passendste Vorbereitung zur Erforschung besonderer Probleme durch die mathematische Analyse." Lp.

C. H. Peabody. Thermodynamics of the steam engine and other heat engines. London. Macmillan and Co. (1889). [Nature XLV. 172-173].

Die Anzeige in der Nature von Hrn. A. G. Greenhill schliesst mit den Worten: „Das Buch wird als unentbehrlich befunden werden nicht nur von den Entwerfern von Dampfmaschinen, sondern auch von Verfassern abstracter Schriften über die mechanische Wärmetheorie, indem es ihre mathematischen Entwickelungen innerhalb vernünftiger Grenzen einer Tageserscheinung hält und ihre analytische Begabung in eine nützliche Richtung leitet." Lp.

A. Gross. Note sur le calcul des chaudières. Génie civil. XIX. 210-212, 219-220.

Der Berechnung der Dampfkessel wird gewöhnlich die Annahme eines unendlich langen Kreiscylinders zu Grunde gelegt. In Wirklichkeit ist aber der Querschnitt nicht ein Kreis, sondern weicht von dieser Form mehr oder minder ab.

Der Verfasser macht nun erstlich die Annahme, dass zwischen der Bogenlänge und der Krümmung eine Gleichung von der Form

$$\frac{1}{\varrho} = as + b$$

besteht, welche für $a = 0$ in den Kreis übergeht. Die beiden Constanten a und b werden aus der Breite und der Dicke des Blattes bestimmt, aus welchem der Kessel gebildet ist. Nachdem unter dieser Voraussetzung die Berechnung erledigt ist, wird dieselbe für den Fall durchgeführt, dass der Querschnitt aus zwei Halbkreisen zusammengesetzt ist, deren Radien sich um die Dicke des Blattes unterscheiden. F. K.

C. Friedmann. Die Kosten des Dampfes bei verschiedener Anstrengung des Kessels. Z. dtsch. Ing. XXXV. 757-761.

Der Verfasser entwickelt einen Ausdruck für die Kosten y, welche entstehen, wenn stündlich x Kilogramm Wasser in Dampf verwandelt werden, und zwar auf Grund zweier verschiedener Hypothesen über die von den Heizgasen durch die Kesselwände an das Kesselwasser abgegebene Wärmemenge. Der erhaltene Ausdruck wird discutirt, und besonders untersucht, wann der Quotient $\frac{y}{x}$ ein Minimum wird. F. K.

F. J. Weiss. Leistungsregulator für Pumpwerksdampfmaschinen mit veränderlicher Expansion. Z. dtsch. Ing. XXXV. 1065-1069, 1127-1132, 1182-1188.

Mathematisch interessant dürfte nur der mittlere Abschnitt sein, welcher die Theorie eines Regulators giebt, der sich in einem Gehäuse befindet, das mit der Hülse fest verbunden ist. F. K.

K. Kraiewitsch. Ueber das Gesetz, welches näherungsweise die Veränderungen der Elasticität gesättigter Dämpfe bei Temperaturveränderungen angiebt. St. Petersb. 1891. 64 S.

N. v. Wuich. Ueber die Bestimmung der Verbrennungs-Temperatur von Explosivstoffen. Mitt. üb. Art. u. Genie. XXII. 67-80.

D. MENDELEJEW. Veränderung der Dichtigkeit des Wassers beim Erwärmen. Phys. Ges. St. Petersb. XXIII. 188-220.

Vergl. das Referat S. 1020 dieses Bandes.

J. C. MAXWELL. La chaleur. Leçons élémentaires sur la thermométrie, la calorimétrie, la thermodynamique. Traduction d'après la 8e édition anglaise par G. Mouret, précédée d'une préface par A. Potier. Paris. 432 S.

B. Gastheorie.

Lord RAYLEIGH. Dynamical problems in illustration of the theories of gases. Phil. Mag. (5) XXXII. 424-445.

Die Formeln dieser Abhandlung sind so zahlreich, dass es thatsächlich unmöglich ist, innerhalb vernünftiger Grenzen einen Auszug aus den mathematischen Verfahrungsarten zu bringen, und der Ref. begnügt sich daher damit, die Einleitung herzusetzen, die den Schlüssel zum Inhalte liefert.

Die Forschungen, von welchen ein Teil hier geboten wird, hatten ihren Ursprung in der Ueberzeugung, dass die gegenwärtige, ziemlich unbefriedigende Lage der Gastheorie bis zu einem gewissen Grade von einem Mangel an geistiger Vorbereitung der Leser herrührt, welche plötzlich Anschauungen und Processen von ungewöhnlicher Schwierigkeit gegenüber gestellt werden. Jedenfalls kann ich für meine Person eingestehen, dass ich aus einer abgestufteren Angriffsart, bei der die Anstrengung sich vorerst auf ein einziges Hindernis beschränkte, grossen Nutzen gezogen habe. Um die Antworten auf grundlegende statistische Fragen unbelastet von anderen Schwierigkeiten herauszubekommen, wird die Bewegung hierbei auf eine Dimension eingeschränkt, und ausserdem wird das eine System der anprallenden Körper im Verhältnis zu dem anderen als sehr klein voraus-

gesetzt. Die so in einigen Richtungen erzielte Vereinfachung gestattet, interessante Ausdehnungen nach anderen hin zu machen. So werden wir befähigt, den ganzen Process zu verfolgen, durch welchen der stationäre Zustand erreicht wird, wenn schwere Massen, die ursprünglich in Ruhe waren, dem Bombardement ununterschiedlich von beiden Seiten auf sie abgefeuerter Geschosse unterworfen werden. Der Fall von Pendeln oder von Massen, die durch elastische Verbindungen nach festen Punkten hin bewegt werden, wird ebenfalls betrachtet, und der stationäre, unter einem einseitigen oder einem zweiseitigen Bombardement erreichte Zustand wird direct berechnet. Gbs. (Lp)

Lord Rayleigh. On the virial of a system of hard colliding bodies. Nature XLV. 80-82.

N. N. Pirogow. Ueber das Gesetz Boltzmann's. Exner Rep. XXVII. 515-546.

Die Ueberschriften der einzelnen Paragraphen lauten: § 1. Das N-Teilchen-System. § 2. Wahrscheinlichkeitsfunctionen. § 3. Der stationäre Zustand. § 4. Eine Klassification der Systeme. § 5. Das Gesetz Boltzmann's. § 6. Die Temperatur. Ueber die in § 5 durchgeführte Ableitung des Ausdrucks des Boltzmann'schen Gesetzes bemerkt der Verf., dass dieselbe ganz unabhängig ist von der Annahme, dass alle Teilchen des Systems unter einander gleichartig seien; ebenso auch von der Annahme, dass das System aus nur einigen Sorten von unter einander gleichartigen Teilchen bestehe. Der gefundene Ausdruck

$$A \,.\, e^{-km(u^2+v^2+w^2)-2k\psi}$$

bleibt auch dann noch richtig, wenn das System aus lauter heterogenen Teilchen besteht; selbstverständlich muss aber, damit man den stationären Zustand eines solchen Systems bestimmen könne, das Verteilungsgesetz der Massen auf die einzelnen Teilchen des Systems bekannt sein. Lp.

Sir W. THOMSON. On some test cases for the Maxwell-Boltzmann doctrine regarding distribution of energy. Lond. R. S. Proc. L. 79-88. Cly.

Sir WILLIAM THOMSON. On some test cases for the Maxwell-Boltzmann doctrine regarding distribution of energy. Nature XLIV. 355-358.

Vorgetragen in der Royal Society 11. Juni und 10. Juli 1891.

P. G. TAIT. On the foundations of the kinetic theory of gases. V. (Abstract). Edinb. Proc. XIX. 32-35. Cly.

H. PARENTY. Sur les modifications de l'adiabatisme d'une veine gazeuse contractée. C. R. CXIII. 791-794.

Eine eigentümliche Folgerung der Analyse liefert für die Temperatur, Geschwindigkeit und Dichtigkeit eines contrahirten Gasstromes Werte, die durchaus verschieden sind von denen, die man unter der Annahme erhält, dass die adiabatische Energie vollkommen erhalten wird. Die Convergenz der Gasmolecüle kann eine Umwandlung von Geschwindigkeit in Wärme zur Folge haben. Sbt.

G. JÄGER. Zur Theorie der Dissociation der Gase. Wien. Ber. C. 1182-1192.

Der Verfasser hat die Absicht, die Hypothese von der wachsenden Dissociation der Gase mit wachsender Temperatur zu prüfen. Er leitet deshalb zuerst mit den Hülfsmitteln der kinetischen Gastheorie eine Formel für den Dissociationsgrad ab, wobei überall vorausgesetzt wird, dass eine Molekel nur in zwei gleichartige zerfällt. Bedeuten N_1 die Anzahl der nicht dissociirten, N_2 die der dissociirten Molekeln, t die Temperatur, α den Ausdehnungscoefficienten der Gase und a_1 und γ Constanten,

so findet er mit einigen Vernachlässigungen die Gleichung:

$$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 + 2\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = a_1 \frac{e^{\frac{\gamma}{1+at}}}{(1+at)^2}.$$

Wird die rechte Seite mit c bezeichnet, und bedeutet d_0 die Dichte des Gases, bei welcher gar keine dissociirte Molekel vorhanden ist, d die Dichte bei der Temperatur t, so folgt weiter die Gleichung

$$d = \frac{d_0}{1 + \frac{1}{\sqrt{1+c}}}.$$

Diese Gleichung findet der Verfasser durch die von Naumann für Untersalpetersäure bei 12 Temperaturen von 26,7° bis 135,0° angegebenen Dichten bestätigt. Die Constanten a_1 und γ sind aus den Temperaturen 49,6° und 90° mit den zugehörigen Graden der Zersetzung von 40,04 Proc. und 84,83 Proc. berechnet. Für die Dissociationstemperatur selbst (die in γ enthalten ist) rechnet er indessen den ungeheuren Wert von über 6000° heraus.

Br.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

E. de Amicis. Introduzione alla teoria matematica della propagazione del calore. Torino. E. Loescher. VIII + 64 S. [Rivista di Mat. I. 159.]

G. H. Bryan. An application of the method of images to the conduction of heat. London M. S. Proc. XXII. 424-430.

In der F. d. M. XX. 1888. 1220 besprochenen Abhandlung von Hobson war die Bewegung der Wärme in einem unendlich ausgedehnten, aber auf einer Seite von einer Ebene begrenzten Körper für den Fall untersucht, dass die anfängliche Temperaturverteilung gegeben ist und durch die begrenzende Ebene Strahlung erfolgt. Hobson's Lösung gilt nur unter der Voraussetzung, dass die Temperaturverteilung überall endlich und continuirlich

ist. Der Verf. macht es sich nun zur Aufgabe, nach der Methode der Bilder auch den Fall zu untersuchen, wo Discontinuitäten vorkommen. Als Beispiel behandelt er zum Schluss das Riemann'sche Problem einer unendlich grossen Wurzel.

Sbt.

O. Chwolson. Ueber die Verteilung der Wärme in einer einseitig bestrahlten schwarzen Kugel. Mém. de l'Acad. Imp. d. Sc. de St. Pétersb. (7) XXXVIII. 69 S.; Exner Rep. XXVII. 647-714.

Capitel I. Enthält die elementare Ableitung einiger einfachen Näherungsformeln für die Temperatur einer bestrahlten Kugel, wobei angenommen wird, dass alle Punkte der Kugel dieselbe Temperatur besitzen.

Capitel II. Es wird bewiesen, dass die mittlere Temperatur einer bestrahlten Kugel gleich $Q/4\pi R^2 h$ ist, wo Q die in der Zeiteinheit absorbirte Wärmemenge, R den Radius und h die äussere Wärmeleitung bezeichnen. Die Verteilung der auffallenden Strahlenbündel über die Oberfläche kann eine völlig beliebige sein. Der Satz bleibt richtig, wenn die Kugel aus concentrischen heterogenen Schichten besteht.

Capitel III. Stationärer Zustand einer einseitig bestrahlten schwarzen Kugel. Ein Punkt der Kugel, dessen Coordinaten r und φ (die Axe parallel den Strahlen), hat die Temperatur

$$(1) \qquad V = Rc\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{n+bR} \cdot \frac{r^n}{R^n} P_n(\cos\varphi),$$

wo $b = \frac{h}{k}$, k die innere Wärmeleitung, $c = qk$, q die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch eine zu den Strahlen senkrechte Flächeneinheit hindurchgeht. Es ist $h_0 = \frac{1}{4}$, $h_1 = \frac{1}{2}$, $h_{2n+1} = 0$ für $n > 1$ und

$$h_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{8} \frac{(4n+1)}{n(n+1)} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}.$$

Einzelne Punkte der Kugel werden näher untersucht, und einige allgemeine Sätze über die Temperaturverteilung aufgestellt. Die

Convergenz der Reihe (1) wird nachgewiesen. Der physikalisch wohl mögliche Fall $bR = 1$ wird näher untersucht. Die Summe (1) lässt sich in die Form

$$V = \frac{R^2 c}{4\pi} \int_{\varphi_1=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \cos\varphi_1 \sin\varphi_1 \, d\varphi_1 \, d\psi$$

$$\times \left\{ \frac{2}{\sqrt{R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2}} + \frac{1-2bR}{r^{bR}} \int_0^R \frac{r^{bR-1} dr}{\sqrt{R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2}} \right\},$$

$$\cos\gamma = \cos\varphi\cos\varphi_1 + \sin\varphi\sin\varphi_1\cos\psi$$

bringen. Für specielle Fälle lässt sich V in geschlossener Form berechnen. Für $bR = 1$ ist

$$V_{max} = \frac{Rc}{2}\left\{\frac{3}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\lg(1+\sqrt{2})\right\} = 0{,}590317\, Rc,$$

$$V_{min} = \frac{Rc}{2}\left\{\frac{3}{\sqrt{2}} - \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\lg(1+\sqrt{2})\right\} = 0{,}090317\, Rc.$$

Die stationäre Verteilung wird noch für eine aus zwei concentrischen heterogenen Teilen bestehende Kugel untersucht.

Capitel IV. Das Problem des variabeln Zustandes eines sich selbst überlassenen Körpers führt zu den Gleichungen $dV/dt = a^2 D^2 V$; an der Oberfläche ist

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = -bV$$

und zur Zeit $t = 0$

$$(3) \qquad V_0 = f(x, y, z)$$

eine gegebene Temperatur.

Die Lösung erscheint als Summe von Gliedern, welche sämtlich für alle t der Gleichung (2) genügen; bei $t = 0$ muss aber die Function (3) erhalten werden, welche der Gleichung (2) allgemein nicht zu genügen braucht. Der hierin liegende Widerspruch wird zuerst an Beispielen für die Kugel untersucht und gelöst. Die Lösung liegt in dem Umstand, dass die betreffenden Reihen für $0 \leqq r \leqq R$ eine Function, für $r > R$ eine andere darstellen, sodass $\frac{\partial V}{\partial n} = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R}$ zwei Werte besitzt, während die Reihe einen der Gleichung (2) genügenden Mittelwert giebt.

Ist z. B. bei einer Kugel $V_0 = f(r)$ und $bR = 1$, so erscheint

V als Reihe, welche bei $t = 0$ in

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin(2n+1)\frac{\pi r}{2R},$$

$$\alpha_n = \frac{2}{R}\int_0^R f(r) r \sin(2n+1)\frac{\pi r}{2R}\,dr$$

übergeht. Es ist nun

$$\varphi(r) = \begin{cases} f(r) & \text{für } 0 \leqq r \leqq R, \\ \dfrac{2R-r}{r} f(2R-r) & \text{für } R \leqq r \leqq 2R. \end{cases}$$

Der (arithmetische) Mittelwert der beiden $\varphi'(R)$ genügt der Oberflächenbedingung. An der Oberfläche ist $\varphi''(R) = \infty$. In einer Anmerkung wird gezeigt, dass Aehnliches für die Cylinderaufgabe gilt. Für $t = 0$ genügt also V nur in fictiver Weise der Oberflächenbedingung. Es wird ferner gezeigt, dass für jedes noch so kleine t dieser Bedingung factisch genügt wird.

Cap. V behandelt die Abkühlung einer schwarzen Kugel, die zuerst durch einseitige Bestrahlung bis zum stationären Zustand erwärmt wurde.

Cap. VI erörtert die Erwärmung einer schwarzen Kugel bei einseitiger Bestrahlung.

Aus den Formeln werden einige Sätze abgeleitet, die für die Aktinometrie eine Bedeutung haben können. Verf.

O. Chwolson. Ueber die Abhängigkeit der Wärmeleitungsfähigkeit von der Temperatur. Exner Rep. XXVII. 1-41.

Abdruck aus den Mém. Pétersbourg XXXVII; Referat in F. d. M. XXII. 1890. 1185.

J. Linde. Methode zur Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens einer Kugel und Wärmevorgänge in derselben. Exner Rep. XXVII. 391-400.

Mathematische Behandlung der folgenden Aufgabe: Die Oberfläche einer Kugel wird abwechselnd auf die Temperatur u_1 und

u_2 gebracht, und zwar so, dass vom Zeitmomente $t = 0$ bis $t = T$ sie auf die Temperatur u_2 erwärmt wird; von $t = T$ bis $t = 2T$ wird die Kugel auf die Temperatur u_1 abgekühlt; von $t = 2T$ bis $t = 3T$ wird sie abermals auf die Temperatur u_2 gebracht etc. Man soll 1) die Temperatur in irgend einer Zeit in irgend einer dieser Phasen bestimmen; 2) in welcher Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel muss man beobachten, um am einfachsten das Wärmeleitungsvermögen der Kugelsubstanz zu bestimmen?

Lp.

J. Linde. Ueber die Temperaturbestimmung eines Drahtes, wenn durch denselben ein galvanischer Strom fliesst. Exner Rep. XXVII. 401-408.

Ein Leiter für Wärme und Elektricität sei gegeben. Die Länge l sei fadenförmig, der Querschnitt klein gegenüber der Länge. Die Temperatur der Umgebung soll auf 0° erhalten werden. Es soll vom Zeitmomente $t = 0$ ein galvanischer Strom von der Stärke i durchgeschickt werden, so dass die Masse des Fadens erwärmt wird. Der Verf. beantwortet die Fragen, wie man die Temperatur in irgend einem Zeitmomente bestimmt, und welches die mittlere Temperatur durch die ganze Länge des Fadens hin ist.

Lp.

G. Jager. Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit der Salzlösungen. Exner Rep. XXVII. 42-59.

Abdruck aus Wien. Ber. XCIX, Referat in F. d. M. XXII. 1890. 1187.

G. Appelroth. Lösung eines Problems über die Erwärmung eines homogenen rechteckigen Parallelepipeds. Arb. d. phys. Section d. Kais. Ges. der Freunde der Naturkunde. Moskau. IV. Heft 1. 5-8.

P. N. Lebedeff. Ueber die abstossende Kraft strahlender Körper. Arb. d. phys. Section d. Kais. Ges. der Freunde der Naturkunde. Moskau. IV. Heft 2. 1-3.

N. Sluginoff. Eine Formel, welche das Verhältnis der Wärmeleitungsconstanten der Körper im festen und flüssigen Zustande bestimmt. Phys. Ges. St. Petersb. XXIII. 1891. 456-458.

Scheboniepf. Zur Frage über die Verbreitung der Wärme in einer fliessenden Flüssigkeit mittelst Wärmeleitung und Convection. Kasan Ber. (2) I. 1891. 22-45.

B. Stankewitsch. Experimentelle Untersuchung der Wärmeleitung organischer Flüssigkeiten und Ideen über den Bau der Flüssigkeiten. Warschau 1891. 1-105.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Capitel 1.

G e o d ä s i e.

Fr. Müller. Compendium der Geodäsie und sphärischen Astronomie. I. Teil: Einleitung. Methode der kleinsten Quadrate. Allgemeine und specielle Theorie der Messinstrumente. Prag. 1. Hft. 1886, 2. Hft. 1889. (Böhmisch.)

Der Autor liefert hiermit seinen Zuhörern am k. k. b. Polytechnicum ein umfangreiches und gründliches Handbuch der genannten Fächer, welches auch für Studirende der Physik und Astronomie recht brauchbar sich erweist. Std.

— ——

Kossmann. Die Terrainlehre, Terraindarstellung und das militärische Aufnehmen. Mit Berücksichtigung der neuesten Bestimmungen der Königl. preussischen Landesaufnahme bearbeitet. 6. Aufl. Potsdam. Aug Stein. VIII + 280 S. 8°.

Von den drei Hauptteilen des Buches: A. Terrainlehre, B. das militärische Planzeichnen, C. das militärische Aufnehmen, fällt nur der dritte in den Bereich des Jahrbuchs. Derselbe besteht aus einer Einleitung (S. 128-134) und acht Abschnitten: I. die Instrumente des militärischen Aufnehmens, II. die Ele-

mentaroperationen, mit Messtisch, Kippregel und Latte, III. die Aufnahme des Geländes im Bereich einer Messtischstation, IV. geometrische Netzlegung, V. zusammenhängende Aufnahme, VI. Triangulation, Projection der Messtischblätter, VII. das Krokiren, VIII. Construction und Anwendung einiger Messinstrumente, zu deren Benutzung der Offizier unter Umständen genötigt sein kann. — In der neuen Auflage des Werkes ist durchgehend eine Paragrapheneinteilung mit Ueberschrift für jeden einzelnen Paragraphen eingeführt, und es sind die seit der vorigen Auflage getroffenen neuen Bestimmungen berücksichtigt worden; so z. B. haben die 1885 erschienenen Musterblätter für die topographischen Arbeiten der Königlich Preussischen Landesaufnahme das Capitel über die bei Zeichnung von Plänen zur Verwendung kommenden Farben überflüssig gemacht. Lp.

J. Bosscha. Les équations des nouvelles copies du mètre des Archives. Delft Ann. d. l'Éc. Polyt. VII. 51-125; Arch. Néerl. XXV. 156-226.

Vergleichung der von dem internationalen und niederländischen Comité aufgestellten Berichte, die Construction der neuen internationalen Längeneinheit betreffend. Der Verfasser gelangt zu den nachstehenden Schlüssen: Die durch die beiden Comités behufs Vergleichung der neuen Etalons mit dem Mètre des Archives angestellten Versuche stimmen bei Temperaturen zwischen 18,45° und 15,06° gut überein. Die bei tiefen Temperaturen angestellten Versuche des internationalen Comités lassen an Stabilität der Temperatur und Anzahl zu wünschen übrig. Die Differenzen zwischen den durch die beiden Comités erhaltenen Werten liegen innerhalb des Unsicherheitsbereichs. Die Gleichungen, welche von der Generalversammlung im Jahre 1880 angenommen sind, um die Länge des internationalen Meters festzustellen, enthalten einen derartigen Fehler, dass diese Längeneinheit um mehr als $\frac{1}{100000}$ kürzer ist als das Mètre des Archives. Mo.

N. Jadanza. **Influenza della eccentricità dell' alidada sui vernieri ed un microscopio ad ingrandimento costante.** Torino Atti XXVI. 536-540.

Es ergiebt sich, dass der Einfluss der Excentricität der Alhidade auf die Nonienablesungen nicht vernachlässigt werden darf, so dass auch schon deshalb Mikroskope den Nonien vorzuziehen sind. Das vorgeschlagene Mikroskop mit constanter Vergrösserung und ohne Mikrometerapparat soll nun die Einführung der Mikroskope auch für die zu topographischen Zwecken bestimmten Instrumente erleichtern. Bö.

N. Jadanza. **Teorica di alcuni strumenti topografici a riflessione.** Torino Atti. XXVII. 200-209.

Die Theorie des dreiseitigen und des vierseitigen Winkelprismas wird von einem etwas allgemeineren Standpunkte aus, als er sonst in den Lehrbüchern eingenommen wird, elementar behandelt. Bö.

A. Beck. **Ueber ein neues Instrument zur Zeit- und Polhöhenbestimmung.** Astr. Nachr. CXXVI. No. 3024. 385-396.

In diesem Instrument, für welches der Verfasser den Namen „Nadir"-Instrument vorschlägt, steht das Fernrohr lotrecht, mit dem Objectiv nach unten. Unter ihm steht ein Prisma aus Glas, in welchem der Lichtstrahl zweimal total reflectirt wird, ehe er in das Fernrohr gelangt. Das Nähere ist im Aufsatz selbst nachzulesen. Dz.

J. Groll. **Ein Distanzmesser ohne Latte.** Pr. Gymn. Amberg. 17 S. 8°. (1 Fig.-Taf.)

Theorie und Beschreibung eines vom Verf. construirten Distanzmessers ohne Latte, der, wie viele andere dieser Art, auf der Reflexion an zwei an den Endpunkten einer festen Standlinie befindlichen Spiegeln beruht. Verf. erhofft für sein Instrument eine viel grössere Genauigkeit als z. B. für den auf ähnlichen Principien beruhenden Martins'schen Distanzmesser. Ref.

steht dieser Hoffnung, so lange keine Versuche vorliegen, aus guten Gründen sehr misstrauisch gegenüber. Bö.

IG. BISCHOFF. Ermittelung der Gewichte der Unbekannten aus den Normalgleichungen. Jordan Z. f. V. XX. 299-303.

Für Normalgleichungen mit drei Unbekannten drückt der Verf. die Gewichtsverhältnisse $\frac{p_z}{p_x}$, $\frac{p_x}{p_y}$, $\frac{p_y}{p_z}$ direct durch die Coefficienten der Gleichungen einfach aus, und glaubt dadurch in Verbindung mit der aus der Auflösung der Gleichungen nach dem Gauss'schen Algorithmus erhaltenen Kenntnis von p_z eine Vereinfachung der Berechnung dieser Gewichte selbst gegenüber dem üblichen Verfahren zu erreichen. Die Resultate sind indessen nur versteckte und längst bekannte Determinantenbeziehungen. Bö.

EM. CZUBER. Ueber ein Ausgleichungsprincip. Techn. Blätter. XXIII. 1-9.

Der Verfasser bespricht das von J. E. Estienne aufgestellte Ausgleichungsprincip [vergl. F. d. M. XXII. 1890. 1199] und gelangt zu folgendem Resultat:

„Man kann nach dem Vorausgeschickten Estienne's Untersuchung als eine interessante Studie bezeichnen, da sie mit älteren Arbeiten auf dem Gebiete der Fehlertheorie manchen Berührungspunkt hat. Seine Regel der Medianwerte und das daraus gefolgerte Ausgleichungsprincip der kleinsten arithmetischen Summe vermögen aber die Stellung der Regel des arithmetischen Mittels und der Methode der kleinsten Quadrate nicht zu alteriren.“

F. K.

C. M. VON BAUERNFEIND. Neue Formeln zu § 117, Bd. II der 7. Auflage meiner Elemente der Vermessungskunde. Jordan Z. f. V. XX. 161-165.

W. JORDAN. Sphäroidische Coordinatenumformung. Jordan Z. f. V. XX. 213-216.

Für die Uebertragung der s. g. Soldner'schen Coordinaten auf

einen neuen Nullpunkt sind die gewöhnlichen, bis auf Glieder zweiter Ordnung genauen Formeln im allgemeinen nicht mehr ausreichend, wenn die Entfernung des neuen vom alten Nullpunkt eine gewisse Grösse überschreitet. Herr von Bauernfeind entwickelt für diesen Fall aus rein sphärischen Formeln neue Uebertragungsformeln, die noch die Glieder dritter Ordnung enthalten. Besonders bequem sind freilich diese Formeln nicht mehr.

Herr Jordan macht in der zweiten Notiz darauf aufmerksam, dass die rein sphärische Berechnung zur Umwandlung von Coordinaten verschiedener Landesvermessungssysteme mit Ausdehnungen von 100—200 Kilometern im allgemeinen ebenfalls nicht mehr genügt.

Man kann dann aber verschiedene rechtwinklige Systeme auf dem Ellipsoid sehr leicht dadurch in einander umformen, dass man den Umweg über geographische Coordinaten nimmt.

Will man aber die Soldner'schen Formeln für diesen Zweck modificiren, so braucht man nur für die Berechnung der Meridianconvergenz eine kleine sphäroidische Nebenbetrachtung, während sonst nur sphärische Correctionsglieder von der zweiten Ordnung auftreten. Diese Formeln sind viel bequemer und auch genauer als die Bauernfeind'schen und bis zu Entfernungen von 200 Kilometern ausreichend. Bö.

G. Höckner. Ueber die Einschaltung von Punkten in ein durch Coordinaten gegebenes trigonometrisches Netz mit ausgiebiger Verwendung einer Rechenmaschine. Diss. Leipzig. G. Fock. 47 S. 4°.

Diese Arbeit, zu der den Verf. seine Thätigkeit bei der Leipziger Stadtvermessung geführt hat, verfolgt zwei Ziele. Erstens will sie die wichtigsten trigonometrischen Punkteinschaltungen der niedern Geodäsie vereinfachen, indem sie statt der üblichen Auflösungsmethoden solche vorschlägt, die eine möglichst ausgedehnte und vorteilhafte Verwendung der Rechenmaschine gestatten, und zweitens sucht sie gleichzeitig eine theoretische Vervollkommnung der Resultate zu erzielen. Behandelt

werden das Vorwärtseinschneiden, das Rückwärtseinschneiden und die Polygonzugrechnung nebst ihrer Ausgleichung.

Bei dem elementaren und rein praktischen Charakter der Schrift ist natürlich mathematisch Neues oder Bemerkenswertes nicht vorhanden. Bö.

V. Reina. Della compensazione del problema di Hansen. Torino Atti XXVI. 571-579.

Sind zwei unzugängliche Punkte ihrer Lage nach gegeben, und sollen drei weitere Punkte, auf denen jedesmal die vier anderen Punkte sichtbar sind, durch Winkelmessungen auf ihnen bestimmt werden, so entsteht eine Verallgemeinerung der Hansen'schen Aufgabe, die je nach der Anzahl der gemessenen Winkel 1 bis 3 überschüssige Beobachtungen enthält. Verf. führt die dadurch notwendige Ausgleichung in gewöhnlicher Weise für den Fall einer Bedingungsgleichung durch. Bö.

V. Reina. Sull' errore medio dei punti determinati dei problemi di Hansen e di Marek. Torino Atti XXVII. 99-106.

Sind vier Punkte A, B, A', B' gegeben, und können von zwei anderen gegenseitig sichtbaren Punkten P und P' die Winkel

$$APP' = \alpha, \quad BPP' = \beta,$$
$$A'P'P = \alpha', \quad B'P'P = \beta'$$

gemessen werden, so ist die Lage der Punkte P, P' gegen die vier gegebenen bestimmt. Die Pothenot'sche und die Hansen'sche Aufgabe sind Specialfälle dieses allgemeineren, Marek'sches Problem genannten Falles. Verf. untersucht für die Marek'sche bezw. Hansen'sche Aufgabe die Genauigkeit der Bestimmung von P und P', wenn der mittlere Fehler der gemessenen Winkel $\pm\delta$ ist.

Bö.

Em. Czuber. Die Reduction geometrischer Nivellements wegen der Veränderlichkeit der Schwere. Techn. Blätter. XXIII. 86-103, 152-173.

F. R. Helmert. Zur Erklärung der beobachteten Breitenänderungen. Astr. Nachr. CXXVI. No. 3014. 217-223.

Es wird, gestützt auf Untersuchungen, welche Hr. Radau in dem Bulletin astronomique und in den C. R. veröffentlicht hat, angenommen, dass die Hauptträgheitsaxe, welche stets der augenblicklichen Drehungsaxe sehr nahe bleibt, in Folge meteorologischer Einflüsse jährlich sich periodisch verschiebe. Diese Verschiebung hat eine ungefähr dreimal so grosse Aenderung der Drehungsaxe zur Folge, welche mit der kleinen Euler'schen, 10 Monate dauernden Bewegung derselben sich zu einem unregelmässigen, alle 5 Jahre wiederkehrenden Schwanken zusammensetzt, wie an einigen Figuren erläutert wird.

Der Aufsatz schliesst mit einer Aufforderung an die permanente Commission der internationalen Erdmessung, die vorgeschlagenen Beobachtungen von Breitenänderungen in Honolulu recht bald vorzunehmen. (Derselben ist Folge gegeben worden. Der Ref.)

Dz.

F. Folie. Sur les variations de la latitude. Belg. Bull. (3) XXI. 167-178.

Diese Schwankungen können nicht von meteorologischen Ursachen abhängen, vielleicht aber von den gegenwärtigen Ungenauigkeiten der Reductionsformeln der Gestirne.

Mn. (Lp.)

C. M. von Bauernfeind. Das Bayerische Präcisions-Nivellement. Achte Mitteilung. Münch. Abh. XVII$_3$. 357-444.

Enthält nur Messungsergebnisse. Bö.

Weitere Litteratur.

J. Loridan. Voyages des astronomes français à la recherche de la figure de la Terre et ses dimensions. Lille. 290 S. 8°.

Fialkowski. Kurzgefasste praktische Geometrie. Leichtfassliche Anleitung zum Vermessen, Höhemessen und Nivelliren für Ackerbauschulen und andere verwandte Lehranstalten. 2. Aufl. Wien. Pichler's Wittwe und Sohn. VIII + 134 S. gr. 8°. Dazu Ergänzungsheft: Der Messtisch und die Auflösung der wichtigsten Grundaufgaben mit demselben. 24 S. gr. 8°.

Tacchini. Trattato teorico-pratico di topografia moderna. Con 192 figure intercalate nel testo e molte tavole numeriche. 8°.

W. Hergesell. Ueber die Formel von G. G. Stokes zur Berechnung regionaler Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid. Diss. Strassburg. 4°.

Referat F. d. M. XXII. 1890. 1194.

N. Jadanza. Guida al calcolo delle coordinate geodetiche. Torino. E. Loescher. [Rivista di Mat. I. 270.]

P. Sternberg. Ueber die Veränderung der Polhöhe. Arb. d. phys. Section der Kaiserl. Gesellsch. der Freunde der Naturkunde. Moskau. Heft 1. 5-8.

L. Pons. Tables tachéométriques donnant aussi rapidement que la règle logarithmique tous les calculs nécessaires à l'emploi du tachéomètre. Paris.

Friderichsen. Tabellen zur Berechnung der Flächeninhalte, der Terrainbreiten und der Böschungsbreiten der Querprofile bei Wege- und Grabenbauten. Berlin. XV + 218 S. 8°.

Capitel 2.
Astronomie.

R. Wolf. Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. 2. Halbband (S. 385-712). Zürich. F. Schulthess. 1891. gr. 8°.

Wie wir schon in dem Berichte über den ersten Halbband dieses Werkes (F. d. M. XXII. 1890. 54) erwähnt haben, enthält der zweite Halbband (I, Cap. VII-XII) eine „Einleitung in die Astronomie“. Cap. VII macht uns unter dem Titel: „Die ersten Messungen“ (S. 387-404) mit den Elementen der mathematischen Geographie bekannt, wie sie aus der Hypothese folgen, dass sich die scheinbare Himmelskugel in einem Tage gleichförmig um die sogenannte Weltaxe dreht. Das folgende Capitel: „Die Fixsterne und Wandelsterne“ (S. 405-461) behandelt die Sternbilder, die Sonne als Wandelstern, die Zeitbestimmungen, den Mond als Wandelstern, die übrigen Wandelsterne der Alten und Astrologisches. Cap. IX: „Die Erde und ihr Mond“ (S. 462 bis 524) bringt das Wichtigste über die Gestalt der Erde und über Erdmessungen, ferner über die Physik der Erde und Meteorologisches. Nachdem einige Paragraphen der Bedeutung der Parallaxe gewidmet sind, folgt die Theorie des Mondes, die Ebbe und Flut und die Finsternisse. Das nächste Capitel „Das Sonnensystem“ (S. 525-579) beginnt rein historisch mit einer Darstellung der verschiedenen Weltsysteme, knüpft daran die Beweise für die Rotation und Revolution der Erde, die Theorie der Aberration, die Kepler'schen Gesetze und das Newton'sche Gravitationsgesetz und schliesst mit der neueren Theorie der Sonne und des Sonnensystems. Cap. XI schildert unter dem Titel: „Die Welten“ (S. 580-597) die Ausstreuung der Sterne, lehrt die Sternvergleichungen, die Eigenbewegungen der Sterne, die Doppelsterne, Sternhaufen und Nebel und die Organisation des Weltgebäudes. Das Schlusscapitel bringt unter der Ueberschrift: „Die Zeitrechnung“ (S. 598-631) die Theorie des Ka-

lenders. Dass in allen diesen Capiteln das historisch-litterarische Moment besonders betont ist, wurde schon in unserem Berichte über den ersten Halbband hervorgehoben. Die Fülle des hier Gebotenen macht das Werk als Nachschlagebuch besonders wertvoll.

Es folgen nun (S. 633-712) mehrere für Astronomen wichtige Tafeln: I. Reductionstafeln für Längenmasse. II. Arithmetische Tafeln. III. Logarithmische Tafeln. IV. Trigonometrische Tafeln. V. Physikalische Tafeln. VI. Bessel'sche Refractionstafel. VII. Geodätische Tafeln. VIII. Sonnen- und Mondtafeln. IX. Planeten- und Kometen-Tafeln. X. Stern-Tafeln. XI. Kalenderographische Tafeln. XII. Historisch-litterarische Tafel. Die letztere umfasst 16 Seiten und enthält in chronologischer Ordnung die wichtigsten Daten aus der Geschichte der Astronomie und ihrer Hülfswissenschaften zugleich mit Angabe der bedeutenderen litterarischen Erscheinungen. Hierbei ist die neuere Zeit bevorzugt; denn während für die ersten 10 Jahrhunderte n. Chr. nur im ganzen 13 Daten angeführt sind, für die Zeit von 1000-1500 nur 37, folgen im 16. Jahrhundert schon 49, im 19. aber fast 400 Daten. Diese Tafel wird sicherlich vielen sehr willkommen sein, wenn auch über den Wert dessen, was in einer solchen Tabelle Aufnahme finden soll und was fortgelassen werden kann, die Ansichten verschieden sein werden. M.

G. B. Airy. Die Gravitation, eine elementare Erklärung der hauptsächlichsten Störungen im Sonnensystem. Uebersetzt von Rud. Hoffmann. Leipzig. W. Engelmann. XXVII + 176 S. 8°.

Dieses eigenartige, im Jahre 1834 in England erschienene, dann von Littrow übersetzte, aber längst vergriffene Werk liegt hier in neuer Uebersetzung vor. Es ist ein mit voller Sachkenntnis und gründlicher Methode unternommener und wohl gelungener Versuch eines hoch berühmten Astronomen, synthetisch und in geometrischer Form, bei geflissentlicher Vermeidung jeder verwickelten Rechnung, den Leser in die Theorie der Stö-

rungen einzuführen. Der Verfasser stützt sich, was die Beweisart betrifft, hierbei hauptsächlich auf Newton's Principien und die Outlines of Astronomy von Herschel, geht aber, sich andererseits auf das Allgemeine beschränkend, viel weiter vor, so dass nach und nach alle besonders merkwürdigen Störungen unseres Sonnensystems betrachtet und überraschend einfach auf ihre Ursachen zurückgeführt werden.

Eine ausführliche Inhaltsangabe des in neun Abschnitte geteilten Buches ist wohl hier nicht am Platze. Man wird es nicht ohne besondere Befriedigung lesen und auch der Uebersetzung, welche gerade bei einem so originellen Werke nicht leicht sein kann, gern die ihr gebührende Anerkennung zollen.

Dz.

W. FOERSTER. Mitteilungen der Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik. Berlin. F. Dümmler. gr. 8°.

Diese Vereinigung hat sich die Aufgabe gestellt, zu solchen Arbeiten der Astronomie und Physik anzuregen, welche viele, aber leicht anzustellende Beobachtungen verlangen, um so die Astronomen von Fach wesentlich zu unterstützen. Sie zerfällt zunächst in sechs Arbeitsgruppen, welche sich in die Beobachtung der Sonne, des Mondes und der Planeten, des Sternenlichtes und der Milchstrasse, des Zodiakallichtes und der Meteore, des Polarlichtes, Erdmagnetismus, der Wolken- und Gewittererscheinungen teilen.

Dz.

Astronomischer Kalender für 1892. Nach dem Muster des Karl von Littrow'schen Kalenders, herausgegeben von der K. K. Sternwarte. N. F. XI. Jahrgang. Wien. C. Gerold Sohn. 147 S. 8°.

Der astronomische Teil dieses Kalenders enthält die Angaben der Sternzeit und der Zeitgleichung für jeden Tag, Rectascension, Declination, Auf- und Untergang von Sonne und Mond gleichfalls für jeden Tag, Rectascension, Declination und

Culmination der grossen Planeten von 10 zu 10 Tagen, nebst einigen Notizen über Sichtbarkeit und endlich Länge und Breite von Sonne und Mond. In drei Beilagen sind enthalten Nachrichten über neue Planeten und Kometen, dann folgt zweitens eine Uebersicht des Planetensystems und drittens ein Verzeichnis der vorzüglichsten in unseren Breiten sichtbaren Sterne.

Durch die Beschränkung des Stoffes und der Genauigkeit der Angaben, welche nur bis zu Bogenminuten gehen, hat der Kalender eine sehr handliche Form erhalten. Dz.

AGNES M. CLERKE. The system of the stars. London. Longmans, Green, and Co. (1890). [Nature XLIII. 169-172].

Die umfangreiche Anzeige scheidet den Inhalt in zwei Teile: „der eine bietet eine äusserst schätzenswerte Menge von Belehrung, während der andere die Ansichten der Verfasserin über die Arbeit der Jetztzeit giebt. So weit der erste Teil in Betracht kommt, hat Fräulein Clerke ihre Arbeit bewundernswert erledigt. Wir bedauern indes ihretwegen, dass sie sich nicht ganz auf diese Art von Arbeit beschränkt hat". Lp.

J. W. DAVIS. Theoretical astronomy. Dynamics of the Sun. New York.

H. BRUNS. Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. Leipz. Ber. XLIII. 164-227.

Diese Arbeit, durch welche für die Theorie der astronomischen Strahlenbrechung viele neue Gesichtspunkte gewonnen werden, zerfällt in 10 Abschnitte. Im ersten werden die Differentialgleichungen für den Weg eines Lichtstrahls in einem brechenden Medium aus der Bedingung entwickelt, dass die erste Variation des die Zeit ausdrückenden Integrals verschwinden muss. Darauf werden sie unter der Voraussetzung integrirt, dass die Flächenscharen mit constantem Brechungsexponenten concentrische Kugeln seien, deren Mittelpunkt auf der Lotlinie liegt. Die Refraction selbst,

d. h. die gesamte Winkelablenkung des Strahles, wird dann durch ein Integral bestimmt, dessen Weg durch die ganze Atmosphäre hindurchgeht, das aber nicht eher berechnet werden kann, bis die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Höhe als gegeben angenommen wird. Im zweiten Abschnitt wird ausgeführt, dass diese Abhängigkeit gerade das hypothetische Element aller bisherigen Refractionstheorien bilde, insofern die Temperaturabnahme mit der Höhe hineinspielt, über deren Art wir bis jetzt nur wenige und namentlich wenig systematische Beobachtungen haben, so dass stets irgend eine Interpolationsformel zu Grunde gelegt werden musste. Dieses Verfahren erklärt der Verfasser für einen zwecklosen Umweg, der von der Wärme und Dichte der Luft zu ihrer Brechbarkeit in verschiedenen Höhen genommen wird, weil man ebenso auf gut Glück den Brechungsexponenten selbst unmittelbar als Function der Höhe interpolatorisch einführen könne. Dies führt den Verfasser zur Lösung der Aufgabe, Refractionsformeln und -Tafeln aufzustellen, welche erstens auf die Beobachtungen selbst und dann auf tiefere Ueberlegungen gegründet sind, deren Auseinandersetzung den Hauptinhalt dieser Arbeit bildet. Hinterher liesse sich dann wohl durch Umkehrung des Verfahrens ein berechtigter Schluss über die Art der Temperaturabnahme, wenigstens in den tieferen, zur Refraction am meisten beitragenden Luftschichten ziehen.

Die Beobachtungen lehren uns die Refraction als Function der Zenitdistanz oder der Richtung kennen, aber nur am Erdboden, nicht in jeder beliebigen Höhe. Will man sie als Function beider Elemente (Zenitdistanz und Höhe) darstellen, so muss man von dem oben genannten Integral ausgehen und in demselben als untere Grenze die Höhe über dem Erdboden nehmen, für welche die Refraction gelten soll. Da aber die Schichtung der Atmosphäre nach ihrer Brechbarkeit unbekannt ist, so wird von dem Verfasser aus dem analytischen Ausdruck für das Integral eine partielle Differentialgleichung abgeleitet, auf deren linker Seite nur jene beiden Elemente und die Differentialquotienten der Refraction nach ihnen stehen, während die rechte Seite durch den logarithmischen Differentialquotienten des Brechungs-

exponenten nach der Höhe (oder vielmehr nach einer anderen Grösse, die der Verfasser durchgängig für die Höhe setzt) gebildet wird. Diese partielle Differentialgleichung ist der Angelpunkt der nachfolgenden Untersuchungen, da ihr alle „wahren“ Refractionsformeln, wie sie auch sonst sein mögen, genügen müssen. Um aber zu solchen zu gelangen, muss man doch wieder von denjenigen Formeln ausgehen, die mit genügender Schärfe die Refraction am Erdboden nur als Function der Zenitdistanz darstellen. Wenn nun eine derartige Formel mehrere Constanten $a, b, c, \ldots$ enthält, die für den Erdboden bestimmte Werte haben, so ist der Versuch natürlicher Weise gegeben, ob dieselbe Formel für jede beliebige Höhe gelten könne, wenn $a, b, c, \ldots$ mit der Höhe sich ändern. Führt man aber $a, b, c, \ldots$ als unbekannte Functionen der Höhe ein, so giebt die partielle Differentialgleichung die Probe, ob dieser Versuch gelingen kann.

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen über die Eigentümlichkeiten einer solchen Untersuchung wendet sich der Verfasser im vierten Abschnitt zu einem ersten Beispiel, nämlich zu der Refractionsformel von Oppolzer

$$R = a\Phi(b\cos\vartheta),$$

wo a und b zwei Constanten, ϑ die Zenitdistanz, R die Refraction und Φ die Function:

$$\Phi(x) = e^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt$$

bedeuten. Hier zeigt sich, dass aus dieser Formel eine wahre Refractionsformel werden kann, wenn man noch ein Zusatzglied von ähnlicher Form hinzunimmt, in welches aber die Gesamthöhe der Atmosphäre eingeht. Dasselbe ist übrigens, wie nachgewiesen wird, in der Praxis so klein, dass es vernachlässigt werden kann. Im fünften Abschnitt nimmt der Verfasser als Ausgangsformel eine Reihe von Partialbrüchen an, von der Form:

$$R = \sum_a \frac{1}{a_a.\operatorname{cotg}\vartheta + b_a}.$$

Auch hier gelingt der Versuch, diese Formel unter der Voraussetzung, dass a_a und b_a Functionen der Höhe seien, zu einer

wahren Refractionsformel zu machen. Der sechste Abschnitt enthält Vergleichungen der Bessel'schen und Gyldén'schen Tafeln, sowohl mit der ursprünglichen Partialbruchformel, als auch mit der neuen, welche durch den eben genannten Process eine etwas abweichende Gestalt erhalten hat. Dabei wird zunächst nur ein einziger Partialbruch angenommen, und erst später, im siebenten Abschnitt, die Untersuchung auf zwei ausgedehnt. Es zeigt sich, dass dann die Formel bereits biegsam genug geworden ist, um allen Ansprüchen, die man heute stellen kann, zu genügen. Hierbei bemerkt der Verfasser, dass die Theorien der Strahlenbrechung erst dort ihre wahre Bedeutung gewinnen, wo die astronomischen Beobachtungen heute (wenn es irgend angeht) Halt machen, nämlich bei nur wenig gegen den Horizont geneigten Strahlen. Der achte Abschnitt führt den schon früher geäusserten Gedanken durch, aus dem Verhalten der Refraction auf die Brechbarkeit der Luft, damit dann auf ihre Dichtigkeit und damit endlich auf die Temperaturabnahme mit der Höhe zu schliessen. Die Formeln werden entwickelt und auf das vorher benutzte Material angewandt. Der Hauptschwerpunkt der Ergebnisse wird wohl durch den Satz dargestellt: Der Erfolg (nämlich in Bezug auf unsere Kenntnis der Temperaturabnahme) wird von der benutzten Formel (nämlich der Refractionsformel) nur in untergeordneter Weise, wesentlich dagegen von der Beschaffenheit des Beobachtungsmaterials beeinflusst. Aber dieses müsste noch bedeutend vervollständigt werden, namentlich durch systematische Beobachtungen an den oben genannten Strahlen, wenn „die Theorie der Refraction als Gegenstand der Geophysik“ behandelt werden sollte.

Der neunte Abschnitt enthält hauptsächlich analytische Entwickelungen, welche sich an früher gebrauchte Formeln anschliessen. Im zehnten endlich wird untersucht, wie Abweichungen der Flächen gleicher Dichte und also gleicher Brechbarkeit der Atmosphäre von der angenommenen Kugelgestalt auf die Refraction wirken. Unter der Annahme, dass das Verhältnis der Hauptkrümmungen irgendwo von der Einheit sich so weit entfernt, als es die Erdabplattung im Maximum mit sich bringen

kann, ergiebt sich, dass der Einfluss der Abweichungen von der sphärischen Schichtung auf die normale Componente der Refraction völlig unmerklich ist. Daher müssen die thatsächlich vorhandenen Refractionsanomalien durch eine Art Schlierenbildung in der Luft, welche sich ja auch im Sternfunkeln kundgiebt, oder durch eine Veränderlichkeit der Schichtung in ihr mit dem Wetter und der Jahreszeit, oder endlich durch noch unbekannte Ursachen erklärt werden. Dz.

F. Hausdorff. Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. Leipz. Ber. XLIII. 481-566.

Diese Arbeit schliesst sich an die vorige auf das engste an. Dort wurde das Refractionsproblem von einem neuen Standpunkt aus betrachtet, weil die Form des Ausdrucks für die Refraction und nicht die Schichtung der Luft als hypothetisches Element eingeführt wird. Hier werden sowohl die alten, von Bruns angezogenen, als auch neue Formen abgehandelt; die Partialbruchformel wird nicht in Gestalt zweier einfachen Partialbrüche, sondern sofort in der Form angenommen, wie sie sich durch Zusammenziehung zu einem Bruch und durch die Bruns'sche Umformung umgewandelt hat. Dabei tritt als fünfter Parameter die Höhe der ganzen Atmosphäre auf, während aus besonderen Gründen zwischen den vier anderen Parametern eine schon von Bruns aufgestellte Gleichung angenommen wird. Es bleiben also noch vier Parameter zur Verfügung, und die Versuche des Verfassers beziehen sich auf einen möglichst guten Anschluss an das Beobachtungsmaterial. Dann kommt zweitens die Kramp'sche Function

$$\varphi(x) = e^{x^2}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$$

an die Reihe, aber mit der erweiternden Bedingung, dass die Refractionsformel eine Summe von zwei oder mehreren solchen Ausdrücken sein könne. Drittens bespricht der Verfasser diejenigen Formen, welche aus einer Potenzreihe mit einer endlichen Zahl von Gliedern entspringen, und reiht daran einige Bemerkun-

gen über noch andere Bildungen, die bei der Aufstellung einer Refractionsformel verwendet werden könnten. Den Schluss der Arbeit, welche nur den ersten Teil des in der Einleitung auseinandergesetzten Programms behandelt, bilden Betrachtungen über die Abhängigkeit der Temperatur von der Höhe, wie sie aus den vorangegangenen Formeln nach der Bruns'schen Methode folgt. Dz.

A. Donner. Formel und Tafeln zur Berechnung von Zeitbestimmungen durch Höhen in der Nähe des ersten Verticals. Acta Soc. Fennicae (Helsingfors) XVII. 441-464.

Die Beachtung der Gleichförmigkeit, mit welcher die Zenitdistanz sich in der Nähe des ersten Verticals ändert, hat den Verf. zu dem Versuche veranlasst, die Aenderung des Stundenwinkels beim Durchgange durch den ersten Vertical in eine schnell convergirende Potenzreihe nach der Aenderung der Zenitdistanz zu entwickeln. Die Rechnung giebt eine Reihe, deren Anwendung ebenso bequem scheint, wie die der endlichen Formel, und die ausserdem einige Vorteile einschliesst. In der Reihe kommt das Glied der zweiten Ordnung nicht vor; diejenigen der ersten und dritten hängen nur von der Polhöhe ab, und für die Glieder der Ordnungen 4, 5, 6 hat der Verf. von 0° bis 60° Polhöhe Tafeln construirt. Bdn.

F. Gonnessiat. Recherches sur l'équation personnelle dans les observations de passages. Assoc. Franç. Marseille. XX. 259-269.

Das Gesetz des zufälligen Fehlers einer Durchgangsbeobachtung hängt von der Geschwindigkeit des Sterns und von der Beschaffenheit des Bildes ab. Bei der Methode „Auge und Ohr“ hat dieses Gesetz den Ausdruck

$$\varepsilon^2 = [a^2 + b^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta + c^2 \sec^2 \delta] e^{d \operatorname{tang} z},$$

wo a, b, c, d Constanten sind, δ die Declination, z die Zenitdistanz, e die Basis der natürlichen Logarithmen. Bei der elek-

trischen Methode ist das zweite Glied innerhalb der Klammer zu ersetzen durch $b'^2 \sin^4 \frac{1}{2}\delta$. Die Discussion dieser Formel, besonders ihres Einflusses auf die Auffindung der Decimalen, nimmt den grösseren Teil der Note ein. Lp.

Th. Wand. Ueber die Integration der Differentialgleichungen, welche die Bewegungen eines Systems von Punkten bestimmen. Astr. Nachr. CXXVI. No. 3009. 129-138; CXXVII. No. 3046. 353-360; CXXX. No. 3117. 377-390.

Diese drei Aufsätze enthalten hauptsächlich Umformungen der Differentialgleichungen in die Jacobi'sche kanonische Form:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial p_i}$$

nebst den zugehörigen Entwickelungen, wie sie von Lagrange, Poisson etc. eingeführt worden sind. Im ersten Aufsatz giebt der Verfasser ausserdem ein System kanonischer Elemente einer Planetenbahn und später eine Methode, aus einer angenäherten Lösung mittels solcher Umformungen verbesserte Integrale der Differentialgleichungen abzuleiten, welche dann auf die Bewegung von Knoten und Perigaeum des Mondes angewandt wird. Im zweiten Aufsatz wird eine Entwickelung nach Potenzen der unabhängigen Veränderlichen (der Zeit) angezogen und gezeigt, wie die Coefficienten durch einen Algorithmus nach einander zu finden sind. Dann wird eine Anwendung auf die säculare Beschleunigung der Mondbewegung gemacht, um sie als Function der säcularen Abnahme der Excentricität der Erdbahn zu erhalten. Der dritte Aufsatz behandelt hauptsächlich die Darstellung der Coordinaten in trigonometrisch-Fourier'scher Form. Die Behauptung am Schlusse über die Möglichkeit einer solchen Darstellung ist aber doch nur sehr schwach gestützt und hat bloss rein formale Bedeutung, da alle Convergenzbetrachtungen ausgelassen sind.

Die Ausführungen des Verfassers wären ungleich übersichtlicher geworden, wenn er das sonst allgemein gebrauchte Zeichen (a, b) benutzt hätte und etwas weniger sparsam bei der Erklärung von Bezeichnungen gewesen wäre. Dz.

R. Lehmann-Filhés. Ueber zwei Fälle des Vielkörperproblems. Astr. Nachr. CXXVII. No. 3033. 137-144.

Die von Lagrange behandelten Fälle, in welchen das Dreikörperproblem streng lösbar wird, werden hier auf mehr als drei Massenpunkte verallgemeinert. Dem Fall, dass die drei Punkte stets zu einem gleichseitigen Dreieck zusammenstehen, entspricht hier die Annahme, dass die vier Massenpunkte während der ganzen Bewegung die vier Ecken eines regulär bleibenden Tetraeders bilden. Der Verfasser findet, dass im Gegensatz zum Falle des gleichseitigen Dreiecks hier nur geradlinige Bewegungen in Bezug auf den Schwerpunkt möglich sind, bei welchen alle Massenpunkte auf diesen zu (oder von ihm fort) rücken. Der zweite Fall dagegen, in welchem drei Punkte in einer geraden Linie stehen und stets dieselben Abstandsverhältnisse beibehalten, lässt sich ohne jede Einschränkung auf n in gerader Linie liegende Massenpunkte übertragen. Der Verfasser beweist, dass die Bedingungsgleichungen für die gegenseitigen Entfernungen immer reelle Lösungen besitzen, welche Werte die Massen auch haben, und in welcher Reihenfolge die Punkte auch auf der geraden Linie geordnet seien. Werden die Punkte diesen Bedingungen entsprechend aufgestellt, und mit parallelen Geschwindigkeiten versehen, welche proportional den Abständen vom Schwerpunkt anzunehmen sind, so bleiben die Punkte stets in einer geraden Linie und beschreiben um den Schwerpunkt als Brennpunkt Kegelschnitte. Dz.

W. J. Hussey. On the partial derivatives of the potential function in the problem of n bodies. Annals of Math. VI. 12-13.

Für die Sätze von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes und von der Erhaltung der Flächen bei dem n-Körperproblem wird genau derselbe Beweis gegeben, welcher sich in Kirchhoff's Mechanik, vierte Vorlesung § 3 und § 5, findet.

St.

A. G. Greenhill. Stability of orbits. Lond. M. S. Proc. XXII. 264-305.

Die Bahn eines Punktes, welcher der Anziehung durch eine Centralkraft K unterworfen ist, kann bei gehöriger Bestimmung der Geschwindigkeit kreisförmig werden, nach welchem Gesetz auch die Kraft mit der Entfernung variirt. Diese Kreisbahn ist aber in einigen Fällen stabil, in anderen nicht stabil. Newton hat z. B. bewiesen, dass unter Voraussetzung der Form $K = \frac{C}{r^m}$ nur Stabilität eintreten kann, wenn $m < 3$. Der Verfasser nun ermittelt für die Fälle $m = 3, 5;\ 4, 7, 6;\ 9, 8, 11$ mit Hülfe elliptischer Functionen und Integrale die Art, wie der Körper in spiralischen Windungen in die Unendlichkeit geht, oder dem Kraftcentrum sich mehr und mehr nähert, je nachdem der Impuls, welcher ursprünglich den Körper aus der Kreisbahn getrieben, nach aussen oder innen gerichtet war.

Nachher untersucht der Verfasser auch die Bahnen in Bezug auf ihre Stabilität, wenn zwei Kraftcentra vorhanden sind, kommt dann durch Zusammenrücken der beiden Centren auf magnetische Kraftpotentiale und deren Verbindung mit Einzelkräften zu sprechen und behandelt endlich die Bewegungen im Kreise einer Kreisschar und der zugehörigen Orthogonalschar und ähnliche Abarten des allgemeinen Problems. Dz.

H. Gyldén. Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes. Acta Math. XV. 65-190.

Nach einer Einleitung, in welcher der Verfasser über seine früheren Arbeiten und über die Schwierigkeiten, welche trotz derselben der genauen Erforschung der Stabilität der Bewegung noch entgegen stehen, sich auslässt, kommt er auf das eigentliche Thema, nämlich auf die Integration der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + (1-\beta_1)\varrho - \beta_2\varrho^3$$
$$= -\gamma_1 \cdot \cos[(1-\sigma_1)v - B_1] - \gamma_2\cos[(1-\sigma_2)v - B_2] - \cdots,$$

welche nach Weglassung vieler anderen Glieder aus dem Störungsproblem abgesondert werden kann. Vorausgesetzt wird dabei, dass $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ kleine Grössen seien.

Zur Lösung dieser Gleichung wendet der Verfasser Methoden an, die aus seinen früheren Arbeiten bekannt sind. So wird erst das Glied $-\beta_2\varrho^3$ fortgelassen, worauf die Gleichung ohne Mühe vollständig integrirt werden kann; dann wird (unter vorläufiger Annahme, dass rechts nur ein Störungsglied $-\gamma\cos[(1-\sigma)v-B]$ steht), ϱ in zwei Bestandteile ϱ_0 und R zerlegt, von denen ersterer dieselbe Form hat, wie ϱ selbst in der eben genannten Lösung. Dabei werden aber noch einige Constanten eingeführt, die dann so bestimmt werden, dass in R einige Glieder verschwinden. Dann wird abermals eine Auswahl getroffen, derart, dass von den Gliedern der Gleichung nur die „kritischen" stehen bleiben. Hierauf wird ϱ abermals in zwei Teile gespalten und, dem entsprechend, auch die Differentialgleichung u. s. w. Endlich werden Reihenentwickelungen angesetzt, von denen der Verfasser meint, dass sie convergiren.

Damit ist der erste Teil der Arbeit vollendet. Im zweiten Teil werden von vorn herein elliptische Functionen eingeführt, nachdem die Differentialgleichung durch neue Substitutionen auf die Form

$$\frac{d^2z}{dv^2} + az + bz^2 + cz^3 = W$$

gebracht worden, wo die rechte Seite wieder der rechten Seite der vorigen Gleichung entspricht. Wird zunächst 0 an die Stelle von W gesetzt, so integrirt sich die Gleichung ohne weiteres durch elliptische Functionen. Mit diesen wird nun weiter operirt. In zwei weiteren Abschnitten werden noch zwei andere Methoden zur Lösung des Problems entwickelt, die ebenfalls auf der Anwendung elliptischer Functionen beruhen.

Die Behandlung des Problems ist meist nur in grossen Zügen gegeben, und auch die Convergenzbetrachtungen sind sehr allgemein und nicht durchschlagend. Völlig streng und einwandsfrei sind auch die hier eingeschlagenen Methoden (trotz ihrer Reichhaltigkeit) ebenso wenig, wie die vielen anderen, welche

sonst von den Astronomen zur Feststellung der Bewegungen nach dem Newton'schen Gesetz ersonnen sind. Dz.

K. Bohlin. Till frågan om sekulära störningar. Stockh. Akad. Bihang. XVI_1. No. 12. 19 S.

Ein Beitrag zur Theorie der „säcularen Störungen von der Ordnung Null“. Unter Voraussetzung, dass nur zwei Massen sich um einen Centralkörper in einer Ebene bewegen, wird untersucht, welchen Einfluss die in dem „säcularen Teile“ der Störungsfunction vorkommenden Glieder ausüben, welche in den Excentricitäten von höherem Grade als dem zweiten sind. Bei Berücksichtigung der Glieder bis zu einem beliebigen Grade $2n$ führen in der That die betreffenden Differentialgleichungen zu gewissen Abel'schen Functionen. Wenn man nach der Methode von Lagrange $n = 1$ nimmt, bekommt man bekanntlich trigonometrische und algebraische Functionen. Aber $n = 2$ resp. 3 giebt, wie der Verf. mit Hülfe des bekannten Zeuthen'schen Correspondenzsatzes zeigt, wenigstens im allgemeinen Abel'sche Functionen vom Geschlechte 1 resp. 4. Bdn.

K. G. Olsson. Ueber die absolute Lösung des Dreikörperproblems. Progr. Gymn. Nyköping. 8 S.

Nähere Untersuchung gewisser Glieder, welche in den Reihenentwickelungen der Gyldén'schen Störungstheorie vorkommen.
Bdn.

H. Poincaré. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice. C. R. CXII. 269-273.

Entwickelt man die Störungsfunction in der bekannten Form:

$$R = \Sigma A_{m_1, m_2} e^{(m_1 l + m_2 l')\sqrt{-1}},$$

wo l und l' die mittleren Längen beider in Betracht kommenden Planeten bezeichnen, so kommt es vor, dass ein Glied von sehr hoher Ordnung, dessen Coefficient A_{m_1, m_2} also sehr klein ist, trotzdem hohe Bedeutung gewinnt, weil bei der doppelten Inte-

gration in dem Ausdruck für die Länge dieser Coefficient durch das Quadrat eines Nenners dividirt wird, der zufällig sehr klein werden kann. Es handelt sich darum, einen solchen Coefficienten selbständig zu berechnen, ohne auf die übrigen zahlreichen anderen derselben oder niederer Ordnung, bei welchen dieser Umstand nicht obwaltet, zurückzugreifen. Hierzu hat der Astronom Flammarion eine Methode erdacht, die sich auf die Darboux'schen Untersuchungen über die Functionen sehr grosser Zahlen stützt.

Der Verfasser beabsichtigt, diese Methode folgendermassen zu vereinfachen. Man setze:

$$m_1 = an + b, \quad m_2 = cn + d,$$

wo n, a, b, c, d ganze Zahlen sind, und betrachte alle Glieder von R, für welche a, b, c, d dieselben Werte haben, als einen Complex, den der Verfasser durch die Substitution:

$$e^{l\sqrt{-1}} = t^c, \quad e^{l'\sqrt{-1}} = t^{-a} \,.\, z^{\frac{1}{c}}$$

auf die Form:

$$\Sigma A_{m_1, m_2} e^{m_1 l + m_2 l'} = t^{bc-ad} \times \Sigma A_{m_1, m_2} z^n \,.\, z^{\frac{d}{c}}$$

bringt. Nimmt man also wieder alle Glieder in R zusammen, so ist in der Function

$$R \,.\, t^{ad-bc} \,.\, z^{\frac{c}{d}}$$

jener Complex der von t unabhängige Teil:

$$\Sigma A_{m_1, m_2} \,.\, z^n,$$

der in Folge dessen durch die bekannte Formel bestimmt wird:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi i} \int \varphi(t) \frac{dt}{t},$$

wo der Integrationsweg als ein um den Nullpunkt als Mittelpunkt beschriebener Kreis vorausgesetzt wird.

Der Verfasser skizzirt nun weiter, wie die einzelnen Coefficienten A_{m_1, m_2} durch die singulären Stellen der Function R unter Zuhülfenahme excentrischer Anomalien bestimmt werden, und fordert die Astronomen auf, seine Methode praktisch zu verwerten. Schliesslich kommt der Verfassser auf den Fall völliger Commensurabilität der Umlaufszeiten zu sprechen und auf die Glieder, welche aus diesem Grunde „zufällig" säcular werden.

Er merkt an, was übrigens längst bekannt ist, dass die Differenz der beiden Störungsfunctionen, welche der wechselseitigen Einwirkung zweier Planeten entsprechen, solche Glieder nicht enthalten kann. Dz.

A. Hall. The secular perturbations of the Earth produced by the action of the Mars. Astronomical Journal. 1891. No. 244. 25-28.

Der Astronom G. W. Hill hat den Vorschlag gemacht, die säcularen Störungen der Erde durch Mars mittels der Gauss'schen Methode zu berechnen, da die gewöhnlichen, nach Potenzen der Excentricitäten und Neigungen fortschreitenden Reihen zu langsam convergiren. Diese Methode wird so angewandt, dass nach den Formeln, welche Gauss in der berühmten Abhandlung „Determinatio attractionis etc." entwickelt hat, der störende Planet durch einen Ring ersetzt wird, dessen Anziehung auf einen äusseren Punkt durch elliptische Integrale in aller Strenge ausgerechnet werden kann. Dies geschieht hier für 12 Punkte der Erdbahn, deren excentrische Anomalien 0°, 30°, 60° u. s. w. sind, worauf die restirende Integration über die ganze Erdbahn mit grosser Genauigkeit durch eine mechanische Quadratur ersetzt wird. Die numerischen Resultate werden mit den durch Reihenentwickelungen gefundenen verglichen, wobei eine hinreichende Uebereinstimmung zu Tage tritt.

Dz.

T. A. Innes. Secular perturbations of the earth orbit by Mars. Monthly Notices. LII. 80-87.

Der Verfasser behandelt dieselbe Aufgabe in derselben Weise, wie der vorher genannte. Seine numerischen Werte sind sämtlich grösser, als die von Hrn. Hall; vermutlich hat er für die Masse des Mars einen etwas grösseren Wert angenommen.

Dz.

A. Weiler. Die allgemeinen Störungen der inneren Planeten. Astr. Nachr. CXXVIII. No. 3052-53. 49-108.

A. Weiler. Die allgemeinen Störungen der äusseren Planeten. Ibid. No. 3063. 257-292.

Die besondere Eigentümlichkeit der vom Verfasser aufgestellten Störungstheorie besteht darin, dass er nicht alle sechs Bahnelemente variirt, sondern die Excentricität und die Epoche constant lässt. Dies ist ein Zurückgehen auf die Anfänge der Theorie, da Lagrange zuerst auch nur einige Elemente als veränderlich eingeführt hatte. Bekanntlich waren die ersten Entwickelungen jenes grossen Mathematikers auf diesem von ihm erschlossenen Gebiet nicht fehlerlos und auch der Form nach nicht so vollendet, wie seine spätere erschöpfende Darstellung.

Wenn man den Begriff „Bahnelement" so fasst, wie er allgemein angenommen wird, dann sind die Bahnelemente in der hier vorgetragenen Form keine eigentlichen Bahnelemente mehr, denn selbstverständlich sind Excentricität und Epoche den Störungen ebenso unterworfen, wie grosse Axe, Neigung u. s. w. Jene Grössen sind also hier in einem ganz anderen Sinne zu nehmen und werden daher auch durch andere Gleichungen bestimmt. Der grosse Vorzug, den nach der Meinung des Verfassers diese Neuerung für die Behandlung des Störungsproblems bieten soll, ist dem Referenten verborgen geblieben. „Ueberzählige" Integrationsconstanten giebt es bei allen Entwickelungen nach Potenzen der Massen, und die vom Verfasser benutzten Mittel, die entstandenen Ausdrücke in rein trigonometrische Form zu bringen, sind lange Jahrzehnte im Gebrauch gewesen und erweisen sich zudem vor der schärferen Kritik der Neuzeit als recht zweifelhaft und angreifbar. Wenn es aber darauf abgesehen ist, die Zahl der Veränderlichen zu beschränken, dann könnte man wohl am besten bei den drei Coordinaten x, y, z stehen bleiben.

Wegen der Anpassung der allgemeinen vom Verfasser auseinandergesetzten Methoden auf die beiden in der Ueberschrift genannten Fälle muss der Leser auf die Abhandlungen selbst verwiesen werden. Dz.

V. Wellmann. Tafeln zur Berechnung der Störungsfunctionen der kleinen Planeten. Astr. Nachr. CXXVII. No. 3040. 257-266.

In der Gyldén'schen Theorie der absoluten Störungen kommen Coefficienten vor, die nur von dem Verhältnis der Axen $\left(\alpha = \frac{a}{a'}\right)$ abhängen und durch die Integrale:

$$\beta_n^{(s)} = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi . d\varphi}{(1-\alpha^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}s}}$$

bestimmt werden. Die Tafeln des Verfassers beziehen sich auf die Reihenentwickelungen dieser Coefficienten und auf Differenzenformeln, um von einem Wert der Grösse α bequem zu einem anderen übergehen zu können. Dz.

W. Fabritius. Ueber eine leichte Methode der Bahnbestimmung mit Zugrundelegung des Princips von Gibbs. Astr. Nachr. CXXVIII. 225-228.

W. Fabritius. Weitere Anwendungen des Gibbs'schen Princips. Ibid. 321-328.

Herr Prof. Gibbs hat Formeln aufgestellt, welche die Verhältnisse der drei Dreiecksflächen bis zur vierten Potenz der Zwischenzeiten genau ergeben, ausgedrückt ausserdem nur noch durch die Entfernungen der drei Planetenorte von der Sonne. Hierauf gründet der Verfasser eine Bahnbestimmung, von deren Einfachheit er sich durch Anwendungen überzeugt hat. Namentlich zeigt sich der Vorzug derselben, wenn die Zwischenzeiten recht beträchtlich sind, so gross, dass die übrigen Methoden bereits versagen. In der zweiten Abhandlung wird die Bahnberechnung aus vier vollständigen Beobachtungen, ferner die parabolische Bahn besprochen. Dz.

W. Láska. Zur Berechnung der absoluten Störungen. Prag. Ber. 1891. 147-153.

Der Aufsatz enthält einige Umformungen der Differential-

gleichungen des Störungsproblems, welche, im Grunde genommen, auf folgender Betrachtung beruhen. Die Differentialgleichungen seien:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2\frac{x}{r^3}=\frac{\partial\Omega}{\partial x},\quad \frac{d^2y}{dt^2}+k^2\frac{y}{r^3}=\frac{\partial\Omega}{\partial y},\quad \frac{d^2z}{dt^2}+k^2\frac{z}{r^3}=\frac{\partial\Omega}{\partial z},$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Dann werden in der gewöhnlichen Theorie erst die Gleichungen gelöst $\frac{d^2(x)}{dt^2}+\frac{k^2(x)}{(r)^3}=0, \ldots,$

$$(r)=\sqrt{(x)^2+(y)^2+(z)^2}.$$

Der Verfasser aber führt an Stelle dieser ungestörten Coordinaten andere ein, die ein Mittelding zwischen diesen und den wahren des Problems sind, indem er an Stelle der oben genannten Gleichungen die folgenden setzt:

$$\frac{d^2(x)}{dt^2}+\frac{k^2(x)}{r^3}=0 \text{ u. s. w.},$$

wo zwar (x), (y), (z), so zu sagen, ungestörte Coordinaten sein sollen, aber r der wahre Radiusvector ist. Diese eigentümliche Einführung in Verbindung mit anderen Reductionen giebt zwar auch die Lösung des Problems im Sinne der Störungstheorie, ob aber daraus irgend ein Nutzen entspringt, ist nicht ersichtlich. Dieser soll erst in einer späteren Mitteilung zu Tage treten, wo die Theorie auf praktische Probleme angewandt wird.

Dz.

W. Láska. Ueber die Verbesserung der Bahnelemente. Prag. Ber. 1891. 382-388.

Es handelt sich um die Verbesserung der Bahnelemente eines Planeten, wenn nur wenige, zumeist zwei, Einzelbeobachtungen neu hinzukommen. Das Verfahren, welches der Verfasser vorschlägt, besteht, im Grunde genommen, darin, die alten Beobachtungen in der Hauptsache zu eliminiren und dafür die neuen zu setzen. Ein Ausgleich zwischen allen Beobachtungen wird also damit keineswegs erreicht, und es ist daher nicht abzusehen, wie auf diesem Wege die Bahnelemente verbessert werden sollen.

Dz.

F. TISSERAND. Sur l'inégalité à longue période due à l'action de Vénus et dépendant de l'argument: $l+16l'-18l''$. C. R. CXIII. 5-9.

In diesem Argumente bedeuten l, l', l'' die mittleren Anomalien des Mondes, der Erde und der Venus. Die genannte, von Hansen entdeckte, Ungleichung wächst trotz ihrer hohen Ordnung des kleinen Integrationsnenners wegen nach Delaunay bis auf 16″ an. Der Verfasser weist nach, dass durch Berücksichtigung der vierten Potenz der Neigung der Venusbahn dieser Wert um 1,64″ vermindert wird. Das Nähere ist im Aufsatz selbst zu finden. Dz.

J. PERCHOT. Sur les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons. C. R. CXIII. 683-685.

Die Differentialgleichungen für die säcularen Störungen werden in der Jacobi'schen Normalform aufgestellt. Einige Bemerkungen, denen die Poincaré'schen Arbeiten auf diesem Gebiet zu Grunde liegen, gelten der Stabilität der Bewegung, insbesondere in der Hinsicht, dass die Excentricitäten und Neigungen klein bleiben. Dann werden einige Sätze angefügt über eigene Untersuchungen des Verfassers, welche den ernsten Bedenken, die Hr. Poincaré und andere wegen der landläufigen Entwickelungen der Astronomie über die säcularen Störungen ausgesprochen haben, nicht ausgesetzt sein sollen. Dz.

A. SAPORETTI. Terzo e quarto metodo analitico dell'equazione (astronomica) del tempo e discussione degli altri due metodi analitici con il metodo sintetico degli astronomi antichi e moderni. Bologna Mem. (5) I. 321-336.

Der Hauptinhalt dieser Abhandlung besteht in fünf verschiedenen Ableitungen der Kepler'schen Gleichung

$$M = E - e \sin E,$$

von denen die erste hauptsächlich synthetisch, die anderen rein analytisch sind. Zuletzt werden die Formeln zusammengestellt,

die nach Lösung dieser Gleichung die Zeitgleichung bestimmen, wegen deren analytischer Darstellung der Leser auf Lehrbücher der theoretischen Astronomie verwiesen wird. Dz.

E. Weyer. Ueber die Bahnen der Planetenmonde in Bezug auf die Sonne. Astr. Nachr. CXXVI. No. 3007. 96-108.

E. Weyer. Einige nachträgliche Bemerkungen hierzu. Ibid. CXXVII. No. 3033. 143-148.

Es wird angenommen, dass sowohl der Planet um die Sonne, als auch der Mond um den Planeten in einem Kreise laufe. Dann sind die in der Ueberschrift genannten Bahnen einfache Epicykelbahnen, bei deren Untersuchung sich herausstellt, dass sie Wendepunkte oder Doppelpunkte haben können. Bei numerischer Berechnung, welche an sämtlichen 20 Monden unseres Planetensystems durchgeführt wird, zeigt sich, dass nur unser Mond der Sonne stets die concave Seite seiner heliocentrischen Bahn zukehrt, während in 13 Fällen Wendepunkte (wie sie fälschlich oft auch für die Mondbahn gezeichnet werden) und in den übrigen 6 sogar Doppelpunkte auftreten.

Geschichtliche Notizen geben einen Ueberblick über Irrtümer, in welche selbst hervorragende Astronomen (Kepler, Mädler) bei ihren Vorstellungen von der Mondbahn um die Sonne verfallen sind. Dz.

F. Folie. Sur les formules correctes du mouvement de rotation de la terre. Belg. Bull. (3) XXII. 460-470.

In der Theorie müssen die Formeln der Präcession und der Nutation auf die Hauptaxen bezogen werden, nicht auf die augenblickliche Rotationsaxe der Erde; in der Praxis müssen die Beobachtungen im geographischen Meridian und nicht in dem augenblicklichen Meridian gemacht werden. Die von den Sternen beschriebenen Parallelkreise sind zur augenblicklichen Axe senkrecht, aber die Correction, welche dies nach sich zieht, ist bedeutungslos. Mn. (Lp.)

E. Weiss. Ueber die Berechnung einer Kometenbahn mit Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung. Wien. Ber. C. 1132-1150.

Unter Gliedern höherer Ordnung werden hier solche verstanden, die von der höheren als der zweiten Potenz in Bezug auf die Zeit sind. Im Anschluss an frühere Untersuchungen des Verfassers, ferner an Arbeiten von Fabritius und Gibbs wird gezeigt, wie man in dem Verhältnisse der Dreiecksflächen, auf welche es bekanntlich ankommt, die Zeit bis zur vierten Potenz einschliesslich berücksichtigen kann, schon bei einer ersten Bahnbestimmung, wo nur drei vollständige Beobachtungen benutzt werden und in erster Annäherung die Bahn parabolisch angenommen wird. Sind t_1, t_2, t_3 die drei Zeiten der Beobachtungen, r_1, r_2, r_3 die drei zugehörigen Entfernungen des Kometen von der Sonne, K die Gauss'sche Constante, so ergeben sich die Formeln für die Verhältnisse der Dreiecksflächen, auf welche der Verfasser sich stützt:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}\cdot\frac{1+\mu_1 r_1^{-3}}{1+\mu_2 r_2^{-3}}, \quad \frac{n_3}{n_2} = \frac{\theta_3}{\theta_2}\cdot\frac{1-\mu_3 r_3^{-3}}{1+\mu_2 r_2^{-3}},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\theta_1 = K(t_3-t_2), \quad \theta_2 = K(t_3-t_1), \quad \theta_3 = K(t_2-t_1),$$
$$\mu_1 = \tfrac{1}{12}(\theta_2.\theta_3-\theta_1^2), \quad \mu_2 = \tfrac{1}{12}(\theta_1.\theta_3+\theta_2^2), \quad \mu_3 = \tfrac{1}{12}(\theta_1.\theta_2-\theta_3^2).$$

Dz.

M. Rajna. Sul metodo grafico nel calcolo delle eclissi solari. Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 613-623.

Um eine vorläufige Ermittelung des Verlaufes einer Sonnenfinsternis zu erhalten, werden gewöhnlich graphische Methoden, welche sich auf Projectionen gründen, angewandt. Diese Methoden sollen hier so verbessert werden, dass die langwierigen Ausrechnungen der Elemente einer Finsternis erheblich abgekürzt werden könnten. Dz.

G. Jaeger. Folgerungen aus den Eigenbewegungen der Fixsterne. Monatsh. f. Math. II. 1-22.

Von der Voraussetzung ausgehend, dass die Geschwindigkeiten der Fixsterne und ihre Bewegungsrichtungen im Raume gleichmässig verteilt seien, dass also die Summe aller Geschwindigkeiten, nach irgend einer Richtung gemessen, verschwinde, gewinnt der Verfasser den Ansatz zur Berechnung der Geschwindigkeit unserer Sonne, wenn die relativen Geschwindigkeiten einer grossen Zahl von Fixsternen in der Sehlinie durch Spectralanalyse bestimmt sind. Die Rechnung wird unter Zugrundelegung einer 49 Sterngeschwindigkeiten enthaltenden Tabelle ausgeführt und eine Sonnengeschwindigkeit von 32 Kilometern in der Secunde abgeleitet, welche gegen $Ar = 307°$, $D = 55°$ gerichtet ist. Hieraus ergiebt sich rückwärts eine mittlere Sterngeschwindigkeit von 42 Kilometern.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Wahrscheinlichkeit der Annäherung und des Zusammenstossens der Fixsterne und ihrer mittleren Lebensdauer, welche bis zu einem solchen Zusammenstoss als Ende und von einem solchen als Anfang gerechnet wird. Aus denselben Betrachtungen, welche seit Jahrzehnten in der kinetischen Gastheorie gebraucht werden, ergiebt sich so z. B. für unsere Sonne eine mittlere Lebensdauer von 272.10^{18} Jahren. Dz.

J. Wilsing. Ueber das Rotationsgesetz der Sonne und die Periodicität der Sonnenflecken. Astr. Nachr. CXXVII. No. 3039. 233-252.

Es wird vornehmlich die Hypothese geprüft, dass die wahrgenommene Abnahme der Winkelgeschwindigkeit der Sonnendrehung nach den Polen hin nur der äusseren Hülle eigen sei und der innere Kern sich wie ein starrer Körper gleichmässig drehe. Die hydrodynamischen Grundgleichungen, bei deren Aufstellung die Sonnenmaterie zunächst als incompressibel und homogen angenommen wurde, werden dann unter der Voraussetzung integrirt, dass alle Massenpunkte um dieselbe Axe kreisen, aber mit einer Geschwindigkeit, welche erstens vom Radius, zweitens von der Lage des Mittelpunktes und drittens noch von der Zeit abhängt. Die allgemeine Form der Integrale lässt sich leicht durch Kugel- und

Cylinderfunctionen darstellen. Im Geschwindigkeitspotential kommt die Zeit nur in der Form $e^{-\nu^2 t}$ vor, und zwar derart, dass für $t = \infty$ die Bewegung in eine vollkommen gleichmässige Drehung übergeht.

Später werden nur die Kugelfunctionen zweiten Grades zurückbehalten, während die Untersuchung auf zusammendrückbare Flüssigkeiten ausgedehnt und die innere Reibung eingeführt wird. Dann folgen Erörterungen über den Druck, die Reibung, die Dichtigkeit der Sonnenhülle, um zu beweisen, dass die eben erwähnte Ausgleichung der Bewegung zu einer einzigen Drehung erst nach langen Jahrtausenden zu erwarten ist.

Der zweite Teil enthält Bemerkungen über die Sonnenflecken und die Beschaffenheit des Sonnenkörpers. Dz.

P. Harzer. Ueber die Rotationsbewegung der Sonne. Astr. Nachr. CXXVII. No. 3026-27. 17-34.

P. Harzer. Ueber die Bewegung des Merkurperihels. Ibid. No. 3030. 80-88.

Im ersten Aufsatz werden die Differentialgleichungen für die Bewegung einer sehr nahe kugelförmigen Gasmasse unter der Voraussetzung integrirt, dass die Flächen gleicher Dichtigkeit auch im Innern nur wenig von der Kugelgestalt abweichen. Es ergiebt sich dann für das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit an einem beliebigen Punkte der Sonnenoberfläche eine nach geraden Potenzen des Cosinus der Poldistanz fortschreitende Reihe. Wie der Verfasser in einer einleitenden Betrachtung angiebt, genügen übrigens zu einer angemessenen Darstellung der beobachteten Rotationserscheinungen schon zwei Glieder dieser Formel. Die analytische Entwickelung geht durch Kugelfunctionen hindurch.

Der zweite Aufsatz behandelt die schon früher aufgeworfene und verneinte Frage, ob die Abplattung der Sonne (oder vielmehr die Unterschiede ihrer drei Hauptträgheitsmomente) den Rest in der säcularen Bewegung des Merkurperihels erklären könnte, welcher nach Anbringung der Störungen der Planeten

noch übrigbleibt. Der Verfasser kommt unter Benutzung der Entwickelung der ersten Arbeit zu demselben Ergebnis, lässt es aber dahingestellt, ob nicht dennoch die Corona und das Zodiakallicht das bewirken könnten, was dem eigentlichen Sonnenkörper wegen seiner fast vollkommenen Kugelgestalt nicht möglich ist. Dz.

H. Seeliger. Ueber Zusammenstösse und Teilungen planetarischer Massen. Münch. Abh. XVII₂. 457-490.

Der Aufsatz zerfällt in acht Abschnitte. Im ersten werden die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Planeten aufgestellt, der von einem continuirlichen Strome planetarisch bewegter Massenpunkte getroffen wird. Im zweiten werden Formeln entwickelt, welche die relative Häufigkeit der Zusammenstösse für die verschiedenen Orte auf den Planeten betreffen. Dieselben kommen im dritten Abschnitt zur Anwendung. Im vierten wird weiter die Hypothese gemacht, welche, wie der Verfasser bemerkt, wohl kaum ganz zutrifft, dass im grossen und ganzen die heliocentrischen Radianten der Meteorschwärme gleichmässig verteilt seien, und dass die Meteore „parabolische“ Geschwindigkeit besitzen, die sich zur Geschwindigkeit des Planeten wie $\sqrt{2}:1$ verhalte. Die Wirkung aller Zusammenstösse der Meteore mit dem Planeten findet dann ihren analytischen Ausdruck in zwei über alle Richtungen im Raume auszudehnenden Doppelintegralen, von denen jedes die Form:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,.\, dx \int_0^{\pi} f(\cos x \,.\, \cos y) \,.\, dy$$

besitzt. Im fünften Abschnitt wird gezeigt, dass diese Doppelintegrale unter gewisser Einschränkung der Function f in einfache Integrale von der Gestalt

$$\frac{\pi}{2} \int_{-1}^{+1} f(z) \,.\, dz$$

verwandelt werden können. Referent hat aber hierbei zu be-

merken, dass erstens der Beweis des Verfassers einen ganz unnötigen Umweg nimmt, und dass zweitens diese Einschränkung gar nicht nötig ist. Denn die Gleichheit beider Ausdrücke folgt geradeswegs, wenn man in dem Doppelintegral an Stelle von y die Grösse $\cos x . \cos y$ als neue Veränderliche z einführt und dann zuerst nach x integrirt, wobei die Art der Function $f(z)$ gar nicht in Betracht kommt. Nach Ausführung der Integration bleibt, wie im sechsten Abschnitt gezeigt wird, ein einfaches Widerstandsproblem, welches sich von dem schon lange in der Astronomie behandelten der Bewegung eines Planeten im widerstehenden Mittel nur wenig unterscheidet. Dann werden Anwendungen auf die Bewegung der Erde gemacht, indem z. B. gezeigt wird, dass eine Schicht von 1^{mm} dicker Meteormasse von der mittleren Dichte der Erde pro Jahrhundert ein quadratisches Glied von der Form

$$0'',12 t^2$$

in die Bewegung der Erde als beschleunigendes Element hineinbringen würde. Darauf wird die säculare Beschleunigung des Mondes, deren beobachteter Wert sich noch immer nicht mit dem theoretisch aus der säcularen Verkleinerung der Excentricität der Erdbahn berechneten decken will, daraufhin betrachtet, ob der Rest nicht durch Meteorfälle zu erklären sei, eine Hypothese, die, wie der Verfasser bemerkt, schon Oppolzer erörtert hat. Im siebenten Abschnitt kommt der Verfasser auf den Widerstand zu sprechen, den Kometen, wie der Encke'sche, durch planetarische Massen erfahren können. Es wird namentlich darauf hingewiesen, dass die grosse beobachtete Unregelmässigkeit in der Zunahme seiner Umlaufszeit sehr wohl dabei bestehen könne, da die Verteilung der planetarischen Massen, welche ebenfalls die Sonne umkreisen, sehr grossem Wechsel ausgesetzt sein mag. Im achten Abschnitt endlich wird als Umkehrung des Zusammenstosses ein explosives Lostrennen von Materie betrachtet, wie wir es an Kometen bei ihrer Schweifbildung und an einigen auch bei ihrer Auflösung in zwei bemerken. Der Verfasser weist nach, dass die Schweifbildung nicht zur Erklärung der säcularen Beschleunigung des Encke'schen Kometen herangezogen werden dürfe,

wie es wiederholt geschehen ist. Wenigstens müsse man sonst sehr unwahrscheinliche Voraussetzungen machen. Dz.

O. Callandreau. Sur la théorie des étoiles filantes. C. R. CXII. 1303-1305.

Hr. Tisserand hat eine Formel aufgestellt, nach welcher ein bestimmter Ausdruck, welcher die grosse Axe der (als kreisförmig vorausgesetzten) Bahn eines grossen Planeten und die Bahnelemente eines kleinen ihm gelegentlich sehr nahe kommenden Körpers enthält, nach der Annäherung denselben Wert erhält, den er vorher hatte. Es handelt sich darum, diese Formel auf die Sternschnuppenfälle anzuwenden und einige Eigentümlichkeiten ihrer Radiationspunkte zu erklären. Dz.

L. Cruls. Loi suivant laquelle la somme des distances de la Lune à deux étoiles quelconques varie en fonction du temps. C. R. CXII. 700-703.

Dieser Aufsatz enthält einige einfache Betrachtungen über die Veränderung der Summe der Abstände des Mondes von zwei nahen Fixsternen der Himmelskugel, wenn der Mond in seiner Bahn fortschreitet. Projicirt man alles auf eine Tangentialebene der Kugel, deren Berührungspunkt der Einfachheit wegen mitten zwischen beiden Sternen angenommen wird, und trägt die beiden Abstände als Ordinaten auf der Richtung der Mondbewegung in dem jedesmaligen Orte des Mondes auf, so ergeben sich zwei gleichseitige Hyperbeln. Die Untersuchungen sollen einer neuen Art von Längenbestimmungen durch Monddistanzen, zu denen ein besonders herzurichtender Sextant benutzt werden soll, zu Gute kommen. Dz.

J. Perchot. Sur le mouvement du périgée de la Lune. C. R. CXII. 1045-1047.

Eine Bestimmung der Bewegung des Perihels, aus deren

kurzer Darstellung zu entnehmen ist, dass sie auf den Poincaré'schen Arbeiten über die Mechanik des Himmels beruht.

Dz.

S. LUPTON. The condition of space. Nature XLIV. 210-211.

Die mögliche Beschaffenheit des Weltenraumes wird zuerst allgemein besprochen, dann werden einzelne Berechnungen nach Hirn (Constitution de l'espace céleste) und nach Lockyer (The meteoritic hypothesis) mitgeteilt. Lp.

H. A. NEWTON. On the capture of comets by planets, especially their capture by Jupiter. Brit. Ass. Rep. 1891. 511-532, Silliman J. (3) XLII. 183-199, 482-491.

Die ungemein grosse Mannigfaltigkeit der in dieser Arbeit gebrauchten Symbole machen einen Auszug unmöglich; doch soll bemerkt werden, dass die Abhandlung auf Anordnung des Generalausschusses in extenso unter den Berichten abgedruckt worden ist. Gbs. (Lp.)

Weitere Litteratur.

Sir R. STAWELL BALL. An atlas of astronomy. London. George Philipp and Son.

Sir ROBERT STAWELL BALL. The story of the heavens. Eighteenth Thousand. London. Cassell and Company. [Nature XLIV. 589.]

J. E. GORE. Astronomical lessons. London. Sutton, Drowley, and Co. (1890). [Nature XLIII. 317.]

C. A. YOUNG. Lessons in astronomy. Boston and London. Ginn and Co. [Nature XLIV. 342.]

W. FOERSTER und P. LEHMANN. Die unveränderlichen Tafeln des astronomischen und chronologischen Teils des königlich preussischen Normalkalenders. Neue Ausgabe. Berlin. Verlag des königlichen statistischen Bureaus. V + 133 S. 8⁰.

W. Huggins. Inaugural address. Nature XLIV. 372-382.

H. Farquhar. Systematic differences of proper motions in declination catalogues. Washington Bull. XI. 593-596.

O. Hecker. Ueber die Darstellung der Eigenbewegungen der Fixsterne und die Bewegung des Sonnensystems. Diss. München. 4°.

A. M. Clerke. The sun's motion in space. Nature XLIV. 572-574.

J. N. Lockyer. On the causes which produce the phaenomena of new stars. Lond. Phil. Trans. CLXXXII (A). 397-448.
Cly.

A. A. Michelson. Measurement of Jupiter's satellites by interference. Nature XLV. 160-161.

F. H. Bigelow. A reply to Professor Nipher on „The theory of the solar corona". Silliman J. (3) XLI. 505-507.

F. H. Bigelow. The solar corona, an instance of the Newtonian potential function in the case of repulsion. Silliman J. (3) XLII. 1-11.

J. Wanka. Abschätzung der Planetenbahnradien. Poske Z. IV. 304-305.
Für den Unterricht in Mittelschulen. Lp.

F. Zelzer. Zur Theorie der Feuerkugeln. Diss. München. 8°.

J. Hartmann. Die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Diss. Leipzig.

Capitel 3.

Mathematische Geographie und Meteorologie.

O. SCHNEIDER. Lehrbuch der mathematischen Geographie zum Gebrauch für die Prima höherer Schulen. Pr. Realgymn. Elbing. 40 S. 8°.

Die Einteilung des Stoffes lässt zu wünschen. Zuweilen werden die wichtigsten Sätze nur ganz nebenbei behandelt, wie z. B. Seite 19 das Gesetz der Schwere. Falsch ist die Behauptung auf Seite 12, dass für zwei Orte der Erde unter Voraussetzung gleicher Bodenbeschaffenheit sich die Schwingungszeiten eines und desselben Pendels wie die Erdradien verhalten; denn der wahre Sachverhalt wird durch die Clairaut'sche Formel gegeben. Dz.

J. FRISCHAUF. Beiträge zur Geschichte und Construction der Kartenprojectionen. Graz.

E. HAMMER. Zur Abbildung des Erdellipsoids. Jordan Z. f. V. XX. 609-617, 641-661.

In einer Einleitung werden die im Laufe der Zeit auf verschiedenen Wegen erhaltenen, mannigfachen Werte für die Erdabplattung aufgeführt und discutirt. Darauf wird im besonderen zur winkeltreuen (conformen) Abbildung von Erdellipsoid-Flächenteilen auf die Kugel übergegangen. Die von Gauss gegebene Lösung dieser Aufgabe erfordert für jede specielle Mittelbreite die Berechnung neuer Tafeln. Verf. meint nun: „Die winkeltreue Abbildung einer Kugel auf eine zweite Kugel unter gegebenen Bedingungen wird bequemer zu berechnen sein, als die Abbildung des Ellipsoids auf diese Kugel. Man wird deshalb zunächst das Ellipsoid auf eine gewisse Kugel abbilden, welche eine ganz bestimmte, für alle Fälle gültige Lage zum Ellipsoid hat, und sodann erst im gegebenen Fall, d. h. für eine gegebene Mittelbreite, die Uebertragung von jener ein- für allemal zu be-

rechnenden Normalkugel auf die für diesen Fall zweckmässigste Kugel vornehmen."

Für den ersten Teil der Aufgabe verweist der Verf. auf eine lange vor Gauss von Mollweide gegebene, einfache Lösung und giebt zwei für die ganze Erde gültige Tafeln, denen das Bessel'sche und das Clarke'sche Ellipsoid von 1866 zu Grunde liegen. Hierbei ergiebt sich, dass die winkeltreue Abbildung eines wenig abgeplatteten Rotationsellipsoids auf die concentrische Normalkugel (Radius = dem Aequatorial-Halbmesser = 1; identische geogr. Längen) sehr nahe mit der Centralprojection des Ellipsoids auf jene Kugelfläche vom Mittelpunkte aus übereinstimmt. Hierauf werden einfache Vorschriften und Tafeln für die zweckmässigste (d. h. am wenigsten verzerrte) Uebertragung von der Normalkugel auf eine andere Kugel mit beliebiger ellipsoidischer Mittelbreite gegeben.

Eine besondere im Buchhandel erschienene, dem Ref. aber nicht zugängliche Ausgabe dieser Abhandlung (Stuttgart bei K. Wittwer) soll noch einen letzten Abschnitt über flächentreue Abbildung von Ellipsoid-Flächenteilen enthalten. Bö.

E. Hammer. Zur Abbildung des Erdellipsoids. Ergänzung zu des Verfassers Schrift: Ueber die geographisch wichtigsten Kartenprojectionen. Stuttgart. Wittwer. 40 S. gr. 8°. (Sonderdr.)

G. Coordes. Kleines Lehrbuch der Landkarten-Projection. 2. Aufl. von S. Koch. Cassel. Kessler. VII + 86 S. 8°.

G. Schiaparelli. Della rotazione della terra sotto l'influenza delle azioni geologiche; memoria presentata all'osservatorio di Poulkova nell'occasione della sua festa semisecolare (trad. dal fr. di O. Tedoni). Nuovo Cimento (3) XXX. 5-33.

Bezeichnet man als „Trägheitsaxe" diejenige durch den

Schwerpunkt der Erde gehende Axe, welcher das grösste Trägheitsmoment entspricht, und als „Trägheitspol" den nördlichen Endpunkt dieser Geraden, so wird hier die Aenderung des Trägheitspoles und des Drehungspoles untersucht, welche aus horizontaler oder verticaler Verrückung einer kleinen Masse sich ergiebt, unter den Hypothesen, dass die Erde a) absolut starr, b) von augenblicklich veränderlicher Form, c) von langsam veränderlicher Form ist. Vi.

A. E. H. Love. On Sir William Thomson's estimate of the rigidity of the Earth. Cambr. Trans. XV. Part I. 107-118. (1891); Cambr. Proc. VII. 72-75. (1890). (Abstract.)

In Thomson-Tait's Natural Philosophy wird folgende Frage erörtert: „Welche Starrheit müsste die Erde, als homogene elastische feste Kugel aufgefasst, besitzen, damit die berechnete Fluthöhe mit der auf der Erde wirklich beobachteten übereinstimmt?" Es ergiebt sich dort, dass, wenn jene elastische Kugel als unzusammendrückbar vorausgesetzt wird, die Fluthöhe sich auf $\frac{2}{3}$ bezw. $\frac{2}{5}$ des Betrages reducirt, welcher im Falle einer absolut starren Kugel auftreten würde, je nachdem die Starrheit der Kugel gleich der des Stahls oder der des Glases angenommen wird. Nach G. H. Darwin's Beobachtungen würde die Reduction auf $\frac{2}{3}$ ungefähr zutreffen, so dass die Starrheit der Erde ungefähr gleich der des Stahls anzunehmen wäre.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass dieses Ergebnis keine wesentliche Aenderung erfährt, wenn der die Erde ersetzende elastische Körper nicht als incompressibel vorausgesetzt wird, sondern wenn seine Zusammendrückbarkeit und Starrheit in demselben Verhältnis stehen, wie es bei den meisten festen Körpern der Fall ist. Es handelt sich also um die Lösung des Problems: „Eine der Gravitation unterworfene elastische feste Kugel von irgend welcher endlichen Zusammendrückbarkeit und Starrheit steht unter der Wirkung körperlicher Kräfte, welche ein nach harmonischen Kugelfunctionen entwickelbares Potential besitzen; es ist ihre Formänderung zu untersuchen." Ho.

J. H. Poynting. On a determination of the mean density of the Earth and the gravitation constant by means of the common balance. Lond. Phil. Trans. CLXXXII(A). 565-656.

Der Verf. bezieht sich auf seine früheren Versuche, über welche in Lond. R. S. Proc. XXVIII (F. d. M. X. 1878. 792) berichtet ist. Der erzielte Erfolg schien die damals ausgedrückte Absicht zu rechtfertigen, die Arbeit in grösserem Massstabe fortzusetzen, und die Royal Society gewährte die Mittel, den nötigen Apparat anzuschaffen. Derselbe wurde zuerst in dem Cavendish Laboratorium zu Cambridge aufgestellt, und Hr. Poynting verbrachte dort einige Arbeitsmonate mit Versuchen, ohne jedoch mehr zu erreichen als die Entdeckung einiger Fehlerquellen, und der Apparat wurde endlich im Mason College zu Birmingham wieder aufgestellt. Am Anfange des Jahres 1890 wurde der Apparat gut in Ordnung gebracht, und im Laufe jenes Jahres machte der Verf. eine Anzahl von Versuchen mit den in der gegenwärtigen Abhandlung angeführten Ergebnissen.

Die endgültig erreichten Resultate sind:

Attractions-Constante: $G = 6{,}6984.\ 10^{-8}$,

Mittlere Erddichte: $\varDelta = 5{,}4934$.

Zur Erläuterung der Bedeutung von G beachte man, dass, wenn V das Volumen der Erde, als Kugel vom Radius 1 betrachtet, und g die Beschleunigung der Schwere ist, dann $\varDelta = R^2 g : GV$.

Cly. (Lp.)

T. Mellard Reade. An outline of Mr. Mellard Reade's theory of the origin of mountain-ranges by sedimentary loading and cumulative recurrent expansion: in answer to recent criticisms. Phil. Mag. (5) XXXI. 485-496.

Eine Hervorhebung der wesentlichen Punkte aus der vom Verf. aufgestellten Theorie des Ursprungs der Gebirge, als Antwort auf verschiedene gegen dieselbe erhobenen Einwände. Die Theorie wird hier benannt als „The origin of mountain-ranges by sedimentary loading and cumulative recurrent expansion“.

Gbs. (Lp.)

C. Chree. Some applications of physics and mathematics to geology. Phil. Mag. (5) XXXII. 233-252, 342-353.

Eine etwas schneidige Kritik über verschiedene mathematische Theorien. Die Aufmerksamkeit wird vornehmlich auf die ungenügende Sprache mancher Schrift über geologische Dinge gelenkt, herrührend von der unbestimmten und gedankenlosen Benutzung solcher Ausdrücke, welche in der mathematischen Physik eine bestimmte Bedeutung haben. Gbs. (Lp.)

G. H. Darwin. On tidal prediction. Lond. Phil. Trans. CLXXXII (A). 159-229.

Die Abhandlung bezweckt zu zeigen, wie eine allgemeine Gezeiten-Tabelle, die für alle Zeit anwendbar ist, in einer derartigen Gestalt gegeben werden kann, dass jedermann mit einer elementaren Kenntnis des Nautical Almanach in einigen Minuten zwei oder drei Gezeiten für die Tage berechnen kann, an denen sie verlangt werden. Die Tabellen sind ausserdem auch so beschaffen, dass eine besondere Gezeiten-Tafel für ein beliebiges Jahr mit verhältnismässig geringer Mühe berechnet werden kann. Voraussetzung ist, dass die Constanten für den besonderen Hafen in dem harmonischen System gegeben und aus der Reduction der Gezeiten-Beobachtungen abgeleitet sind. Cly. (Lp.)

R. S. Woodward. On the variation of terrestrial density, gravity, and pressure, according to the Laplacian law. Washington Bull. XI. 580.

Th. Sludsky. Bau der Erdrinde nach Pendelbeobachtungen. Mosk. Math. Samml. XVI. 228-234.

Th. Sludsky. Bestimmung der Erddimension aus Gradmessungen nach einer neuen Methode. Mosk. Math. Samml. XVI. 295-317.

E. D. Preston. The study of the Earth's figure by means of the pendulum. Silliman J. (3) XLI. 445-460.

E. Schenk. Orologio solare universale. Con prefazione di G. V. Schiaparelli e 5 tavole. Milano.

W. Ferrel. On certain measures of the intensity of solar radiation. Silliman Journ. (3) XLI. 378-396.

Third report of the Committee ... appointed to investigate the action of waves and currents on the beds and foreshores of estuaries by means of working models. Brit. Ass. Rep. 1891. 386-404.

K. Braemer. Bemerkungen eines Statistikers über meteorologische Mittelzahlen. Met. Zeitschr. VIII. 171-179.

Betont die Notwendigkeit, lückenhafte Beobachtungen durch Interpolation zu ergänzen, und erläutert das Verfahren durch Berechnung einiger Mittelwerte, wodurch scheinbare Anomalien in den ohne Beachtung dieses Umstandes berechneten Zahlen verschwinden. Lp.

P. Schreiber. Ein graphisches Verfahren zur Herleitung der Coefficienten der Bessel'schen Reihe. Met. Zeitschr. VIII. 237.

Auszug aus einer grösseren Arbeit des Verf. in der Leop. Akad. zur graphischen Bestimmung der Coefficienten für die Entwickelung einer gegebenen Function in eine Fourier'sche Reihe als Ersatz für die zu berechnenden bestimmten Integrale. Lp.

P. Schreiber. Untersuchung über die Periodicität des Niederschlages im Königreiche Sachsen. Met. Zeitschr. VIII. 441-450.

Zu Bemerkungen giebt nur der Schluss der Arbeit Veranlassung, wo zwei Verfahrungsarten zur Bildung von Mittelwerten verglichen werden. Die erste ist die Simpson'sche Regel, die zweite das arithmetische Mittel (bei äquidistanten Beobachtungen). Wenn die Frage nach der „Richtigkeit“ mathematisch beantwortet werden soll, so ist auf die Theorie der mechanischen Quadratur zu verweisen, im vorliegenden Falle also auf die Cotesischen Formeln. Lp.

H. Mohn. Mitteilungen aus dem Norwegischen Meteorologischen Institute. Met. Zeitschr. VIII. 247-260.

Aenderungen in der Methode, nach welcher gewisse meteorologische Elemente reducirt und die Monatsmittel berechnet werden. Lp.

N. Ekholm. Anwendung des Carnot'schen Satzes auf die Kreisläufe in der Atmosphäre. Met. Zeitschr. VIII. 366-372.

Der Zweck der nur in ihrer Einleitung mitgeteilten Arbeit ist, die bei einem gegebenen Kreislauf aus Wärme erzeugte Arbeit oder umgekehrt mit Zugrundelegung der durch Beobachtung gegebenen Druck-, Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse des Kreislaufes annähernd zu berechnen. Lp.

Korselt. Ueber die Ursachen der täglichen Oscillation des Barometers. Pr. (No. 544) Realgymn. Annaberg. 24 S. 4°.

Die Haupterscheinungen im täglichen Gange des Barometers werden lediglich durch Wärmeein- und Ausstrahlung zu erklären versucht. Diese Theorie führt auf die bei der „harmonischen Analyse“ übliche Darstellungsweise der täglichen Schwankung des Barometers. Bö.

W. v. Siemens. Ueber das allgemeine Windsystem der Erde. Wiedemann Ann. XLII. 257-268. (Abdruck aus Berl. Ber. 1890; s. auch Met. Zeitschr. 1890. 321-328.)

Der Aufsatz enthält zunächst eine Erwiderung auf die vergleichende Kritik, die Hr. Sprung in der „Meteorologischen Zeitschrift“ (F. d. M. XXII. 1890. 1241) an den Theorien Ferrel's und des Verfassers geübt hat. Im Anschluss daran hebt der Verf. die principiellen Verschiedenheiten hervor, die zwischen seiner Auffassung und derjenigen Ferrel's bestehen. Er bestreitet, dass der Flächensatz in der Form der Erhaltung des Rotationsmomentes bei der Verschiebung der mit der Erdoberfläche rotirenden Luft im meridionalen Sinne zur Geltung käme; es wäre nämlich nicht einzusehen, welche Kräfte die zur Erhaltung des Rotationsmomentes notwendige Vergrösserung der lebendigen Kraft der rotirenden Luftmassen bewirken sollten. Auch die Richtigkeit einer anderen Annahme Ferrel's, dass nämlich auf geneigten Flächen gleichen Luftdruckes die überlagernden Luftschichten herabgleiten müssten, bestreitet der Verf.; auf solchen Flächen fände ebenso wenig wie auf Niveauflächen ein Antrieb zu tangentialer Verschiebung statt.

Der Verf. entwickelt dann noch einmal die Grundgedanken seiner Theorie und fasst dieselbe schliesslich in neun Sätzen zusammen, von denen hier nur der erste und letzte angeführt sein mögen: „Alle Luftbewegungen beruhen auf Störungen des indifferenten Gleichgewichtszustandes der Atmosphäre und erfüllen den Zweck der Wiederherstellung desselben.“ — „Minima und Maxima des Luftdrucks sind Folgen der Temperatur und Geschwindigkeit der Luftströmungen in den höheren Schichten der Atmosphäre.“ — Als wesentlichste Aufgabe der Meteorologie erscheint ihm demnach die Erforschung der Ursachen und Folgen der Störungen des indifferenten Gleichgewichtes der Atmosphäre; als wichtigste Aufgabe der Wetterprognose aber die Erforschung der geographischen Herkunft der Luftströme, die auf ihren Wegen nach den Polen hin über uns fortziehen. Sbt.

W. v. Siemens. Zur Frage der Ursachen der atmosphärischen Ströme. Met. Zeitschr. VIII. 336-337.

Erwiderung auf den Artikel des Hrn. Möller, über welchen F. d. M. XXII. 1890. 1242 berichtet ist. Lp.

E. Oekinghaus. Das Gesetz der Ablenkung der Windbahnen in Cyklonen. Wochenschr. f. Astr. (2) XXXIV. 81-87, u. s. w. (im ganzen 24 Fortsetzungen).

Der Verf. findet für die Ablenkung $\frac{d\varepsilon}{dt}$ eines auf einem rotirenden Sphäroid bewegten Körpers die Gleichung:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -2\omega\sin\varphi - \frac{v}{a}\operatorname{tg}\varphi.\cos\varepsilon.\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} - a\cdot\frac{\omega^2}{v}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sin\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}} + \frac{Pn.\cos\varepsilon - Pl.\sin\varepsilon}{v}.$$

a ist der Aequatorialhalbmesser, r der Radius des Parallelkreises unter der Breite φ, ω die constante Winkelgeschwindigkeit der Rotation; mit ε bezeichnet der Verf. einmal die Excentricität des elliptischen Meridianschnittes, dann aber auch den Winkel, den die Richtung der Bewegung mit derjenigen des Parallelkreises bildet; v ist die Geschwindigkeit, Pn und Pl die nördliche und östliche Componente der das betreffende Massenteilchen angreifenden Kraft. Das erste Glied auf der rechten Seite wurde zuerst von französischen Akademikern bestimmt, das zweite 1877 von Finger hinzugefügt, das dritte, das nach Ansicht des Verf. die Berechnung der Ablenkung erst zu einer vollständigen macht, ist neu hinzugekommen.

Die vorstehende Gleichung bildet die Grundlage für die in zahlreichen (bis zum Ende des Jahrganges laufenden) Fortsetzungen ausgeführten Entwicklungen. Sbt.

E. Reimann. Weitere Beiträge zur Bestimmung der Gestalt des scheinbaren Himmelsgewölbes. Pr. Gymn. Hirschberg i. Schl. 16 S. 4°.

Fortsetzung der Arbeit, über welche in F. d. M. XXII. 1890. 1230 berichtet ist. Als Ergebnis ist zu nennen, dass die scheinbare Gestalt des Himmels am Tage eine Kugelkalotte ist, bei welcher die Mitte des vertikalen Bogens zwischen Zenit und Horizont eine durchschnittliche Höhe von 21°,22 besitzt. Im Frühjahr und Winter, ebenso bei Bewölkung ist der Himmel flacher, als im Sommer und Herbst und bei heiterem Wetter.

Dz.

F. H. Bigelow. A solution of the aurora problem. Silliman Journ. (3) XLI. 83-89.

Anhang.

M. d'Ocagne. Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. Règles pratiques. Exemples d'application. Paris. Gauthier Villars et Fils. VI + 96 S. gr. 8°.

Die Bezeichnung „Nomographie" erläutert der Verf. in der Vorrede mit folgenden Worten: Da es sich um die graphische Darstellung des Gesetzes handelt, welches mehrere gleichzeitig veränderliche Grössen verknüpft, ein Gesetz, von dem die sogenannte Gleichung nur der analytische Ausdruck ist, so haben wir die Benennung „Nomographie" (νόμος, Gesetz) dieser Studie vorgesetzt. Die darstellende Geometrie verpflanzt die Thatsachen des Raumes in die Ebene, die Nomographie die der Zahl. — Der Verf. hat in seinem Werke eine Uebersicht der graphischen Methoden gegeben, die zu diesem Zwecke ersonnen sind. Die Hauptaufgabe, um welche es sich zunächst handelt, ist die graphische Darstellung der Abhängigkeit dreier durch eine Gleichung verbundenen unabhängigen Variabeln. Dies wird (Cap. I) an den von Hrn. Vogler eingeführten „Isoplethen" erläutert. Sind nämlich $F_1(x, y, \alpha) = 0$, $F_2(x, y, \beta) = 0$, $F_3(x, y, \gamma) = 0$ die Gleichungen dreier Curvenscharen, so hat auf einer Einzelcurve der ersten Schar der Parameter α einen und denselben Wert, weshalb diese Curve Isoplethe benannt ist. Zeichnet man die drei Scharen in derselben Zeichenebene für eine Reihe äquidistanter Werte (z. B. 1, 2, 3, ...) jedes der Parameter, so giebt ein Punkt, durch welchen je eine Curve der drei Scharen hindurchgeht, ein Werte-

system (α, β, γ), welches der Eliminationsgleichung $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ aus $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ genügt. Dieses Princip wird nun (Cap. II) an einer grösseren Zahl von Methoden durchgeführt, welche für die Praxis in Vorschlag gebracht sind und sich bei der Lösung besonderer Aufgaben als bequem erwiesen haben, z. B. den Aufgang und Untergang der Sonne aus der Declination und geographischen Breite zu finden, die trinomische Gleichung dritten Grades aufzulösen, u. dergl. m. Die Ausfüllung der Zeichenebene durch drei Curvenscharen wird dem Auge leicht unangenehm; daher ist von Hrn. Lallemand ein Verfahren angegeben, das von diesem Mangel befreit ist und auf sechseckigen abaques (Rechenbrettern) beruht. Die Darstellung dieser Methode nimmt das ganze dritte Capitel in Anspruch. Indem dann der Verf. die Cartesischen Coordinaten mit den „Parallel-Coordinaten" vertauscht (die von Herrn Schwering nicht, wie die Anmerkung auf S. 53 besagt, gleichzeitig mit Hrn. d'Ocagne erst 1885 behandelt sind, sondern bereits 1876 in Schlömilch Z. XXI. 278-286, vorher sogar schon 1871 durch Unverzagt erörtert wurden), setzt er in diesem reciproken System des Cartesischen isoplethe Punkte an die Stelle der isoplethen Curven und lehrt den Gebrauch des von ihm bearbeiteten Begriffes. Das fünfte Capitel zeigt, durch welche Kunstgriffe man dazu gelangen kann, Gleichungen mit mehr als drei Variabeln vermittelst der binären Elemente Lallemand's graphisch darzustellen, und das sechste führt zu diesem Zwecke die „doppelt isoplethen" Punkte ein, mit deren Hülfe dann die Gleichungen vierten und fünften Grades gelöst werden, der sphärische Abstand zweier durch die Breiten und die Differenz der Längen gegebenen Punkte bestimmt, für die Linsenformel der Optik eine graphische Darstellung ermöglicht wird. Kurze Bemerkungen über Gleichungen mit fünf und sechs Variabeln sowie über tangentiale Isoplethen machen den Beschluss. Eine Zusatznote endlich zeigt den Nutzen transparenter Tafeln. Ausser den zahlreichen Figuren im Texte sind acht sorgfältig ausgeführte lithographirte Tafeln dem Werke beigegeben, dessen Nutzen der Verfasser besonders für die Techniker hervorhebt. Lp.

Arnoux. Essais de psychologie et de métaphysique positives. La méthode graphique en mathématiques. Assoc. Franç. Marseille XX. 241-259.

Nach den einleitenden philosophischen Betrachtungen enthält der Aufsatz eine Darstellung der „graphischen Algebra", die im Anfange mit der Theorie der Strecken übereinstimmt, ohne dass dieses erwähnt wird. Der Verf. bezieht sich wegen weiterer Erläuterungen auf eine ausführlichere Schrift, welche er 1889 im Bulletin de la Société scientifique des Basses-Alpes hat erscheinen lassen, die dem Referenten aber nicht zugänglich gewesen ist. Die zuerst dargelegten Principien werden zur graphischen Auflösung der Gleichung fünften Grades angewandt, wobei eine Art wiederholter Spiegelung an den Seiten eines offenen Fünfseits mit lauter rechten Winkeln benutzt wird. Die in dem Schlussabschnitte auseinandergesetzte symbolische Methode zur Berechnung des Cosinus oder Sinus von $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ ist in nichts einfacher als die Entwickelung des Productes $\Pi(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k)$ nach Potenzen von i. Lp.

J. Mandl. Graphische Auflösung von Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades. Mitt. üb. Art. u. Genie. XXII. 133-141.

Mit Hülfe der Schnittpunkte von Kegelschnitten, erläutert durch Zahlenbeispiele. Lp.

G. de Longchamps. Exposition de la théorie des intégrateurs. Progreso mat. I. 73-75, 97-101.

Allgemeine Idee der Integratoren und die Theorie des Amsler'schen Planimeters. Tx. (Lp.)

Th. Alexander and A. W. Thomson. On elliptographs, and on a mechanical rocker for detecting oscillations, to which is added a mathematical investigation of the free period of the rocker. Dublin Trans. XXIX. 673-713.

Verschiedene Verbesserungen der älteren Gestalten von Ellipsographen werden beschrieben und im einzelnen erläutert.

Gbs. (Lp.)

K. von Ott. Der logarithmische Rechenschieber. Theorie und Gebrauch desselben. Prag. J. G. Calve.

Das Instrument ersetzt das Aufsuchen der Logarithmen durch zwei aneinander liegende Lineale, deren eins durch Teilstriche die Zahlen 1 bis 1000, das andere deren Logarithmen angiebt und darum verschiebbar ist. Es werden die verschiedenen, den Gebrauch erleichternden Einrichtungen beschrieben und die Ausführung der Multiplication, Division, Potenzirung und Radicirung nebst Anwendungen erläutert. Die Erläuterung würde sich sehr vereinfacht haben, wenn die Unabhängigkeit der Rechnung mit Mantissen und Kernziffern in der Theorie, nicht erst beim Gebrauch gezeigt worden wäre.

H.

E. Müller. Einrichtung und Gebrauch der logarithmischen Rechenschieber. Z. dtsch. Ing. XXXV. 975.

An einigen Beispielen wird der Gebrauch des Apparates gezeigt.

F. K.

Bazeries. Cryptographe à 20 rondelles-alphabets (25 lettres par alphabet). Assoc. Franç. Marseille XX. 160-165.

Beschreibung eines Apparates zum Gebrauche beim Chiffriren von Depeschen, der auf der gleichzeitigen Anwendung mehrerer verschiedenen Alphabete beruht, und zu dem der Schlüssel mathematisch nicht gefunden werden kann.

Lp.

J. de Mendizábal Tamborrel. Tables des logarithmes à huit décimales des nombres de 1 à 125000, et des fonctions goniométriques, etc. Paris. Hermann. 320 S. fol. [New York M. S. Bull. II. 33-34.]

Die Tabellensammlung, welche Hr. Tamborrel, ein mexikani-

scher Ingenieur und Geograph, veröffentlicht hat, enthält die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 125000 auf acht Decimalen, ebenso die Logarithmen der trigonometrischen Functionen sinus, cosinus, tangens, cotangens. In den Tafeln der trigonometrischen Functionen nimmt der Verf. gemäss einem von Villarceau ausgesprochenen Wunsche als Einheit bei der Ausmessung der Winkel denjenigen Winkel, der einem ganzen Umlauf entspricht; er giebt ihm den Namen „Gon" (gone), und da er die Zehnteilung annimmt, so bezeichnet er die sich folgenden Unterteile des Gons als „Decigon", „Centigon" u. s. w.

Die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108000 wurden den Tafeln von Callet und Schrön entnommen; die Logarithmen der Zahlen von 108000 bis 125000 wurden vom Verfasser berechnet, ebenso die Logarithmen der trigonometrischen Functionen. Die letzteren Logarithmen werden, von Centimilligon zu Centimilligon fortschreitend, von Mikrogon zu Mikrogon für die ersten 25000 Mikrogone, auf acht Decimalen, für die folgenden auf sieben gegeben.

Indem der Verf. seine Tafeln mit denen von Prony und mit denen des Service géographique verglichen hat, ist er auf einige Fehler dieser letzteren gestossen. Die Herausgabe der Tafeln ist in Frankreich erfolgt; der Druck ist correct und klar. Man kann sie den Astronomen und Feldmessern empfehlen.

Tx. (Lp.)

Tables des logarithmes à 8 décimales des nombres entiers de 1 à 120000 et des sinus et des tangentes de 10 secondes en 10 secondes d'arc, dans le système de la division centésimale du quadrant, publiées par ordre du ministre de la guerre. Paris. Imprimerie nationale. 636 S. gr. 4°. [New York M. S. Bull. I. 139-140.]

S. Gundelfinger und A. Nell. Tafeln zur Berechnung neunstelliger Logarithmen mittels einer neuen Interpolationsmethode. Mit erläuterndem Nachwort. Darmstadt. A. Bergsträsser. IV + 60 S. gr. Lex. 8°.

Die Tafel besteht aus zwei Teilen. Tafel I (S. 2-37) enthält die neunstelligen Logarithmen aller vierstelligen Zahlen. Tafel II giebt zu den Argumenten A gewisse Functionswerte B auf neun Decimalen, wo nämlich $10^B = 1 + 10^A$; also wenn A gleich $\log x$ gesetzt wird, ist $B = \log(x+1)$. Soll zu einer gegebenen Zahl N der neunstellige Logarithmus gesucht werden, so bilde man eine vierstellige Zahl n aus den vier ersten Ziffern von N linker Hand und setze $p = N - n$, suche $A = \log p - \log n$ auf sechs Decimalen, bestimme B aus Tafel II; dann ist endlich $\log N = B + \log n$. Die genaueren Vorschriften sind in dem erläuternden Nachwort gegeben. Es ist somit den Verfassern gelungen, durch diese Einrichtung der Tafeln die Berechnung neunstelliger Logarithmen auf geringem Raume bequem zu ermöglichen. Lp.

M. Rühlmann und M. R. Rühlmann. Logarithmisch-trigonometrische und andere für Rechner nützliche Tafeln. Zunächst für Techniker, sowie für den Schulgebrauch und für praktische Rechner überhaupt. Elfte Aufl. Leipzig. Julius Klinkhardt. XXXVIII + 322 S. 12mo.

Diese sechsstellige Tafel zeichnet sich vor anderen ähnlichen Tafeln durch ihr bequemes, kleines Format aus sowie durch ihre Reichhaltigkeit in den beigegebenen physikalischen, chemischen und technischen Tabellen. Ausser den Logarithmen der Zahlen und der goniometrischen Functionen enthält das Buch nämlich die natürlichen goniometrischen Functionen von Minute zu Minute, die Längen der Kreisbogen für den Radius 1, die Verwandlung der Minuten und Secunden in Decimalbrüche des Grades und die natürlichen Logarithmen der Zahlen 1,00 bis 100. Es folgen dann Tafeln der Kreisumfänge, Kreisinhalte, Quadrate, Kuben, Quadratwurzeln, Kubikwurzeln von 1,0 bis 1000; Tafeln für barometrische Höhenmessungen, Mass- und Gewichtsvergleichstabellen, Tabellen aus der Zinseszins- und Rentenrechnung, eine Mortalitätstafel, endlich astronomische, physikalische und chemische Constanten. Die vorliegende neue Auflage, welche auf

dem Titelblatte als elfte, in der Vorrede als zwölfte bezeichnet ist, hat einige Druckfehler entfernt und diejenigen Aenderungen physikalischer und chemischer Constanten berücksichtigt, welche durch neuere Bestimmungen nötig geworden waren. Vollständig neu hinzugefügt wurden Tabellen über Erdmagnetismus und das für Unterrichtszwecke wertvolle periodische System der Elemente.

Lp.

H. GRAVELIUS. Vierstellige Logarithmentafeln. Berlin. Ferd. Dümmler Verlagsbuchh. 24 S. 8°.

In handlichem Format giebt diese kleine Broschüre die Tafel der Logarithmen der Zahlen (S. 5-8), der trigonometrischen Functionen von 4 zu 4 Minuten (S. 9-20), die Additions-Logarithmen (S. 21-24) und auf der letzten Seite die Werte einiger oft gebrauchten Zahlen. Lp.

Weitere Litteratur.

G. Freiherr VON VEGA. Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Neue Stereotyp-Ausgabe. Bearbeitet von C. BREMIKER. 73. Aufl. von F. TIETJEN. Berlin. Weidmann'sche Buchh. XXVIII + 575 S. 8°.

E. F. AUGUST. Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 17. Aufl., besorgt von F. August. Leipzig. Veit und Co. VIII + 204 S. 12°.

F. G. GAUSS. Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 34. Aufl. Halle. Strien Verlag. 162 u. XXXV S. 8°.

H. GRAVELIUS. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimalteilung der Quadranten, nebst Tafeln der Logarithmen der Zahlen, Antilogarithmen, Tafeln der Zahlwerte der trigonometrischen Functionen, Gauss'schen Logarithmen, Quadrattafeln und Logarithmen der Hyperbelfunctionen. Berlin. Dümmler's Verlag. 64 S. gr. 8°.

A. Greve. Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, nebst einer grösseren Anzahl von Hülfstafeln. 4. Aufl. Bielefeld. Velhagen und Klasing. IV + 172 S. 8°.

G. J. Hoüel. Fünfstellige Logarithmentafeln der Zahlen und der trigonometrischen Functionen, nebst den Gaussischen Additions- und Subtractionslogarithmen und verschiedenen Hülfstafeln. Neue Ausgabe. Berlin. Alb. Cohn, in Commiss. XLVI + 118 S. gr. 8°.

G. J. Hoüel. Tables de logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques etc. Nouvelle éd., revue et augmentée. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

E. T. Köhler. Manuale logaritmico-trigonometrico. 9. ed. italiana. Leipzig. Tauchnitz. XXXVIII + 388 S. Lex. 8°.

W. Ligowski. Sammlung fünfstelliger logarithmischer, trigonometrischer und nautischer Tafeln, nebst Erklärungen und Formeln der Astronomie. 2. Aufl. Kiel. Univers.-Buchh. XIII + 252 S. 8°.

O. Schlömilch. Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Grosse Ausgabe. 4. Aufl. Braunschweig. Vieweg und Sohn. XXVI + 171 S. 8°.

S. Stampfer. Logarithmisch - trigonometrische Tafeln, nebst verschiedenen anderen nützlichen Tafeln und Formeln, und einer Anweisung, mit Hülfe derselben logarithmische Rechnungen auszuführen. 14. Aufl. (Stereotyp-Ausgabe.) Wien. Carl Gerold's Sohn. XXIV + 122 S. 8°.

A. L. Crelle. Rechentafeln, welche alles Multipliciren und Dividiren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei grösseren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Tables de calcul etc. ... Mit einem Vorwort von Bremiker. 6te Stereotyp-Ausgabe. Berlin. X + 250 S. gr. 4°.

A. Liebenam. Tafel der vielfachen Sinus und Cosinus sowie der einfachen Tangenten und Cotangenten. 2. Aufl. Eisleben.

H. Hartl. Der Rechenwinkel. Ein Hülfsmittel zur raschen graphischen Lösung wichtiger mathematischer Aufgaben. Reichenberg. J. Fritsche. 16 S. mit 1 Taf. gr. 8°.

H. C. E. Martus. Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. 2. Teil: Ergebnisse. 7. Aufl. Leipzig. C. A. Koch. 289 S. 8°.

J. Kramerius. Repetitorium aus Geometrie und Mechanik für baugewerbliche Schulen und die Baupraxis. 2. Aufl. Wien. Pichler's Wittwe u. Sohn. 173 S. mit 1 Taf. 12°.

J. Wolstenholme. Mathematical problems on the subjects for the Cambridge mathematical tripos examination. 3d edition, revised and corrected. Part I. London. 510 S.

Examination papers for entrance and minor scholarships and exhibitions in the colleges of the university of Cambridge. Michaelmas term 1890. Mathematics and science. Cambridge. 4°.

A. Aurès. Traité de métrologie assyrienne, ou étude de la numération et du système métrique assyriens. Paris.

F. Villicus. Die Geschichte der Rechenkunst vom Altertume bis zum 18. Jahrhundert mit besonderer Rücksicht auf Deutschland und auf Oesterreich. 2te verm. u. verb. Aufl. Wien. 112 S Lex. 8°.

M. Silberberg. Sepher hamaspher, Buch der Zahl, ein arithmetisches Werk von Abraham ibn Esra. Text der Einleitung des A. ibn Esra mit deutscher Uebersetzung und Anmerkungen. Halle. 30 S. 8°.

Namenregister.

Berichtigungen.

Seite 105 Zeile 10 von unten lies Acta Math. XIV statt XII.

„ 244 „ 7 u. 8 von oben lies: entweder am Anfange der Beobachtungszeit der Gesellschaft angehörten und jünger als x Jahre waren, oder während der Beobachtungszeit in die Gesellschaft eingetreten sind, ohne das Alter x damals noch erfüllt zu haben, statt: in die Gesellschaft eingetreten sind, ohne das Alter x noch erfüllt zu haben.

„ 439 Zeile 7 von unten lies and statt und.

„ 445 „ 7 „ „ „ J. L. W. V. Jensen statt J. B. W. V. Jensen.

„ 446 Gleichung (2) lies $\lim\limits_{n=\infty}$ statt lim.

„ 447 Zeile 2 von oben lies $(2\pi)^{\frac{h-1}{2}}$ statt $(s\pi)^{\frac{h-1}{2}}$.

„ 447 „ 7 „ unten „ $\psi(s)$ und ihrer Ableitungen statt $\psi_n(s)$.

„ 447 „ 2 „ „ „ $\psi(s)$ statt $\Psi(s)$.

„ 449 „ 16 „ oben „ $Q(s)$ statt $\Phi(s)$.

„ 551 „ 13 „ „ „ Belg. Bull. (3) XXII. statt (3) XII.

„ 604 „ 13 „ „ „ Levett statt Levelt.

„ 724 „ 9 „ „ „ $g_{\nu'\tau}$ statt $g_{\tau'\nu}$.

„ 777 „ 1 „ „ „ Galliers statt Gallies.

„ 843 „ 2 „ unten „ Journ. de Math. (4) VII statt (4) III.

„ 1033 „ 4 „ „ „ Civiling. XXXVII statt XXXII.

„ 1055 „ 8 „ oben „ Emtage statt Embage.

„ 1079 „ 5 „ „ „ L. Lorenz statt B. Lorenz.

„ 1183 „ 9 „ unten „ D. J. Korteweg statt D. T. Korteweg.

„ 1202 „ 11 „ „ „ G. Jäger statt G. Jager.

